අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2015

සංයුක්ත ගණිතය I

පැය තුනයි

A කොටස

ප්‍රශ්න සියල්ලට ම දී ඇති හිස්තැන් මත පිළිතුරු සපයන්න.

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු ම n ධන නිඛිල සඳහා $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{pmatrix}$ බව සාධනය කරන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. ද්විපද ප්‍රසාරණය පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන්, $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^4 + \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^4$ සුළු කරන්න.
ඒ නයින්, $n < \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^4 < n+1$ වන පරිදි n නිඛිලය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

[2 වන පිටුව බලන්න

3. $(3-2i)(7-5i)$ යන්න $x+iy$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ වේ.
ඒ නයින්, $11+29i$ හි සාධක දෙකක් අපෝහනය කර, 11^2+29^2 යන්න ධන නිඛිල දෙකක ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{(2x-\pi)\cos x}{2\cos^2 x-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2 \sin x} = -2$ බව පෙන්වන්න.

PAPERMASTER.LK

5. $\dfrac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ සොයා, ඒ නයින් $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+4}}\,dx$ ලබාගන්න. මෙහි $a\in\mathbb{R}$ වේ.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. වක්‍රයක් $x=t(1-t)^2, y=t^2(1-t)$ යන සමීකරණ මගින් දී තිබේ. මෙහි t යනු තාත්වික පරාමිතියකි. $T\neq 1, \frac{1}{3}$ වන $\left(T(1-T)^2, T^2(1-T)\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී මෙම වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $\dfrac{T(2-3T)}{(1-T)(1-3T)}$ ලෙස ගෙන, $t=\dfrac{1}{2}$ වන ලක්ෂ්‍යයේදී මෙම වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $4x+4y-1=0$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, මෙම වක්‍රය සම්පූර්ණයෙන්ම ඉහත ස්පර්ශකයේ එකම පැත්තක පිහිටන බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

7. ABC ත්‍රිකෝණයක AB, BC සහ CA පාදවල සමීකරණ පිළිවෙළින් $3x + 4y + 5 = 0$, $3x - 4y + 1 = 0$ සහ $5y - 2 = 0$ වේ. $A\hat{B}C$ යේ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ සොයා, අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදකයත් බාහිර කෝණ සමච්ඡේදකයත් වෙන්කර දක්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. a, b, c නියත වන $ax^2 + 2y^2 + bxy + x + 4y + 2c = 0$ සමීකරණය මගින් වෘත්තයක් නිරූපණය වීම සඳහා a සහ b හි අගය සොයා, $c < \dfrac{17}{16}$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.
c හි ධන නිඛිලමය අගය සඳහා ඉහත වෘත්තය, $(x + p)^2 + y^2 = p^2$ වෘත්තය මගින් සමච්ඡේද වේ නම්, p නියතයෙහි අගය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

9. $S_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ සහ $S_2 : x^2 + y^2 - r^2 = 0$ යන වෘත්ත දෙක එකිනෙක ස්පර්ශවීම සඳහා r සොයන්න.
මෙම වෘත්ත දෙක අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වන විට, ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලබාගන්න.

10. ABC ත්‍රිකෝණයක AB, BC, CA පාදවල දිග පිළිවෙළින් $4\,\text{m}, 5\,\text{m}, 6\,\text{m}$ වේ. $\cos C = \frac{3}{4}$ බවත් $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{3}{2}$ බවත් පෙන්වා, එමගින් $\hat{B} = 2\hat{C}$ බව අපෝහනය කරන්න.

PAPERMASTER.LK

[6 වන පිටුව බලන්න

B කොටස

ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) b හා c තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වූ $x^2+bx+c=0$ වර්ගජ සමීකරණයෙහි මූල α හා β යැයි ගනිමු. මූල $p=\alpha+\beta^2$ හා $q=\beta+\alpha^2$ වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.
α හා β අතාත්ත්වික වන විට, $b=-1$ නම් හා නම් ම පමණක් p හා q තාත්ත්වික බවත්, මෙම අවස්ථාවේදී $p=q=1-c$ බවත් පෙන්වන්න.

(b) සියලු තාත්ත්වික x සඳහා $0 \le \dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1} \le 4$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $y=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ හි දළ සටහන අඳින්න.

(c) x^2+kx+1 ප්‍රකාශනය x^4-12x^2+8x+3 හි සාධකයක් වීම සඳහා k ට තිබිය හැකි අගය සොයා, ඒ නයින්, $x^4-12x^2+8x+3=0$ සමීකරණය විසඳන්න.

12. (a) රුපියල් 18ක් එක් ළමයකුට අඩුම තරමින් රුපියල් තුනක්වත් ලැබෙන සේ, ළමයින් පස් දෙනකුට රුපියලේ නිබිලමය ගුණාකාර ලෙස ලබා දිය හැකි ආකාර ගණන 35ක් වන බව පෙන්වන්න.

(b) එකම රූපයක $y=|x-a|$ හා $y=b|x-1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. මෙහි $a>b>0$ සහ $b\ne 1$ වේ.
ඒ නයින්, $b|x-1|>|x-a|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි තාත්ත්වික අගය කුලකය $\{x:3<x<7\}$ නම්, a සහ b හි අගය සොයන්න.

(c) $r\in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r=\dfrac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ යැයි ගනිමු.

$r\in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r=\lambda\big(f(r)-f(r+1)\big)+\mu\big(f(r+1)-f(r+2)\big)$ වන පරිදි $f(r)$ සහ λ, μ නියත සොයන්න.

$n\in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}u_r=\dfrac{5}{6}-\dfrac{3n+5}{(n+2)(n+3)}$ බව පෙන්වන්න.
$\sum_{r=1}^{\infty}u_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, $\dfrac{1}{6}\le\dfrac{5}{6}-\dfrac{3n+5}{(n+2)(n+3)}<\dfrac{5}{6}$ බව ද අපෝහනය කරන්න.

13. (a) $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 6 & -2\end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. $\det(\mathbf{P}-\lambda\mathbf{I})=0$ වන පරිදි λ සඳහා වූ තාත්ත්වික ප්‍රභින්න අගය දෙක සොයන්න. මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2×2 වූ ඒකක න්‍යාසයයි.

λ හි එක් එක් අගය සඳහා $\mathbf{PX}=\lambda\mathbf{X}$ සපුරාලන්නා වූ $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ තීර න්‍යාසය සොයන්න.

(b) ආගන්ඩ් සටහනක $A_1A_2A_3A_4$ චතුරස්‍රයක ශීර්ෂවලින් පිළිවෙළින් z_1, z_2, z_3 සහ z_4 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය වේ.
$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_4}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය සහ විස්තාරය, ජ්‍යාමිතිකව විවරණය කරන්න.

$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_4}$ සංඛ්‍යාව හුදෙක් අතාත්ත්වික වීම සඳහා ජ්‍යාමිතික අවශ්‍යතාව සොයන්න.

PAPERMASTER.LK

$z^2-2z+2=0$ සහ $z^2-2az+b=0$ යන සමීකරණවල මූල ආගන්ඩ් සටහනක පිළිවෙළින් A, B සහ C, D ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය වේ. මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ සහ $a^2 < b$ වේ.

(i) $C\hat{O}D = \frac{\pi}{2}$ නම්, $2a^2 = b$ බව ද,

(ii) O සිට සමදුරින් A, B, C, D ලක්ෂ්‍ය පිහිටයි නම්, $b = 2$ බව ද

(iii) A, B, C, D ලක්ෂ්‍ය, කේන්ද්‍රය O වන සමචතුරස්‍රයක ශීර්ෂ වේ නම්, $a = -1$ සහ $b = 2$ බව ද පෙන්වන්න.

මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි.

(c) z විචල්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආගන්ඩ් සටහනෙහි P ලක්ෂ්‍යයෙන් නිරූපණය වේ. $\arg[(z+i)i] = \frac{2\pi}{3}$ නම්, P ලක්ෂ්‍යයේ පථය සොයන්න.
$|z|$ හි අඩුතම අගය සහ $|z|$ හි අඩුතම අගයට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙන් නිරූපිත සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

14. (a) $f(x) = \frac{3-4x}{x^2+1}$ ලෙස ගනිමු. මෙහි $x \in \mathbb{R}$ වේ. පළමුවන ව්‍යුත්පන්නය පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන් f ශ්‍රිතයට හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ඇති බව පෙන්වා, $y = f(x)$ හි දළ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
එම ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $y = |f|(x)$ හි දළ ප්‍රස්තාරය වෙනත් xy - තලයක අඳින්න.
ඒ නයින්, $|3-4x|e^x - x^2 - 1 = 0$ සමීකරණයට අඩුම වශයෙන් තාත්ත්වික මූල තුනක්වත් ඇති බව පෙන්වන්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයක $AB = AC$ වේ. එහි පරිමිතිය $2s$ වේ. මෙහි s නියතයකි. මෙම ත්‍රිකෝණය BC වටා භ්‍රමණය කළ විට ජනිත වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව උපරිම වන AB හි දිග s ඇසුරෙන් සොයන්න.

15. (a) $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{(x-1)(x+2)}$ යැයි ගනිමු. $f(x) = A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$ වන පරිදි A, B, C නියත සොයන්න.
ඒ නයින්, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ අගයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int e^{2x}\sin 3x\ \mathrm{d}x$ සොයන්න.

(c) (i) $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ ලෙස ගනිමු. $x = \sin\theta$ ආදේශයෙන්

$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$ බව පෙන්වන්න.

තවත් සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන් $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$ බව පෙන්වා
ඒ නයින්, $\mathrm{I} = \frac{\pi}{4}$ බව ද පෙන්වන්න.

(ii) $\{(x, y): x^2 \le y \le |x|\}$ මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

PAPERMASTER.LK

16. (a) ABC ත්‍රිකෝණයක AB, BC, CA පාදවල සමීකරණ පිළිවෙළින් $x-2y+2=0$, $x-y-1=0$, $2x-y-1=0$ වේ. BC ට ලම්බව A හරහා යන රේඛාවත්, AC ට සමාන්තරව B හරහා යන රේඛාවත් D හිදී හමුවේ. AD හා BD රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.
$ABDC$ රොම්බසයක් වන බව පෙන්වන්න.

(b) කේන්ද්‍රය C_1 ද අරය r_1 ද වන වෘත්තය සහ කේන්ද්‍රය C_2 ද අරය r_2 ද වන වෘත්තය එකිනෙක ඡේදනය වීම සඳහා අවශ්‍යතාව ප්‍රකාශ කරන්න.
$S_1 : x^2+y^2+6x+2fy=0$ සහ $S_2 : x^2+y^2-2y-3=0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ. $f=\dfrac{3}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$S_1=0$ සහ $S_2=0$ වෘත්ත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක් $S_1+\lambda S_2=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි λ පරාමිතියකි.
ඒ නයින්,
(i) $S_1=0$ සහ $S_2=0$ වෘත්ත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය සහ $(-2,2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්තයේ සමීකරණය ලබාගන්න.
(ii) $S_1=0$ සහ $S_2=0$ වෘත්ත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන කුඩාම වෘත්තයේ සමීකරණය ලබාගන්න.

17. (a) ABC ත්‍රිකෝණයක $\cos A+\cos B+\cos C=\dfrac{3}{2}$ වේ. $\cos\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{\left[1-2\sin\dfrac{A}{2}\right]^2}{4\sin\dfrac{A}{2}}+1$ බව පෙන්වා,
ඒ නයින්, ABC ත්‍රිකෝණය සමපාද වන බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $f(\theta)\equiv 3\cos^2\theta+10\sin\theta\cos\theta+27\sin^2\theta$ යන්න $a+b\cos(2\theta+\alpha)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a,b නියත වන අතර α යනු θ ගෙන් ස්වායත්ත සුළු කෝණයකි.
$[0,\pi]$ ප්‍රාන්තරය තුළ $y=f(\theta)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහන අඳින්න.
$f(\theta)-k=0$ සමීකරණයට
(i) එක් විසඳුමක් පමණක් ඇත්තේ
(ii) විසඳුම් දෙකක් ඇත්තේ
(iii) විසඳුම් තුනක් ඇත්තේ
(iv) විසඳුම් නොමැත්තේ
k කවර ප්‍රාන්තර තුළ පිහිටන විට දැයි ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, නිර්ණය කරන්න.

(c) $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sin^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$ සමීකරණය විසඳන්න.

***

PAPERMASTER.LK

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2015

සංයුක්ත ගණිතය II | පැය තුනයි

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.

A කොටස

ප්‍රශ්න **සියල්ලට** ම දී ඇති හිස්තැන් මත පිළිතුරු සපයන්න.

1. ඒකාකාර ප්‍රවේගයකින් ගමන් කරන බෝට්ටුවක්, එක්තරා මොහොතකදී ඒකාකාර ප්‍රවේගයකින් ගමන් කරන නැවකට $24\,\text{km}$ ක් නැගෙනහිරින් ද ඊට හරියටම පැය දෙකකට පසු එම නැවට $7\,\text{km}$ ක් දකුණින් ද පිහිටයි.
   (i) නැවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවේ ප්‍රවේගය සොයා, නැව හා බෝට්ටුව අතර කෙටිම දුර ගණනය කරන්න.
   (ii) නැව $13\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් උතුරින් නැගෙනහිරට $\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ ක කෝණයක් සාදන දිශාවට ගමන් කරයි නම්, බෝට්ටුවේ සැබෑ ප්‍රවේගය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයක $AB = 4a$ ද $BC = 3a$ ද වේ. ස්කන්ධ m බැගින් වන අංශු හතරක් සෘජුකෝණාස්‍රයේ ශීර්ෂවල නිසල ව තබා AB, BC, CD, DA සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු හතරක් මගින් සම්බන්ධ කර ඇත. සියලුම තන්තු ඇදී පවතී. A අංශුවට CA දිශාවට I ආවේගයක් ලබාදුන් විට, එක් එක් අංශුව චලිතය අරඹන ප්‍රවේග සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

[2 වන පිටුව බලන්න

3. තිරස් මාර්ගයක $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ උපරිම ප්‍රවේගයෙන් පාපැදියක් පැද යා හැකි ළමයකුට එම පාපැදිය තිරසට $30°$ක් ආනත මාර්ගයක ඉහළට $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ උපරිම ප්‍රවේගයෙන් පැද යා හැකිය. ඔහු එම ආනත මාර්ගයේ පහළට $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ප්‍රවේගයෙන් පාපැදිය පැදයන මොහොතේදී පාපැදියේ ත්වරණය කුමක් ද?

පාපැදියේ හා ළමයාගේ මුළු ස්කන්ධය $95\,\mathrm{kg}$ යැයි ද ළමයා එකම ජවයකින් පාපැදිය පැද යන්නේ යැයි ද චලිතයට ප්‍රතිරෝධය ප්‍රවේගයේ වර්ගයට සමානුපාතික යැයි ද $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ යැයි ද සලකන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $-10\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ හා $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ වන A හා B ලක්ෂ්‍යවලින් එකවිට චලිත අරඹන P හා Q අංශු දෙකක් පිළිවෙළින් $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ සහ $\mathbf{v}$ නියත ප්‍රවේගවලින් ගමන් කරයි. $\mathbf{v}$ ප්‍රවේගය $-2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ට සමාන්තර වේ. P හා Q අංශු එකිනෙක ගැටේ නම්, ගැටුමට ගතවන කාලය සොයා, $|\mathbf{v}| = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ යනු එකිනෙකට ලම්බ ඒකක දෛශික වේ.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

5. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ හා $OA \perp OB$ නම් $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{2}{5}|\mathbf{b}|^2 - \frac{3}{5}|\mathbf{a}|^2$ බව පෙන්වන්න.
$|\mathbf{a}| = 2$ හා $|\mathbf{b}| = 1$ නම් **a** හා **b** අතර කෝණය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. එකිනෙකට සමාන්තර නොවන ඒක තල බල තුනකින් පමණක් යුත් බල පද්ධතියක් සමතුලිත වීම සඳහා අනිවාර්ය අවශ්‍යතාව ප්‍රකාශ කරන්න.
රළු තිරස් තලයක් මත අක්ෂය තිරස්ව තබා ඇති ඒකාකාර සිලින්ඩරයක වක්‍ර පෘෂ්ඨයට ස්පර්ශව එහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් තලයක බර දණ්ඩක් සමතුලිතව තබා ඇත්තේ දණ්ඩේ කෙළවරක් තිරස් තලය සමග ස්පර්ශ වන පරිදි ය. දණ්ඩ සහ සිලින්ඩරය අතර ස්පර්ශය රළුය. දණ්ඩ තිරසට θ කෝණයකින් ආනත නම් ද දණ්ඩ හා සිලින්ඩරය අතර ඝර්ෂණ කෝණය λ නම් ද $\lambda \geq \frac{\theta}{2}$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

7. A, B, C යන ළමුන් තිදෙනකු ස්වායත්ත ලෙස නිවැරදිව ගැටළුවක් විසඳීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙළින් $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ සහ $\frac{1}{3}$ වේ. මෙම ළමයින් දෙදෙනකුට පමණක් ස්වායත්ත ලෙස ගැටලුව නිවැරදිව විසඳීමට හැකිවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. එක්තරා මල් වර්ගයක ඇටයකින් රෝස පැහැති මල් සහිත පැළයක් හට ගැනීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{6}$ වේ. යටත් පිරිසයෙන් රෝස පැහැති මල් සහිත එක් පැළයක්වත් හට ගැනීමේ සම්භාවිතාව 0.98ට වැඩිවීම සඳහා වැපිරිය යුතු අවම ඇට සංඛ්‍යාව සොයන්න.
($\frac{\ln(0.02)}{\ln\left(5/6\right)} = 21.46$ ලෙස ගන්න.)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

9. 2004, 2008, 2000, 2008, 1996, 1992, 2000, 2008, 2008 සහ 2000 යන නිරීක්ෂණ එක එකක් $2000 - 4x$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කිරීමෙන් ලැබෙන x හි අගයවල මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය සොයන්න.

ඒ නයින්, දී තිබෙන නිරීක්ෂණවල මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. සිසුන් 20 දෙනකු සංයුක්ත ගණිත ප්‍රශ්න පත්‍රයකට ලබාගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය 40 වේ. සිසුන් ලබාගත් අඩුම ලකුණු හයෙහි මධ්‍යන්‍යය 25 වේ. සිසුන් ලබාගත් වැඩිම ලකුණු හය 70, 71, 72, 74, 75 සහ 78 වේ.

(i) ඉතිරි ළමුන් අට දෙනාගේ ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය ද

(ii) සියලුම ලකුණුවල තෙවන චතුර්ථකය ද

සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

[6 වන පිටුව බලන්න

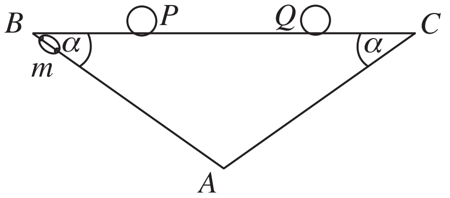
B කොටස

ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) ඔසොවනයක් (Elevator) කාලය $t = 0$ විට නිසලතාවයෙන් චලිතය අරඹා සිරස් ලෙස ඉහළට a ඒකාකාර ත්වරණයකින් චලනය වේ. ඔසොවනයෙහි සිටින මිනිසෙක් කාලය $t = t_0$ විට P අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ සීරුවෙන් මුදා හරී. P අංශුව එහි උපරිම උසට ළඟා වූ මොහොතේ Q නම් දෙවන අංශුවක් ද ගුරුත්වය යටතේ මුදා හරී. ඔසොවනයේත්, P හා Q අංශු දෙකේත් චලිත සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එකම රූපයක අඳින්න.
එමගින්, Q ක්ෂණික නිසලතාවයට එළඹෙන විට P හි ප්‍රවේගය $at_0\left(\frac{a}{g}+1\right)$ බව පෙන්වන්න.

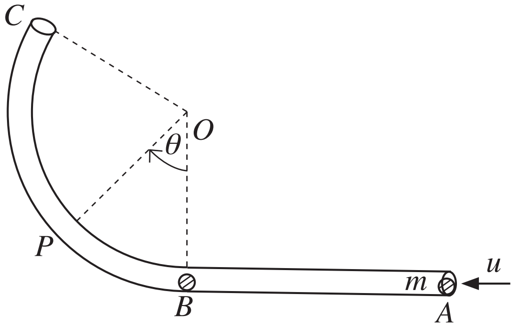
(b) A හා B යනු O හිදී හමුවන ඍජු මාර්ග දෙකක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. $A\hat{O}B = \alpha$ වන අතර $OA = a\,\text{km}$ සහ $OB = b\,\text{km}$ වේ. X හා Y යන O දෙසට ගමන් කරන මෝටර් රථ දෙකක් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙක පසු කරනුයේ $20\,\text{km h}^{-1}$ හා $40\,\text{km h}^{-1}$ වේගවලින් හා $5\,\text{km h}^{-2}$ හා $10\,\text{km h}^{-2}$ ත්වරණවලිනි. ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ සහ ත්වරණ ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන් X ට සාපේක්ෂව Y හි පථය සරල රේඛාවක් බව පෙන්වන්න.
$a = b = 10$ සහ $\alpha = 60°$ නම් X සහ Y අතර කෙටිතම දුර $5\,\text{km}$ බව ද පෙන්වන්න.

(c) රූපයේ පරිදි ස්කන්ධය M වන ABC, ඒකාකාර සමද්විපාද ත්‍රිකෝණාකාර රාමුවක BC පාදය එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි P, Q අචල සුමට මුදු දෙකක් දිගේ නිදහසේ සර්පණය විය හැකි සේ සිරස් තලයක තබා ඇත. $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$ වේ. ස්කන්ධය m වන සුමට පබළුවක් BA දිගේ නිදහසේ සර්පණය විය හැකි පරිදි B හි නිසලව තබා, පද්ධතිය සීරුවෙන් මුදාහරිනු ලැබේ.



අනතුරුව ඇතිවන චලිතයේදී රාමුවේ ත්වරණයේ විශාලත්වය $\frac{mg\sin 2\alpha}{2(M + m\sin^2\alpha)}$ බව පෙන්වා, පබළුව මත ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{Mmg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$ බව ද පෙන්වන්න.

12. (a) හරස්කඩ සමාන සුමට AB ඍජු නළයක් හා අරය a වන වෘත්තාකාර නළයකින් කේන්ද්‍රයේ ආපාතිත කෝණය $\frac{2\pi}{3}$ වන BC කොටසක් රූපයේ දැක්වෙන සේ එකිනෙක සම්බන්ධ කර ඇත. මෙම සංයුක්ත නළය AB තිරස් තලයක පිහිටන පරිදි සිරස් තලයක අචලව සවි කර, නළය තුළ A ලක්ෂ්‍යයෙහි ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ද B ලක්ෂ්‍යයෙහි ස්කන්ධය $2m$ වූ අංශුවක් ද තබා, ස්කන්ධය m වන අංශුවට නළය තුළට තිරස් u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ. අංශු දෙක ගැටී හාවෙයි.



(i) ගැටුමට පසු ස්කන්ධය $3m$ වන සංයුත අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න.
(ii) OP යටි අත් සිරසට θ කෝණයක් ආනත වන P පිහිටීමකදී සංයුත අංශුවේ ප්‍රවේගය ද සංයුත අංශුව සහ නළය අතර ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.
සංයුත අංශුව නළය තුළින් ගමන් කර C කෙළවරින් ඉවත් වේ නම්,
(iii) $u > 3\sqrt{3ag}$ බව
(iv) $AB = \sqrt{3}\,a$ නම් සහ C කෙළවරින් ඉවත්වන ස්කන්ධය $3m$ වන සංයුත අංශුව A හි පතිත වේ නම් එවිට $u = \frac{3}{2}\sqrt{21ag}$ බව පෙන්වන්න.

(b) සුමට තිරස් මේසයක් මත u වේගයෙන් ගමන් කරන ස්කන්ධය m වන සුමට ගෝලයක් නිසලව ඇති සමාන අරයකින් යුත් එහෙත් ස්කන්ධය M වන ගෝලයක් සමග සරලව ගැටේ. ගැටුමේදී චාලක ශක්තියෙන් හරි අඩක් හානි වේ නම්, $e < \frac{1}{\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි e යනු ගෝල දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය වේ.

PAPERMASTER.LK

13. ස්වභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $2mg$ වන ලුහු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක දෙකෙළවරට ස්කන්ධ පිළිවෙළින් M හා m වන A හා B අංශු දෙකක් ඈඳා තන්තුව ඇදී පවතින සේ රළු තිරස් මේසයක් මත නිසලව තබා ඇත. මේසය හා එක් එක් අංශුව අතර සර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. B අංශුවට A ගෙන් ඉවතට මේසය දිගේ $\sqrt{ga}$ ප්‍රවේගයක් ලබා දුන් විට, A අංශුව නිසලව පවතී යැයි උපකල්පනය කර, තන්තුවේ විතතිය x වන විට B අංශුවේ චලිතය, $\ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x + \frac{a}{4}\right)$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණයට $x + \frac{a}{4} = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ආකාරයේ විසඳුමක් පවතී යැයි උපකල්පනය කර, α, β හා ω සොයන්න.

එමගින්, තන්තුවේ උපරිම විතතිය $\frac{a}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$M \geq 2m$ වන බව ද පෙන්වන්න.

B අංශුවේ ආපසු චලිතය $\ddot{y} = -\frac{2g}{a}\left(y - \frac{a}{4}\right)$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි y යනු තන්තුවේ විතතියයි.

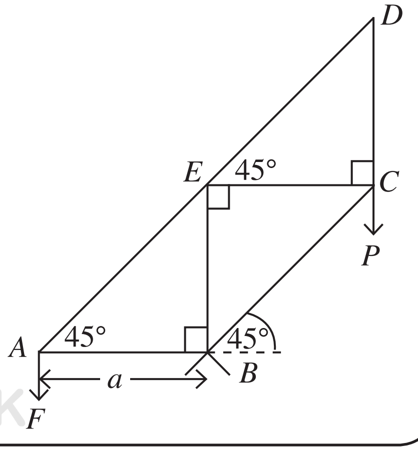
මෙම සමීකරණයේ විසඳුම $y = \frac{a}{4}\left[1 + \cos\sqrt{\frac{2g}{a}}t\right]$ යැයි උපකල්පනය කර, $\left[\pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{a}{2g}}$ කාලයකට පසු B අංශුව ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණ නියත වශයෙන්ම නිසලතාවයට පත්වන බව පෙන්වන්න.

14. (a) O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකෙහි පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ වේ. $OE : EA = 3 : 4$ වන පරිදි OA මත E ලක්ෂ්‍යය ද $OD : DB = 5 : 2$ වන ලෙස OB මත D ලක්ෂ්‍යය ද පිහිටයි. AD හා BE රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය G නම් $\overline{OG} = \mathbf{b} + \lambda\left(\frac{3}{7}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ නියතයකි. $\overline{OG}$ සඳහා තවත් මෙවැනිම ප්‍රකාශනයක් ලබාගෙන, G ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් සොයන්න.

(b) $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ $AB = 4a$ හා $BC = 3a$ වේ. AB, BC, CD, DA, AC, BD දිගේ එහි අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් $3\mathbf{P}, 4\mathbf{P}, 2\mathbf{P}, \mathbf{P}, \lambda\mathbf{P}$ සහ $\mu\mathbf{P}$ බල ක්‍රියාකරයි.
මෙම බල පද්ධතිය,
(i) යුග්මයකට තුල්‍ය වන විට
(ii) B හරහා AC ට සමාන්තර බලයකට තුල්‍ය වන විට,
λ හිත් μ හිත් අගය සොයන්න.
පද්ධතිය සමතුලිත වන පරිදි λ හා μ සඳහා කිසිදු අගය නොපවතින බව ද පෙන්වන්න.

15. (a) එකිනෙකෙහි දිග $2a$ සහ බර w වූ ඒකාකාර සමාන දඬු පහක් කෙළවරවලින් සුවලව අසව් කිරීමෙන් $ABCDE$ සවිධි පංචාස්‍ර රාමුවක් සාදා ඇත. පංචාස්‍රයේ CD පාදය තිරස් තලයක් සමග ස්පර්ශ වෙමින් සිරස් තලයක තබා ඇත. පංචාස්‍රයේ හැඩය රඳවා ගනු ලබන්නේ BC සහ DE දඬුවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන තන්තුවක් මගිනි. A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{w}{2}\cot\frac{\pi}{5}$ බව පෙන්වන්න. තන්තුවේ ආතතිය ද සොයන්න.

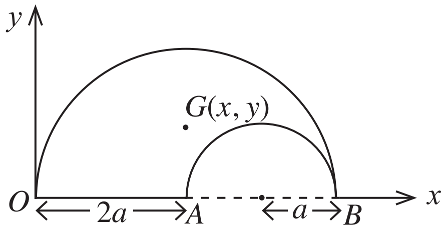
(b) රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල AB, BC, CD, DE, EA, BE සහ EC සැහැල්ලු දඬු හතකින් සමන්විත වේ. සැකිල්ල C හිදී නිව්ටන් P සිරස් බලයක් ද, A හිදී F සිරස් බලයක් ද යොදා B සුමට ආධාරකය මත සමතුලිතව තබා ඇත. F බලය P ඇසුරෙන් සොයන්න.
බෝ අංකනය යෙදීමෙන් ප්‍රත්‍යාබල රූපසටහනක් ඇඳ, එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය සහ B හිදී ආධාරකය මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.



PAPERMASTER.LK

16. අරය a වන අර්ධ වෘත්තාකාර ඒකාකාර සිහින් කම්බියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, O කේන්ද්‍රයේ සිට $\dfrac{2a}{\pi}$ දුරකින් වන බව අනුකලනය මගින් පෙන්වන්න.

රූපයේ දක්වා ඇති රාමුව ඒකාකාර සිහින් කම්බියක් නවා ගැනීමෙන් සාදාගන්නා ලද්දකි. රාමුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය $G(x, y)$ නම් x, y සොයන්න.
රාමුව O ගෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇති විට OA සිරසට ආනත කෝණය θ නම් $\tan\theta = \dfrac{10}{7\pi + 2}$ බව පෙන්වන්න.



රාමුව O ගෙන් එල්ලා ඇති විට P තිරස් බලයක් රාමුවේ තලයේ B හිදී යෙදීමෙන්, රාමුව OA දාරය සිරස්ව තබාගනී. රාමුවේ බර w නම්, w ඇසුරෙන් P හි අගය සොයන්න.

රාමුව O ගෙන් එල්ලීම වෙනුවට එහි වක්‍ර දාරය තිරස් තලයක් ස්පර්ශ වන ලෙස සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්නම්, OA තිරසට ආනත කෝණය සොයන්න.

17. (a) A සහ B යනු සසම්භාවී සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. $P(B) > 0$ වන විට $P(A|B)$ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව අර්ථ දක්වන්න.
A_1, A_2, A_3 සසම්භාවී සිද්ධි තුනක් සඳහා, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).\, P(A_2|A_1).\, P(A_3|A_1 \cap A_2)$ බව පෙන්වන්න.
ක්‍රීඩා සමාජයක සාමාජිකයන්ගෙන් $\frac{3}{4}$ක් වැඩිහිටියන් වන අතර, ඉතිරි අය ළමයින් වේ. වැඩිහිටියන්ගෙන් $\frac{3}{4}$ක් හා ළමයින්ගෙන් $\frac{3}{5}$ක් පිරිමි වේ. වැඩිහිටි පිරිමින්ගෙන් හරි අඩක් ද වැඩිහිටි ගැහැනුන්ගෙන් $\frac{1}{3}$ක් ද පිරිමි ළමයින්ගෙන් $\frac{4}{5}$ක් ද ගැහැනු ළමයින්ගෙන් $\frac{4}{5}$ක් ද පිහිනුම් තටාකය භාවිත කරති. මෙම ක්‍රීඩා සමාජයේ සාමාජිකයන් අතුරෙන් සසම්භාවීව තෝරා ගනු ලබන අයකු,

(i) පිහිනුම් තටාකය භාවිත කරන්නකු වීමේ සම්භාවිතාව,
(ii) පිහිනුම් තටාකය භාවිත කරන්නකු යැයි දී ඇති විට එම සාමාජිකයා පිරිමි අයකු වීමේ සම්භාවිතාව,
(iii) පිහිනුම් තටාකය භාවිත නොකරන්නකු යැයි දී ඇති විට එම සාමාජිකයා ගැහැනු අයකු හෝ වැඩිහිටියකු හෝ වීමේ සම්භාවිතාව,

සොයන්න.

(b) එක්තරා පරීක්ෂණයකට පෙනී සිටි සිසුන් 100 දෙනකු ලබාගන්නා ලද ලකුණුවල සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක පන්ති ලකුණ හා එක් එක් පන්ති ලකුණට අදාළ සංඛ්‍යාතය පහත වගුවේ දැක්වේ.

පන්ති ලකුණ	සංඛ්‍යාතය
24.5	1
34.5	9
44.5	35
54.5	40
64.5	12
74.5	3

(i) සුදුසු කේතන ක්‍රමයක් භාවිතයෙන්, මෙම ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය 50.7 බවත්, මාතය 51.02 බවත්, සම්මත අපගමනය 9.46 බවත් පෙන්වන්න.
(ii) ඉහත ව්‍යාප්තියේ ඇතුළත් කළ එක් එක් ලකුණ, සැබෑ ලකුණට වඩා ලකුණු 3කින් වැඩි බව පසුව සොයාගන්නා ලදී. සැබෑ ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, මාතය සහ සම්මත අපගමනය සොයන්න.
(iii) තවත් සිසුන් 50 දෙනකුගේ ලකුණුවල සත්‍ය මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් 55 හා 2.5 වේ නම්, එකලස් කළ ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය සොයන්න.

PAPERMASTER.LK

***