

13 (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ නම්, ගුණනය යටතේ A න්‍යාසය සමඟ න්‍යාදේශ වන B නම් න්‍යාසයක් $\lambda A + \mu I$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කල හැකි බව පෙන්වන්න.

මෙහි λ සහ μ යනු තාත්වික නියත ද I යනු 2 වන ගණයේ ඒකක න්‍යාසය ද වේ.

$B = A^2$ වන පරිදි λ සහ μ වල අගයන් සොයා වනයිත් A^{-1} සොයන්න.

(b) $Z^6 - 1$ සාධකවලට වෙන්කිරීමෙන් $Z^6 - 1 = 0$ සමීකරණයේ සියලුම විසදුම් සොයන්න.

Z_1 සහ Z_2 යනු $Z^6 = 1$ සමීකරණයේ ඕනෑම ප්‍රතින්ත විසදුම් දෙකක් නම්, ආගන්ති සටහන භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $|Z_1 - Z_2|$ ට ලබාගත හැකි අගයන් 1, 2 හෝ $\sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

(c) ධන නිඛිලමය n සඳහා ද, මූලාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්

$$\left(\frac{1 + \sin \theta + i \cos \theta}{1 + \sin \theta - i \cos \theta} \right)^n = \cos n \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + i \sin n \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$
 බව පෙන්වන්න.

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{2n} = (-1)^n$$
 බව අපෝහනය කරන්න.

14 (a) $x \neq -1$ සඳහා $f(x) = \frac{x(x+3)}{(x+1)^2}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න

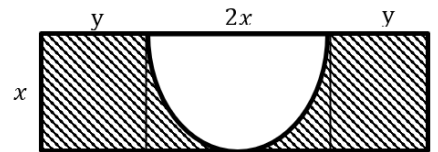
$$f'(x) = -\frac{(x-3)}{(x+1)^3}$$
 මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

වනයිත් $f(x)$ හි අඩුවන හා වැඩිවන x හි ප්‍රාන්තර සොයන්න. $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ බිණ්ඩාංක ලබාගන්න.

$x \neq -1$ සඳහා $f''(x) = \frac{2(x-5)}{(x+1)^4}$ බව දී ඇත. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ බිණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝත්මය, හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි දිග මීටර $2(x + y)$ හා පළල මීටර x වූ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර තහඩුවක වර්ගඵලය වර්ගමීටර 8π වේ. එම තහඩුවෙන් අරය මීටර x වූ අර්ධ වෘත්තාකාර කොටසක් කපා ඉවත් කිරීමෙන් අදුරු කළ කොටස ලබාගෙන ඇත. අදුරු කළ කොටසේ පරිමිතිය මීටර P නම්, $P = \pi \left(x + \frac{16}{x} \right)$ බව පෙන්වා, P අවම වන පරිදි x හි අගය සොයන්න.



15 (a) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^4 + 1 = A(x^4 - 1) + B(x^2 + 1)(x + 1) + C(x^2 + 1)(x - 1) - (x^2 - 1)$

වන පරිදි A, B හා C නියතයන්ගේ අගයන් සොයන්න. වනයිත් $\int \frac{x^4+1}{x^4-1} dx$ සොයන්න.

(b) (i) $y = x + \cos x \sin^3 x$ විට $\frac{dy}{dx} = 1 + 3\sin^2 x - 4\sin^4 x$ බව පෙන්වන්න.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 3x \sin^2 x - 4x \sin^4 x) dx$$
 විට,

ඉහත (i) හි ප්‍රතිඵලය හා කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදාගනිමින්

$$I = \frac{1}{8}(\pi^2 - 2)$$
 බව පෙන්වන්න.

(ii) $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3\cos^2 x - 4\cos^4 x) dx$ හා

$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 3x \cos^2 x - 4x \cos^4 x) dx$ වන විට

$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ බව යොදාගනිමින්, $I = \frac{\pi}{2} J_1 - J_2$ බව පෙන්වන්න. මෙහි I යන්න (i) කොටසේ දී ඇත.

උත්තරය වශයෙන් $\frac{d}{dx} (x - \sin x \cos^3 x) = 1 + 3\cos^2 x - 4\cos^4 x$ බව දී ඇත්නම්,

$J_2 = \frac{1}{8}(\pi^2 + 2)$ බව පෙන්වා J_1 හි අගය අපෝහනය කරන්න.

(c) $\sqrt{x^3 + 1} = t$ යන ආදේශය යොදාගනිමින් $\int_0^2 \frac{x^8}{\sqrt{x^3+1}} dx$ අනුකලය අගයන්න.

16 $l_1 \equiv x - \sqrt{3}y + 1 + k = 0$ හා $l_2 \equiv x + \sqrt{3}y + 1 - k = 0$ සරල රේඛා $(-1, 3)$ හරහා ගමන් කරයි නම් $k = 3\sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න. k සඳහා වම අගය ඇති විට $l_1 = 0$ හා $l_2 = 0$ අතර කෝණ සමවිච්ඡේදක වල සමීකරණ සොයන්න. මේවායින් සුළු කෝණ සමවිච්ඡේදකය l ලෙස ගනිමු. $A \equiv (2, 3)$ ලක්ෂ්‍යය l සරල රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

A කේන්ද්‍රය වූ ද විශ්කම්භය ඒකක 3 ක් වූ ද S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

A සිට $l_1 = 0$ රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර සොයා එනගින් $(-1, 3)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට අඳිනු ලබන ස්පර්ශකවල සමීකරණ අපෝහනය කරන්න.

$l = 0$ මත වූ P ලක්ෂ්‍යයක සිට S වෘත්තයට අඳිනු ලබන ස්පර්ශක විකිනෙකට ලම්බ වේ. P සඳහා පිහිටීම් දෙකක් ඇති බව පෙන්වා වම ලක්ෂ්‍ය වල ධනාත්මක සොයන්න. තවදුරටත් වම ස්පර්ශක වලින් වටවූ වතුරසුයේ වර්ගඵලය ද සොයන්න.

17 (a)

(i) $\cos A, \cos B, \sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A + B)$ ලියා දක්වන්න. $\cos 3A$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් $\cos A$ ඇසුරෙන් ලබාගන්න.

(ii)
$$\frac{2 \cos 3x - 4\cos^5 x + 3\cos^3 x}{\cos x(1 + \sin^2 x)} = \lambda \cos 2x + k$$

වන පරිදි λ හා k තාත්වික නියත නිර්ණය කරන්න. එනගින්,

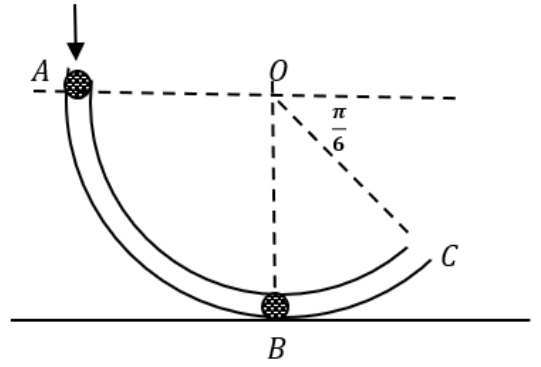
$$f(x) = \frac{2 \cos 3x - 4\cos^5 x + 3\cos^3 x}{\cos x(1 + \sin^2 x)}$$

හි උපරිම හා අවම අගයන් සොයා $x \in [-\pi, \pi]$ සඳහා $y = f(x)$ ප්‍රස්ථාරයෙහි දළ සටහන අඳින්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයක් තුළ $P\hat{A}B = P\hat{B}C = P\hat{C}A = \alpha$ වන පරිදි P ලක්ෂ්‍යයක් ඇත. සුදුසු ත්‍රිකෝණ දෙකක් සලකා සයින නීතිය යෙදීමෙන් PC සඳහා ප්‍රකාශන දෙකක් ලියා දක්වා, $\cot \alpha = \cot A + \cot B + \cot C$ බව පෙන්වන්න.

(c) $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ සඳහා $2 \tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2 \operatorname{cosec} x)$ සමීකරණය විසඳන්න.

(b) අරය a ද කේන්ද්‍රය O ද වන වෘත්තාකාර වාපයක හැඩය ඇති සුමට සිහින් බටයක් රූපයේ පරිදි AO රේඛාව තිරස්වද, බටයේ පහලම ලක්ෂ්‍යය වන B ලක්ෂ්‍යය අවල තිරස් පොලොවක් ස්පර්ශ කරමින්ද, සිරස් තලයක සවිකර ඇත. ස්කන්ධය m වූ සුමට P අංශුවක් A කෙළවරේ දී බටය තුලට සිරුවෙත් මුදා හරිනු ලැබේ. OP රේඛාව OA සමග θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) කෝණයක් සාදන විට P අංශුවේ ප්‍රවේගය v නම් $v^2 = 2ga \sin\theta$ බව පෙන්වන්න.



P අංශුව B වෙත ලගා වන විට බටය තුල B හි නිසලව තබා ඇති ස්කන්ධය λm වූ සුමට Q නම් තවත් අංශුවක් හා ගැටී නාවේ. ගැටුමට මොහොතකට පෙර P අංශුවේ ප්‍රවේගය $\sqrt{2ga}$ බව පෙන්වන්න.

ගැටුමෙන් පසු සංයුක්ත අංශුව OB සමග θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$) කෝණයක් සාදන විට එහි ප්‍රවේගය u නම්, $u^2 = 2ga \left(\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \cos\theta - 1 \right)$ බව පෙන්වන්න.

සංයුක්ත අංශුව බටය හැර නොගොස් දෝලන චලිතයක යෙදීම සඳහා $\lambda(\lambda + 2) > 1$ විය යුතු බව පෙන්වන්න. තවද $\lambda = \sqrt{2} - 1$ නම් සංයුක්ත අංශුව ස්වකීය දෝලන චලිතයේ පලමු ගතික නිශ්චලතාවයට පත්වන මොහොතේ බටයෙන් අංශුව මත $\sqrt{\frac{3}{2}}mg$ විශාලත්වයෙන් යුත් ප්‍රතික්‍රියාවක් ඇති කරන බවද පෙන්වන්න.

13. ස්වභාවික දිග $3l$ වූ සිහින් සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ දුන්නක්, එහි පහළ කෙළවර O අවල වන සේ සිරස් ව සිටුවා ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් එහි ඉහළ කෙළවරට ඇඳ තිබේ. P මත සිරස්ව ඉහලට යෙදෙන නියත $3mg$ බලයක් මගින් P අංශුව O ට සිරස් ව $4l$ ක් ඉහළින් වූ A ලක්ෂ්‍යයක සමතුලිතව ඇත. දුන්නෙහි ප්‍රත්‍යස්ථතා මාසාංකය $6mg$ බව පෙන්වන්න. A සිට සිරුවෙත් අංශුව මුදාහල විට අංශුව සිරස් චලිතයක් දක්වන්නේ යැයි සලකා දුන්නේ දිග x වනවිට $3l < x < 4l$ සඳහා $\ddot{x} + \frac{2g}{l} \left(x - \frac{5l}{2} \right) = 0$ බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණය $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ ආකාරයෙන් නැවත ලියන්න. මෙහි $X = x - \frac{5l}{2}$ හා $\omega^2 = \frac{2g}{l}$ වේ. $\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් මෙම චලිතයේ විස්තාරය c සොයන්න. එනමින්, O ට සිරස් ව $3l$ ඉහළින් වූ B ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුවේ වේගය සොයන්න.

B හිදී නිසලව තිබූ ස්කන්ධය m වූ තවත් Q අංශුවක් P හා සරලව ගැටී නාවේ. ඉන්පසු B හිදී සංයුක්ත අංශුව පහළට චලනය ආරම්භ කරන වේගය \sqrt{gl} බව පෙන්වන්න.

D යනු සංයුක්ත වස්තුව ළඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය යැයි ගෙන B සිට D දක්වා අංශුවේ චලිතය සඳහා දුන්නේ දිග y යන්න $\dot{y} + \frac{g}{l} (y - 2l) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න. මෙහි $(2 - \sqrt{2})l < y < 3l$ වේ.

ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම $y = 2l + \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ ආකාරයේ බව උපකල්පනය කරමින්, α, β හා ω නියතවල අගයන් සොයන්න.

එනමින්, වස්තුව B සිට D දක්වා යෙදෙන සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය හා විස්තාරය සොයන්න.

14. (a) O මූලය අනුබද්ධයෙන් A ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$ වේ. B යනු $OB = 10$ හා $\widehat{BOA} = 60^\circ$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය වේ. මෙහි \mathbf{i} හා \mathbf{j} සඳහා සුපුරුදු අර්ථ ඇත. $\alpha \neq 0$ විට $\overrightarrow{OB} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$ ලෙස ගෙන \overrightarrow{OB} සොයන්න.

(i) C යනු OB මත $\overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \frac{5}{2}\mathbf{j}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. OC : CB අනුපාතය සොයා OA හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D නම් \overrightarrow{BD} ලබාගන්න.

(ii) E යනු $\overrightarrow{AE} = \frac{10}{17}\overrightarrow{AC}$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යයක් නම් \overrightarrow{BE} සොයා එමගින් B, E, D ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය වන බව පෙන්වන්න.

(b) ABCD ත්‍රිකෝණයේ AB හා DC එකිනෙකට සමාන්තර වන අතර $AB \perp BD$, $\widehat{DAB} = 60^\circ$ හා $\widehat{CAB} = 30^\circ$ වේ. \overline{AB} , \overline{AD} , \overline{CA} , \overline{DB} පාද ඔස්සේ පිළිවෙලින් μp , $2p$, $3\sqrt{3}p$ හා λp බල ක්‍රියාකරයි.

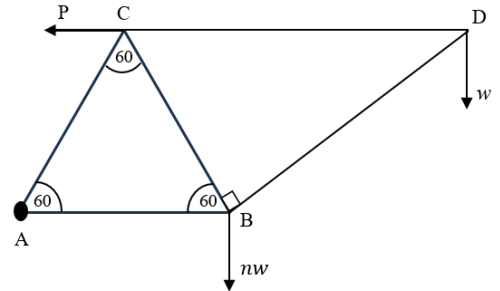
(i) λ හා μ හි කිසිම අගයක් සඳහා මෙම පද්ධතිය සමතුලිත නොවන බව පෙන්වන්න.

(ii) පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය AD ඔස්සේ වේ නම් λ හා μ හි අගයන් සොයන්න.

(iii) දැන් පද්ධතියට \overline{CD} දිශාවට D හරහා αp බලයක් හා එම තලයේම ක්‍රියාකරන G යුග්මයක් එකතු කරනු ලැබේ. නව සම්ප්‍රයුක්තය DB ඔස්සේ වේ නම් α හා G හි අගයන් සොයන්න.

15. (a) AB, BC, CD හා DA සමාන දිගැති ඒකාකාර දඩු හතරෙහි බර පිළිවෙලින් $2W, 2W, 3W$ හා W වේ. ඒවා A, B, C, D අන්ත වලදී සුමට ලෙස අසව් කර තැනූ චතුරස්‍රය A ශීර්ෂයෙන් නිදහසේ චල්ලා තබා එහි සමචතුරස්‍ර හැඩය පවතින අයුරින් AB හා BC දඩු දෙකෙහි ගුරුත්ව කෙන්ද්‍ර සැහැල්ලු අච්චනය තන්තුවකින් අදා ඇත. පද්ධතිය සමතුලිතව චල්ලී ඇති විට තන්තුවේ ආතතිය $9W$ බව පෙන්වන්න. B හා C සන්ධි වල ප්‍රතිතක්‍රියා වල විශාලත්ව ද සොයන්න.

(b) රූපයේ පරිදි AB, BC හා AC සමාන දිගැති සැහැල්ලු දඩු 3 ක් ද BD හා CD ලෙස වෙනත් අසමාන දිගැති සැහැල්ලු දඩු දෙකක් ද ලෙස දඩු පහකින් සැදී රාමු සැකිල්ල A හි දී අවම ලක්ෂ්‍යයකට සුවල ලෙස අසව්කර ඇත. B හා D හිදී පිළිවෙලින් nw හා w හාර සහිතව AB හා CD තිරස්ව, රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව පවත්වාගනුයේ C හිදී යොදා ඇති P තිරස් බලය මගිනි. $P = \left(\frac{2n+5}{\sqrt{3}}\right)w$ බව පෙන්වන්න. ඔේ අංකනය



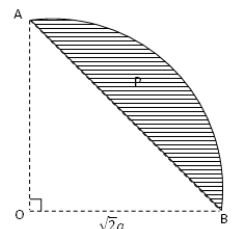
යෙදීමෙන්, සියලු දඩුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති හා තෙරපුම් ලෙස වෙන්කර දක්වමින් ඒවායේ විශාලත්ව සොයන්න. BC දණ්ඩට දැරිය හැකි උපරිම ආතතිය $10\sqrt{3}w$ නම් $n \leq 14$ විය යුතු බව සාධනය කරන්න.

16. (a)

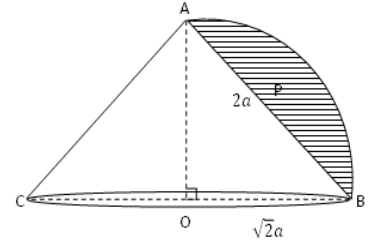
(i) අරය r වන, කේන්ද්‍රයේ 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන, ඒකාකාර කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$ දුරින් පිහිටන බව අනුකලනය මගින් පෙන්වන්න.

(ii) උස h හා අරය a වන ඒකාකාර සෘජු වෘත්ත කුහර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි ශීර්ෂයේ සිට $\frac{2}{3}h$ දුරින් පිහිටන බව අනුකලනය මගින් පෙන්වන්න.

(b) අරය $\sqrt{2}a$ හා කේන්ද්‍රයේ $\frac{\pi}{2}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන ඒකාකාර කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයකින් රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට OAB ත්‍රිකෝණාකාර කොටස ඉවත්කළ පසු ඉතිරිවන P ආස්තර කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට එහි සමමිතික අක්ෂය මත $\frac{4a}{3(\pi-2)}$ දුරින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



(c) ආධාරකයේ අරය $\sqrt{2}a$ හා ඇල උස $2a$ වන ඒකාකාර කුහර කේතුවක ඇල උස දිගේ ඉහත P ආස්තරය සම්බන්ධ කිරීමෙන් රූපයේ ආකාරයේ සංයුක්ත වස්තුවක් තනා ඇත. කේතුවේ ස්කන්ධය P ආස්තරයේ ස්කන්ධය මෙන් පස් ගුණයකි. OB හා OA පිළිවෙලින් X හා Y අක්ෂය ලෙස ගෙන සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න. A වලින් මෙම වස්තුව වල්ලු විට OA සිරස සමඟ $\tan^{-1} \left[\frac{5\pi-8}{2(9\pi-19)} \right]$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න.



17. (a) ළමා රෝහලක ඇති වාර්තා විශ්ලේෂණය කිරීමේදී රෝහලේ ප්‍රතිකාර ගන්නා පිරිමි ළමයින් අතරින් කෙනෙක් සසම්භාවීව තෝරාගත් කළ පහත සඳහන් A, B, C සිද්ධි පිළිබඳ සම්භාවිතා කිහිපයක් අනාවරණය විය.

A: ළමයාට ඇදුම රෝගය ඇත

B: ළමයාට අධි රුධිර පීඩනය ඇත

C: ළමයාට දියවැඩියාව ඇත

තවද සිද්ධි අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් ස්වායත්ත බවද $P(B) = 0.3, P(A \cup B) = 0.37$ සහ $P(C) = 0.2$ බවද දී ඇත.

(i) $P(A) = 0.1$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $P(B'/A')$ සොයන්න. A' හා B' යනු පිළිවෙලින් A හා B හි අනුසුරක සිද්ධි වේ.

(iii) තෝරාගත් ළමයා දියවැඩියාව ඇති නමුත් අධි රුධිර පීඩනයවත්, ඇදුම රෝගයවත් නැතිවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(iv) තෝරාගත් ළමයා ඉහත සඳහන් රෝගී තත්ත්ව වලින් වකකින් පමණක් පෙළෙන බව දී ඇත්නම්, වය ඇදුම රෝගය වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) ආයතනයක සේවකයින් 120 දෙනෙකු සේවයට පැමිණීම සඳහා ගමන් කරන දුර ආසන්න කිලෝමීටරයට පහත සටහනේ දැක්වේ.

දුර	සේවකයින් සංඛ්‍යාව
0 -10	10
10-20	19
20-30	43
30-40	25
40-50	8
50-60	6
60-70	5
70-80	3
80-90	1

(i) $y_i = \frac{1}{10}(x_i - 45)$ යන පරිණාමනය භාවිතයෙන් ඉහත ව්‍යස්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය නිමානය කරන්න.

(ii) කි.මී. 50 කට වඩා දුර සිට පැමිණෙන සේවකයින්ව, ඔවුනට වඩා ආසන්න ආයතනයේ වෙනත් ශාඛාවලට මාරු කිරීමට ආයතනය තීරණය කරයි. මාරු කිරීම් සිදුකළ පසු ඉතිරි වන සේවකයින් සේවයට පැමිණීම සඳහා ගමන් කරන දුරෙහි අන්තර් වතුර්ථක පරාසය නිමානය කරන්න.