க.பொ.த. (உ.த.) உதவிக் கருத்தரங்கு - 2016

இணைந்த கணிதம் I	மூன்று மணித்தியாலம்

அறிவுறுத்தல்கள் :

* பகுதி **A** இல் **எல்லா** வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக.
* பகுதி **B** இல் **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

பகுதி A

1. எல்லா நேர் நிறையெண்கள் n இற்கும் கோவை $4^n + 15n - 1$ ஆனது 9 இனால் வகுபடுமெனக் கணிதத் தொகுத்தறிவின் மூலம் நிறுவுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. $\left(\sqrt{2} + 7^{\frac{1}{5}}\right)^{10}$ இன் விரியின் r ஆவது உறுப்பு T_r ஐ எழுதி அவ்விரியின் விகிதமுறும் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

3. 8 ஆண் பிள்ளைகளிலிருந்தும் 6 பெண் பிள்ளைகளிலிருந்தும் இரு பாலானவர்களையும் வகைகுறிக்குமாறு 5 பிள்ளைகளைக் கொண்ட ஒரு குழு தெரிந்தெடுக்கப்படத்தக்க விதங்களின் எண்ணிக்கை யாது?

4. ஆகண் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி $\text{Arg}\,Z = \frac{\pi}{4}$ ஆகவும் $\text{Arg}\,(Z-3) = \frac{\pi}{2}$ ஆகவும் இருக்குமாறு உள்ள சிக்கலெண் $Z = Z_0$ ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளியைப் பெற்று $\text{Arg}(Z_0 - 6i)$ ஐக் காண்க.

PAPERMASTER.LK

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+kx)^2 - (1-kx)^2}{\sqrt{1+k^2x} - \sqrt{1-k^2x}} = 1$ ஆக இருக்குமாறு பூச்சியமல்லாத மெய்ம் மாறிலி k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. $y = (x-2)^2$, $y = 4 - 2x$ என்னும் சார்புகளின் வரைபுகளை ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைக. அவ்வரைபுகளினால் உள்ளடைக்கப்பட்ட பரப்பளவு $\dfrac{4}{3}$ சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

7. $x = t^2,\ y = at^3 - t^2$ என்னும் சமன்பாடுகளினால் ஒரு வளையி வரையறுக்கப்படுகின்றது; இங்கு $a \in R^+$. வளையி மீது $t = 1, t = -1$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடலிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனின், a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

8. $A = (2, -1),\ B = (4, -3)$ எனக் கொள்வோம். AB இன் செங்குத்து இருகூறாக்கி மீது $C = (3t, -t)$, $t \in R$ உள்ளது. t இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, $ACBD$ ஒரு சாய்சதுரமாக இருக்குமாறு புள்ளி D இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

PAPERMASTER.LK

[பக். 5 ஐப் பார்க்க

9. ஆள்கூற்று அச்சுகளைத் தொட்டுக்கொண்டு கோடு $3x - 4y + 12 = 0$ ஐயும் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = \cot\alpha$ எனக் காட்டுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

[பக். 6 ஐப் பார்க்க

பகுதி B

11. (a) இருபடிச் சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$ இற்குப் பொருந்தும் மூலங்கள் இருப்பதற்கான நிபந்தனையை a, b, c ஆகியவற்றின் சார்பிற் காண்க.

சமன்பாடு $\dfrac{a}{x+c} + \dfrac{b}{x-c} = \dfrac{k}{2x}$ ஐ இருபடிச் சமன்பாடாக எடுத்துரைக்க. அச்சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தும் மூலங்கள் இருக்குமாறு உள்ள k இன் பெறுமானங்கள் k_1, k_2 எனின், $|k_1 - k_2| = 4\sqrt{ab}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $c \neq 0$.

(b) $f(x) = x^2 + 6x + 20 + \lambda(x^2 - 3x - 12), x \in R$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு λ ஒரு பரமானம்.

(i) $f(x)$ ஓர் ஏகபரிமாணப் பல்லுறுப்பியாக இருக்குமாறு λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) சமன்பாடு $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் பருமனில் சமமாகவும் குறியில் எதிராகவும் இருப்பின், λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) $f(x)$ ஓர் இருபடிப் பல்லுறுப்பி எனக் கொண்டு அது வடிவம் $f(x) = h - b(x - a)^2$ ஆக இருக்குமாறு a, b, h ஆகிய உறுப்புகளை λ இன் சார்பிற் காண்க.

$f(x)$ இற்கு $x = 2$ இல் ஒரு மிகப் பெரிய பெறுமானம் இருப்பின், λ இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, $f(x)$ இன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தையும் காண்க.

12. (a) l, k என்னும் மெய் நேர் மாறிலிகளுக்குச் சமனிலி $|l - 5x| < |kx - 3|$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் மெய்ப் பெறுமானத் தொடை $\{x \mid -2 < x < 4/9\}$ ஆகும். ஒரே உருவில் $y = |l - 5x|$, $y = |kx - 3|$ என்னும் வரைபுகளின் பரும்படி வரிப்படங்களை வரைந்து l, k ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) ஒரு முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ இன் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $\dfrac{3n}{2n+1}$; $n = 1,2,3 \ldots$. இம்முடிவில் தொடர் ஒருங்குகின்றதெனக் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. U_r ஐத் துணிந்து, அதிலிருந்து, முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} r^2 U_r$ இன் முடிவில் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $\dfrac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$ எனக் காட்டுக. இத்தொடர் ஒருங்குகின்றதா? உமது விடையை நிறுவுக.

13. (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & p \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம். $p \in R$ ஆகும். தாயம் A இன் ஒரு நேர்மாறு தாயம் உள்ளதாக இருப்பதற்கு p இற்கு இருக்கத்தக்க பெறுமானங்களைக் காண்க.

$A^{-1} = A$ ஆக இருக்குமாறு மாறிலி p யைக் கண்டு, அதிலிருந்து, $BC = 0$ ஆக இருக்குமாறு, வரிசை 2 ஆன பூச்சியமல்லாத B, C ஆகிய இரு தாயங்களைப் பெறுக. 0 ஆனது வரிசை 2 ஆன ஒரு பூச்சியத் தாயம் ஆகும்.

(b) சிக்கலெண் Z இன் உடன்புணரி $\overline{Z}$ இனால் காட்டப்படுகின்றது.

(i) $Z\overline{Z} = |Z|^2$ எனக் காட்டுக.

(ii) Z_1, Z_2 என்பன இரு சிக்கலெண்கள் ஆகும். $\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1}\,\overline{Z_2}$ எனக் காட்டுக.

(iii) Z_1, Z_2 ஆகிய இரு சிக்கலெண்களுக்கும் $\left|\dfrac{\overline{Z_1} - 2\overline{Z_2}}{2 - Z_1\overline{Z_2}}\right| = 1$, $|Z_2| \neq 1$ ஆகும். $|Z_1| = 2$ எனக் காட்டுக.

PAPERMASTER.LK

(c) ஆகண் வரிப்படத்தில் புள்ளி P இனால் சிக்கலெண் Z காட்டப்படுகின்றது. $|Z - 3| < 2$ ஆகவும் $\text{Arg}(Z - 3) = \frac{\pi}{3}$ ஆகவும் இருக்குமாறு P இன் ஒழுக்கை வரைக.

14. (a) $0 < x < \pi$ இற்கு $y = (\sin x)^x$ எனக் கருதி, $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

(b) ஒரு தாங்கியின் கனவளவு 45π கன அலகுகள் ஆக இருக்க வேண்டும் எனவும் அது அடியை உடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளையையும் அதன் திறந்த முனையில் வெளியே நீட்டியிருக்கும் ஓர் அரைக்கோள மூடியையும் கொண்டிருக்க வேண்டும் எனவும் தாங்கியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு குறைந்தபட்சமாக இருக்க வேண்டும் எனவும் தீர்மானிக்கப்பட்டது. உருளையின் உயரம் y அலகுகள் எனவும் அடியின் ஆரை x எனவும் கொண்டு தாங்கியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $A = 3\pi x^2 + 2\pi xy$ (சதுர அலகுகள்) எனவும் $y = \frac{45}{x^2} - \frac{2x}{3}$ (அலகுகள்) எனவும் காட்டுக.

மேலும் A குறைந்தபட்சமாக இருக்கும் y இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(c) $x \neq \pm 1$ இற்கு $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)}$ எனக் கொள்வோம். a, b ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகள் ஆகும். வரைபு $y = f(x)$ இற்கு $(0, 2)$ இல் ஒரு திரும்பற் புள்ளி உண்டெனத் தரப்பட்டுள்ளது. a, b ஆகியவற்றைக் கண்டு $(0, 2)$ ஆனது ஒரே திரும்பற் புள்ளி எனக் காட்டுக. திரும்பற் புள்ளியையும் அணுகுகோடுகளையும் தெளிவாகக் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபின் பரும்படிப் படத்தை வரைக. இதிலிருந்து, $|f|(x)$ இன் வரைபின் ஒரு பரும்படிப் படத்தை வரைக.

15. (a) ஓர் உகந்த பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^1 \frac{1}{(2+x)^{1/2}\,(2-x)^{3/2}}\,dx = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

எனக் காட்டுக.

(b) $G(x) = \frac{1}{(x+2)\,(x^2+8)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களைக் கொண்டு எடுத்துரைக்க.

$g(x) = \frac{1}{12\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{24}\ln\left[\frac{(x+2)^2}{x^2+8}\right] + C$ என்பதை உய்த்தறிக; இங்கு C ஆனது ஓர் எதேச்சை மாறிலியும் g ஆனது $g'(x) = G(x)$ ஆகவுள்ள ஒரு சார்பும் ஆகும்.

(c) $I_n = \int x^n \sin x\,dx$ எனின், $I_n + n(n-1)\,I_{n-2} = x^{n-1}(n\sin x - x\cos x)$ எனக் காட்டுக.

16. (a) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்னும் சமாந்தரமால்லாத நேர்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோண இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$4x + y + 3 = 0$, $x + 4y - 3 = 0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோண இருகூறாக்கிகளின் மீது ஒரு சதுரத்தின் இரு பக்கங்கள் உள்ளன. சதுரத்தின் ஓர் உச்சி $(0, 2)$ ஆகும். அத்தகைய இரு சதுரங்கள் இருக்கின்றன எனக் காட்டி, அவ்விரு சதுரங்களினதும் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(b) வட்டம் $S^1 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ ஆனது வட்டம $S = 0$ ஐ இருகூறிடுகின்றது. புள்ளி $(1, 1)$ ஆனது $S = 0$ மீது இருக்குமெனின், அவ்வட்டத்தின் மையத்தின் ஒழுக்கு ஒரு வட்டம் எனக் காட்டி, அதன் மையத்தையும் ஆரையையும் காண்க.

PAPERMASTER.LK

[பக். 8 ஐப் பார்க்க

17. (a) யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC இற்கு வழக்கமான குறிப்பீட்டில் $a = b\cos C + c\cos B$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ என்பதை உய்த்தறிக.

a, b, c ஆகியன ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் இருக்குமெனின், $\cos A + \cos C + 2\cos B = 2$ என்பதையும் $\cos\left(\dfrac{A - C}{2}\right) = 2\sin\dfrac{B}{2}$ என்பதையும் உய்த்தறிக.

(b) $0 < x,\ y < \dfrac{\pi}{2}$ ஆகவும் $\sin x > \cos y$ ஆகவும் இருப்பின், $x + y > \dfrac{\pi}{2}$ என நிறுவுக.

(c) $f(x) = 3\cos^2 x + 8\sin x\cos x - 3\sin^2 x$ ஐ வடிவம் $f(x) = A\sin(2x + \alpha)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $A > 0$, α ஒரு கூர்ங் கோணம்.

இதிலிருந்து, $f(x) = \dfrac{5}{2}$ இன் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

$-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ இற்கு $y = f(x)$ இன் வரைபின் பருமட்டி வரிப்படத்தை வரைக.

* * *

PAPERMASTER.LK

க.பொ.த. (உ.தரம்) உதவிக் கருத்தரங்கு - 2016

இணைந்த கணிதம் II | **மூன்று மணித்தியாலம்**

அறிவுறுத்தல்கள்

* பகுதி **A** இன் **எல்லா** வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக.
* பகுதி **B** இன் **ஐந்து** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

பகுதி A

1. திணிவு $2m$ வீதம் உள்ள P, Q என்னும் இரு ஓர் துணிக்கைகள் ஓர் இலேசான மீள்தன்மையின்றிய இழையின் இரு நுனிகளுடனும் இணைக்கப்பட்டு, இழை ஓர் ஒப்பமான நிலையான கப்பிக்கு மேலாக அனுப்பப்பட்டுள்ளது. தொகுதி புவியீர்ப்பின் கீழ் சுயாதீனமாகத் தொங்கிக் கொண்டு இழை இறுக்கமாகவும் கப்பியுடன் தொடுகையுறாத இழைப் பகுதிகள் நிலைக்குத்தாகவும் இருக்குமாறு நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. துணிக்கை P இலிருந்து உயரம் h இல் மெதுவாக விடுவிக்கப்பட்ட திணிவு m ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கை P உடன் மோதி இணைந்து செல்லத் தொடங்குகின்றது. தொகுதி, இயங்கத் தொடங்கும் வேகம், அதிர்வு ஆகியவற்றின் விளைவாக இழையில் உண்டாகும் கணத்தாக்கு இழுவையைக் காண்க.

2. ஒரு பம்பியின் மூலம் $4\ \text{m}$ உயரத்திற்கு நீர் கொண்டு செல்லப்பட்டு $8\ \text{m s}^{-1}$ வீதத்தில் வெளியேற்றுகின்றது. குழாயின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு $0.005\ \text{m}^2$ எனின், பம்பியின் வலுவைக் காண்க.

PAPERMASTER.LK

[பக். 2 ஐப் பார்க்க.

3. ஒரு துணிக்கை ஒரு புள்ளி O இலிருந்து வேகம் u இல் கிடையுடன் கோணம் θ இற் சாய்ந்து புவியீர்ப்பின் கீழ் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் எறியப்படுகின்றது. ஒரு நேரம் T இற்குப் பின்னர் அது முதல் எறிகைத் திசைக்குச் செங்குத்தாக இயங்குகின்றது. $\mathbf{v = u + at}$ ஐப் பயன்படுத்தி ஒரு காவி முக்கோணியை வரைவதன் மூலம் $T = \frac{u}{g}\operatorname{cosec}\theta$ எனக் காட்டுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. m, km என்னும் திணிவுகளை உடைய இரு ஒப்பமான சம மீள்தன்மைக் கோளங்கள் முறையே $5u, u$ என்னும் வேகங்களுடன் ஓர் ஒப்பமான கிடைத் தளத்திலே எதிர்த் திசைகளில் சென்று எளிதாக மோதுகின்றன. மோதுகைக்குப் பின்னர் இரு கோளங்களினதும் வேகங்கள் அவற்றின் முதல் வேகத்தின் பருமனில் அரைவாசியாக இருக்கும் அதே வேளை திசையில் எதிரானவை. k இன் பெறுமானம், கோளங்களுக்கிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம், மோதுகை காரணமாக ஒரு கோளத்தின் மீது உண்டாகும் கணத்தாக்கு ஆகியவற்றைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

....

5. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j}$ ஆகும்; இங்கு λ, μ ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகளும் $\mu > 0$ உம் $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ஆகியன வழக்கமான அலகுக் காவிகளும் ஆகும். $|\boldsymbol{b}| = 1$ ஆகவும் **a, b** ஆகிய இரு காவிகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையாகவும் இருப்பின், λ , μ ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. w நிறையுள்ள ஒரு பொருளைக் கிடையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்த ஒரு கரடான தளத்தின் மீது வைத்து உயர்ந்தபட்சச் சரிவுக் கோடு வழியே மட்டுமட்டாக மேல்நோக்கி இயங்கச் செய்வதற்குப் பிரயோகிக்க வேண்டிய மிகச் சிறிய விசையைக் காண்க. பொருளுக்கும் தளத்துக்கும் இடையே உள்ள உராய்வுக் கோணம் λ ஆகும்.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

7. இரு பிள்ளைகள் ஓர் இலக்கிற்குச் சுடுவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ஆகும். இருவருக்கும் ஒரு தடவை வீதம் சுடுவதற்கான வாய்ப்பு வழங்கப்படுகின்றது.

(i) செப்பமாக ஒருவர் மாத்திரம் இலக்கிற்குச் சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு,

(ii) செப்பமாக ஒருவர் மாத்திரம் இலக்கிற்குச் சுடுவாரெனின், அவர் முதலாவதாகச் சுடுபவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

ஆகியவற்றைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. A, B என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகள் பின்வரும் நிபந்தனைகளைத் திருப்தியாக்குமெனின், $P(A|B)$ ஐக் காண்க.

(i) A நிகழும்போது B நிகழாமைக்கான நிகழ்தகவு 0.2 ஆகும்.

(ii) B நிகழும்போது A நிகழாமைக்கான நிகழ்தகவு 0.1 ஆகும்.

(iii) A, B ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழாமைக்கான நிகழ்தகவு 0.6 ஆகும்.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

[பக். 5 ஐப் பார்க்க.

9. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ என்னும் நோக்கல்களின் இடை, நியம விலகல் ஆகியன முறையே $5, 2$ ஆகும். அவற்றைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் நோக்கல்களின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க.

(i) $\{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

(ii) $\{20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$

(iii) $\{2a + b,\ 3a + b,\ 4a + b,\ 5a + b, 6a + b, 7a + b, 8a + b\}$; இங்கு a, b ஆகியன மாறிலிகள்.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. $u_i = \frac{x_i - 35}{a}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு a ஒரு மாறிலி. x இனால் காட்டப்படும் பரம்பலின் இடை 33 ஆகும். u இன் மீடிறன் பரம்பல் கீழே உள்ளது.

u_i	-3	-2	-1	0	1	2
f_i	5	10	25	30	20	10

x இனால் காட்டப்படும் வகுப்பாயிடைகளைக் கண்டு பரம்பலை எழுதுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

PAPERMASTER.LK

....

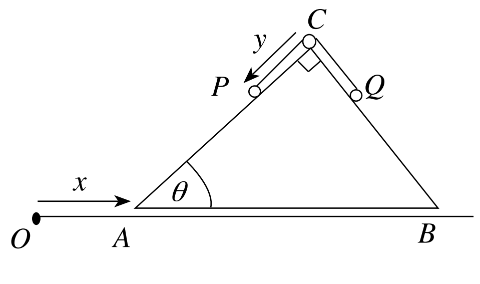
பகுதி B

11. (a) P, Q என்னும் இரு பொருள்கள் முறையே $-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$, $2\mathbf{i}+8\mathbf{j}$ என்னும் தானக் காவிகளைக் கொண்ட A, B என்னும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து $\mathbf{i}+25\mathbf{j}$, $a\mathbf{i}+20\mathbf{j}$ என்னும் தொடக்க வேகங்களுடன் புவியீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றன. அவற்றின் கிடை, நிலைக்குத்து இயக்கங்களுக்கான வேக - நேர வரைபுகளை வரைந்து, அதிலிருந்து, அவை மோதுமெனின் மோதுவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் a இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

(b) ஒரு கப்பல் கிழக்கை நோக்கிச் சீரான கதி u உடன் செல்கின்றது. கப்பலிலிருந்து புறப்படும் ஒரு விமானம் ஒரு தீவுக்குச் சென்று உடனடியாகத் திரும்பிக் கப்பலுக்கு வருகின்றது. விமானம் அதன் மொத்தப் பறப்பு நேரத்தில் கப்பல் தொடர்பாகத் தெற்கிலிருந்து கோணம் α கிழக்கே என்னும் திசையில் உள்ள ஒரு கிடைக் கோட்டுப் பாதையில் சீரான கதி v உடன் செல்கின்றது. விமானத்தின் போகும், திரும்பி வரும் பறப்புகளுக்கு வேக முக்கோணிகளை ஒரே உருவில் வரைக. தீவிலிருந்து தோற்றுகின்றவாறு பறப்பு நேரத்தில் விமானத்தின் வேகத்தின் திசை கோணம் $\pi/2$ இனால் திரும்புமெனின், $v=u$ எனக் காட்டி விமானத்தின் பயணத்திற்கு எடுக்கும் மொத்த நேரம் $\dfrac{2d}{u\cos\alpha}$ எனவும் காட்டுக; இங்கு d ஆனது தீவுக்கும் கப்பல் செல்லும் பாதைக்குமிடையே உள்ள மிகக் குறுகிய தூரம் ஆகும்.

12. (a) உள்ளாரை a ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த பொள் கோளத்தில் ஆகவும் கீழே உள்ள புள்ளியில் வைக்கப்பட்டுள்ள திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை கிடை வேகம் u உடன் எறியப்படுகின்றது. துணிக்கை மையம் O அடங்கியுள்ள நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இயங்குகின்றது; இங்கு $u^2 > 2ag$. இத்துணிக்கை கோளத்தின் மீது இருக்கும் புள்ளி A இல் கோள மேற்பரப்பிலிருந்து வெளியேறுவதாகவும் OA மேன்முக நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கூர்ங்கோணம் α ஆகவும் இருப்பின், $\cos\alpha = \dfrac{u^2-2ag}{3ag}$ எனக் காட்டி, அதிலிருந்து, $u^2 < 5ag$ எனக் காட்டுக.
மேலும் $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ எனத் தரப்பட்டிருப்பின், துணிக்கை மையம் O இனூடாகச் செல்கின்றது எனவும் காட்டுக.

(b)



மேற்குறித்த உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள திணிவு $5m$ ஆகவும் நிலைக்குத்து வெட்டு ACB ஒரு செங்கோண முக்கோணியாகவும் $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ ஆகவும் உள்ள ஆப்பு அடி AB ஓர் ஒப்பமான கிடைத் தளத்தைத் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. திணிவு m 5வீதம் உள்ள P, Q என்னும் இரு துணிக்கைகளைத் தொடுக்கும் ஒரு நீட்டமுடியாத இழை C இல் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு நிலைத்த இலேசான ஒப்பமான சிறிய கப்பிக்கு மேலாக அனுப்பப்பட்டு, அத்துணிக்கைகள் AC, BC ஆகிய ஒப்பமான மேற்பரப்புகளைத் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டு, தொகுதி மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. நேரம் t இற்குப் பின்னர் ஒரு நிலைத்த புள்ளி O இலிருந்து ஆப்புக்கு உள்ள தூரம் x ஆகவும் C இலிருந்து துணிக்கை P இற்கு உள்ள தூரம் y ஆகவும் இருப்பின், ஏகபரிமாண உந்தக் காப்பு விதியையும் சக்திக் காப்பு விதியையும் பயன்படுத்தி,

(i) $\dot{y} = 5\dot{x}$

(ii) $35\dot{x}^2 + 10\dot{y}^2 - 14\dot{x}\dot{y} - 2gy =$ மாறிலி

எனக் காட்டுக.

PAPERMASTER.LK

இதிலிருந்து, ஆப்பின் ஆர்முடுகல் $\dfrac{1}{43}g$ எனவும் இழையின் இழுவை $\dfrac{30}{43}mg$ எனவும் காட்டுக.

[பக். 7 ஐப் பார்க்க.

13. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை இயற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு $2mg$ ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான இழையின் ஒரு நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனி கிடையுடன் 30° இற் சாய்ந்த ஓர் ஒப்பமான தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O இற் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை சாய்தளத்தின் மீதும் இழை அதியுயர் சரிவுக் கோடு வழியேயும் உள்ளன. இழையின் நீளம் $2a$ ஆக இருக்கும் வரைக்கும் துணிக்கை சாய்தளத்தின் மீது O இலிருந்து அதியுயர் சரிவுக் கோடு வழியே இழுக்கப்பட்டு மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. நேரம் t ஆக இருக்கும்போது இழையின் நீட்சி x எனக் கொள்வோம். துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு நீட்சி x ஆனது சமன்பாடு $\ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x - \frac{a}{4}\right)$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றது எனக் காட்டுக.

மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வு வடிவம் $x = \frac{a}{4} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$ இல் உள்ளதெனக் கருதிக்கொண்டு, A, B, ω ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, துணிக்கையின் இயக்கம் எளிய இசை இயக்கமாக இருக்கும்போது இயக்கத்தின் மையத்தையும் வீச்சத்தையும் காண்க. துணிக்கை முதலில் இயற்கை நீளத்திற்கு வரும்போது அதன் கதி $\sqrt{ag}$ எனக் காட்டுக.

விடுவித்த கணத்திலிருந்து நேரம் $[\pi - \cos^{-1}(1/3) + 2\sqrt{2}\,]\sqrt{\frac{a}{2g}}$ இற்குப் பின்னர் துணிக்கை O இற்கு வருகின்றது எனவும் காட்டுக. இழையின் நீளம் உயர்ந்தபட்சமாக இருக்கும்போது இழையின் இழுவையைக் காண்க.

14. (a) **a, b, c** என்பன அலகுக் காவிகள் ஆகும்.

(i) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $5\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ என்னும் காவிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனின், **a, b** ஆகிய இரு காவிகளுக்குமிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

(ii) $|a - b|^2 + |b - c|^2 + |c - a|^2 \leq 9$ எனக் காட்டுக.

(b) $ABCD$ என்பது ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2m$ ஆகவுள்ள ஒரு சதுரம் ஆகும். அதில் 3N, 2N, 4N, 8N, $5\sqrt{2}$ N, $2\sqrt{2}$ N விசைகள் முறையே $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ வழியே தாக்குகின்றன.

(i) விசைத் தொகுதி நாப்பத்தில் இருப்பதற்குப் பிரயோகிக்க வேண்டிய விசையின் பருமன், திசை, தாக்கக் கோடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) ABC இன் போக்கில் தாக்கும் 39 N m இணையாக ஒடுக்குவதற்குச் சேர்க்கப்பட வேண்டிய விசையின் பருமன், திசை, தாக்கக் கோடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(iii) விசைத் தொகுதியை B இல் தாக்கும் ஒரு தனி விசையாக ஒடுக்குவதற்குத் தொகுதியுடன் சேர்க்கப்பட வேண்டிய விசை இணையின் பருமனையும் அதன் போக்கையும் காண்க.

15. (a) AB, BC என்பன நீளத்திற் சமமான நிறை W வீதம் உள்ள 2 சீரான கோல்கள் ஆகும். இவை B இல் ஒப்பமாக இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை A இல் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் பிணைக்கப்பட்டு B இற்குக் கீழே C இருக்குமாறு தொகுதியானது C இல் சுவரிலிருந்து அப்பால் கிடையாகப் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு விசை W இனால் நாப்பத்தில் பேணப்படுகின்றது.

(i) BC இன் கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் உள்ள சாய்வு $\tan^{-1} 2$,

(ii) B இல் உள்ள மறுதாக்கம் $\sqrt{2}\,$W; கிடையுடன் அதன் சாய்வு 45°,

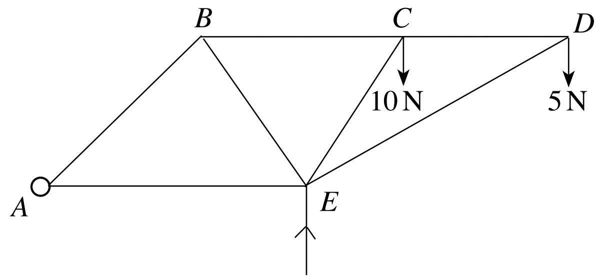
(iii) AB இன் கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் உள்ள சாய்வு $\tan^{-1}(2/3)$,

(iv) A இல் உள்ள மறுதாக்கம் $\sqrt{5}\,$W ; அது கிடையுடன் $\tan^{-1}(2)$ கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளது எனக் காட்டுக.

PAPERMASTER.LK

[பக். 8 ஐப் பார்க்க.

(b)



ஏழு இலேசான கோல்களை ஒப்பமாக இணைப்பதன்மூலம் சட்டப்படல் $ABCDE$ அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதில் $AB = AE = BE = BC = CE = CD$ ஆகும். A இல் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் இச்சட்டப்படல் AE உம் BCD உம் கிடையாக இருக்குமாறு E இல் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு நிலைக்குத்து விசையின் மூலம் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் உள்ளது. D, C ஆகிய மூட்டுகளில் முறையே $5\text{N}, 10\text{N}$ சுமைகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன.

(i) E இல் பிரயோகிக்கப்படும் நிலைக்குத்து விசையைக் காண்க.

(ii) பிணையல் A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறையும் கிடைக் கூறையும் காண்க.

(iii) போவின் குறிப்பீட்டைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் ஒவ்வொரு கோலினதும் தகைப்பைக் கண்டு அது இழுவையா, உதைப்பா எனத் தீர்மானிக்க.

16. (a) மையம் O ஐயும் ஆரை a ஐயும் திணிவு w ஐயும் உடைய ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளத்தின் திணிவு மையத்தின் அமைவைக் காண்க.

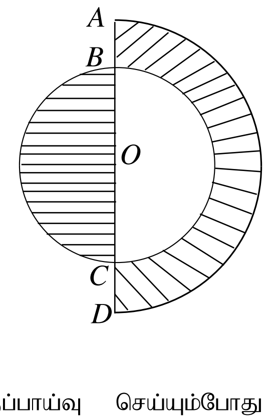
(b) இதிலிருந்து, மேற்குறித்த திண்ம அரைக்கோளத்தின் ஆரை $ka\ (k < 1)$ ஐ உடைய, புள்ளி O வை மையமாகக் கொண்ட ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தை அகற்றும்போது எஞ்சியிருக்கும் பொருளின் திணிவு மையத்திற்கு O இலிருந்து உள்ள தூரம் $\dfrac{3a\,(1+k^2)\,(1+k)}{8\,(1+k+k^2)}$ எனக் காட்டுக.

(c) அகற்றிய திண்ம அரைக்கோளப் பகுதியை உருவில் உள்ளவாறு எஞ்சிய பகுதியுடன் இணைத்து ஒரு சேர்த்திப் பொருள் செய்யப்படுகின்றது.

(i) அகற்றிய பகுதியின் திணிவு மொத்தத் திணிவில் k^3 எனக் காட்டுக.

(ii) சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையத்திற்கு O இலிருந்து உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

(iii) சேர்த்திப் பொருளின் பெரிய அரைக்கோளப் பகுதியின் வளைபரப்பின் யாதாயினும் ஒரு புள்ளி ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசையைத் தொடுமாறு நாப்பத்தில் இருப்பதற்கு $k^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ஆக இருக்க வேண்டும் எனக் காட்டுக.



17. (a) குழந்தைகள் மருத்துவமனை ஒன்றில் உள்ள பதிவேடுகளைப் பகுப்பாய்வு செய்யும்போது மருத்துவமனையில் சிகிச்சை பெறும் ஆண் பிள்ளைகளிடையே ஒருவர் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்டுப் பின்வரும் A, B, C என்னும் நிகழ்ச்சிகள் பற்றிய சில நிகழ்தகவுகள் வெளிப்படுத்தப்பட்டன.

A : குழந்தைக்குத் தொய்வு உள்ளது.

B : குழந்தைக்குத் தலையில் நோவு உள்ளது.

C : குழந்தைக்கு வயிற்றில் நோவு உள்ளது.

A, B, C ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் தம்முள் சாராதவை எனவும் $P(A) = 0.1, P(A \cup B) = 0.37, P(C) = 0.2$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது.

PAPERMASTER.LK

(i) $P(B) = 0.3$ எனக் காட்டுக.

(ii) $P(B' \mid A')$ ஐக் காண்க. A', B' ஆகியன முறையே A, B ஆகியவற்றின் நிரப்பிகள் ஆகும்.

(iii) குழந்தைக்கு வயிற்றில் நோவு இருந்தபோதிலும் தலையில் நோவும் தொய்வும் இல்லாமைக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iv) குழந்தை மேற்குறித்த நோய்களில் ஒன்றினால் மாத்திரம் பீடிக்கப்பட்டுள்ளது எனத் தரப்பட்டிருப்பின், அது தொய்வினால் பீடிக்கப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(b) (i) $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்னும் பெறுமானங்களின் இடை $\bar{x}$ ஐ வரையறுக்க.

ஒரு தவணைப் பரீட்சையில் 28 பிள்ளைகள் கணிதத்திற்குப் பெற்ற புள்ளிகள் A, B ஆகியவற்றினால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. A இனால் குறிக்கப்பட்ட 7 பிள்ளைகளின் புள்ளிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

28, 56, 23, 94, 08, 05, 13

எஞ்சிய 21 பிள்ளைகளின் புள்ளிகள் B இனால் குறிக்கப்பட்டன. அப்புள்ளிகளின் கூட்டுத்தொகை 846 ஆகும்.

(α) 28 பிள்ளைகளினதும் புள்ளிகளின் இடையைக் கணிக்க.

A புள்ளிகளைக் குறிக்கும்போது இரு புள்ளிகள் மாறியிருந்தன. 49 புள்ளிகளுக்குப் பதிலாகப் பிழையாக 94 உம் 50 புள்ளிகளுக்குப் பதிலாகப் பிழையாக 05 உம் குறிப்பிடப்பட்டிருப்பதாகப் பின்னர் அவருக்குப் புலப்பட்டது. A இல் இவ்விரு பிழையான புள்ளிகளும் திருத்தப்பட்டன.

(β) இப்புள்ளிகளின் மாற்றம் இடை மீது செல்வாக்குச் செலுத்துகின்றதா? காரணங் காட்டுக.

(ii) $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்னும் பெறுமானங்களின் நியம விலகல் s ஐ வரையறுத்து $s^2 = \dfrac{\sum_{r=1}^{n} x_r^2}{n} - \bar{x}^2$ எனக் காட்டுக.

X, Y என்பன முறையே 20 எண்களும் 10 எண்களும் இடம்பெறும் இரு மூட்டற்ற தொடைகள் எனக் கொள்வோம். X இல் உள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகை 320 ஆக இருக்கும் அதே வேளை அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 5840 ஆகும். Y இல் உள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகை 130 ஆக இருக்கும். அதே வேளை அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 2380 ஆகும். X , $X \cup Y$ ஆகியவற்றின் இடையையும் நியம விலகலையும் கணிக்க.

* * *

PAPERMASTER.LK