அந்தரங்கமானது

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த (உயர்தர)ப் பரீட்சை - 2018

10 - இணைந்த கணிதம் - I

புள்ளியிடும் திட்டம்

PAPERMASTER.LK

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காக தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளப்படும் கருத்துக்களுக்கேற்ப இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றப்படலாம்.

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன

முழுப்பதிப்புரிமையுடையது

க.பொ.த. (உ/த) பரீட்சை – 2018

10 - இணைந்த கணிதம்

புள்ளித்திட்டம்

வினாத்தாள் I :

பகுதி A : 10 X 25 = 250

பகுதி B : 05 X 150 = 750

மொத்தம் = 1000/10

வினாத்தாள் I - இறுதிப் புள்ளி = 100

PAPERMASTER.LK

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நுட்ப முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்பட்டியலில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஓர் அங்கீகரிக்கப்பட்ட முறையைக் கடைப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிவப்பு நிற குமிழ்முனை பேனாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரீட்சகரின் குறியீட்டெண்ணைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது **தெளிவான இலக்கத்தில்** எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தனிக்கோட்டினால் கீறிவிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி, சிற்றொப்பத்தை இடவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உபபகுதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் △ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா இலக்கத்துடன் ☐ இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் பதிவதற்கு பரீட்சகர்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i) .... ✓ △ 4/5

....

....

(ii) .... ✓ △ 3/5

....

....

(iii) .... ✓ △ 3/5

....

....

(03)   (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

பல்தேர்வு விடைத்தாள் (துளைத்தாள்)

1. க.பொ.த.(உ. தர) மற்றும் தகவல் தொழிநுட்பப் பரீட்சைக்கான துளைத்தாள் திணைக்களத்தால் வழங்கப்படும். சரியாக துளையிடபட்டு அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாள் தங்களுக்கு கிடைக்கப்பெறும். அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாளைப் பயன்படுத்துவது பரீட்சகரின் கடமையாகும்.
2. அதன் பின்னர் விடைத்தாளை நன்கு பரிசீலித்துப் பார்க்கவும். ஏதாவது வினாவுக்கு, ஒரு விடைக்கும் அதிகமாக குறியிட்டிருந்தாலோ, ஒரு விடைக்காவது குறியிடப்படாமலிருந்தாலோ தெரிவுகளை வெட்டிவிடக்கூடியதாக கோடொன்றைக் கீறவும். சில வேளைகளில் பரீட்சார்த்தி முன்னர் குறிப்பிட்ட விடையை அழித்துவிட்டு வேறு விடைக்குக் குறியிட்டிருக்க முடியும். அவ்வாறு அழித்துள்ள போது நன்கு அழிக்காது விட்டிருந்தால், அவ்வாறு அழிக்கப்பட்ட தெரிவின் மீதும் கோடிடவும்.
3. துளைத்தாளை விடைத்தாளின் மீது சரியாக வைக்கவும். சரியான விடையை ✓ அடையாளத்தாலும் பிழையான விடையை O அடையாளத்தாலும் இறுதி நிரலில் அடையாளமிடவும். சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை அவ்வவ் தெரிவுகளின் இறுதி நிரையின் கீழ் அத்துடன் அவற்றை கூட்டி சரியான புள்ளியை உரிய கட்டத்தில் எழுதவும்.

PAPERMASTER.LK

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரீட்சார்த்திகளால் விடைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இடங்களையும், பக்கங்களையும் குறுக்குக் கோடிட்டு வெட்டிவிடவும். பிழையான பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோடிடவும். புள்ளி வழங்கக்கூடிய இடங்களில் ✓ அடையாளமிட்டு அதனைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஓவலண்ட் கடதாசியின் இடது பக்கத்தில் குறிக்கவும்.
3. சகல வினாக்களுக்கும் கொடுத்த முழுப் புள்ளியை விடைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பெட்டியினுள் வினா இலக்கத்திற்கு நேராக 2 இலக்கங்களில் பதியவும். வினாத்தாளில் உள்ள அறிவுறுத்தலின் படி வினாக்கள் தெரிவு செய்யப்படல் வேண்டும். எல்லா வினாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விடைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விடைகளின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கூட்டில் பதியவும். விடைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும். ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விதத்தில் எழுதுவும்.

புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

இம்முறை சகல பாடங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவினுள் கணிப்பிடப்படமாட்டாது. இது தவிர ஒவ்வொரு வினாப் பத்திரத்துக்குமான இறுதிப்புள்ளி தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும். வினாப்பத்திரம் I இற்குரிய புள்ளிப்பட்டியலில் “வினாப்பத்திரம் I” என்ற நிரலில் பதிந்து எழுத்திலும் எழுத வேண்டும். பகுதிப்புள்ளிகளை உள்ளடக்கி “வினாப்பத்திரம் II” எனும் நிரலில் வினாப்பத்திரம் II இற்குரிய இறுதிப்புள்ளியை பதிய வேண்டும். 51 சித்திரப் பாடத்திற்குரிய I, II, மற்றும் III ஆம் வினாப்பத்திரங்களுக்குரிய புள்ளிகளை தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதிந்து எழுத்திலும் எழுதுதல் வேண்டும்.

ooo

PAPERMASTER.LK

பகுதி A

1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ என நிறுவுக.

$n=1$ ஆக, L.H.S. $=1^3=1$ (5)

R.H.S. $=\frac{1}{4}\cdot 1^2(1+1)^2=1$.

எனவே, $n=1$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும்.

$n=p$ க்கு முடிவு உண்மை என்க. இங்கு $p \in \mathbb{Z}^+$

அதாவது $\sum_{r=1}^{p} r^3 = \frac{1}{4}p^2(p+1)^2$. (5)

எனவே, $\sum_{r=1}^{p+1} r^3 = \sum_{r=1}^{p} r^3 + (p+1)^3$ (5)

$=\frac{1}{4}p^2(p+1)^2+(p+1)^3$

$=(p+1)^2\frac{[p^2+4p+4]}{4}$.

$=\frac{1}{4}(p+1)^2(\overline{p+1}+1)^2$. (5)

$\therefore$ $n=p+1$ இற்கு முடிவு உண்மை. இதிலிருந்து

$n=p$ இற்கு முடிவு உண்மை எனின், $n=p+1$ இற்கும் முடிவு உண்மையாகும்.

$\therefore$ **கணிதத் தொகுத்தறி முறைப்படி** எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் முடிவு உண்மையாகும்.

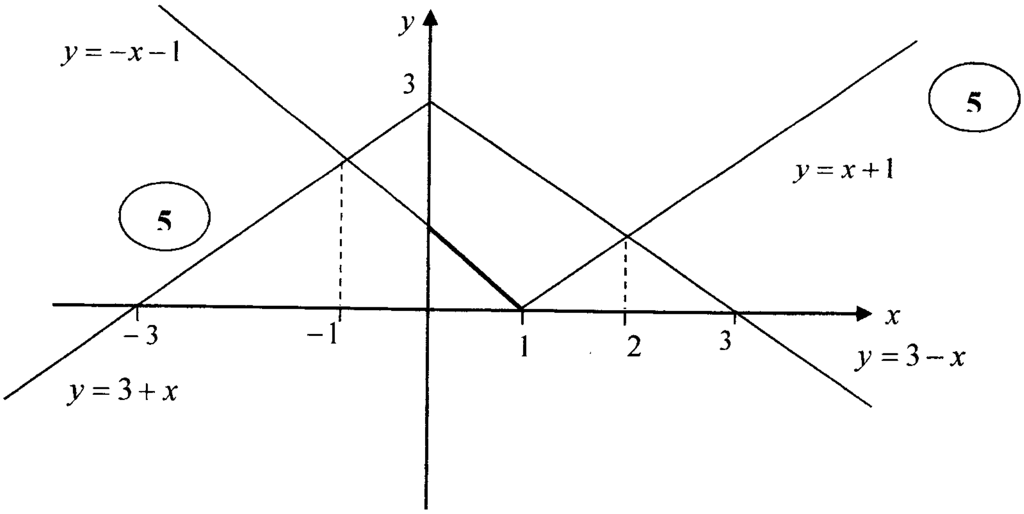
(5)

25

PAPERMASTER.LK

2. $y = 3 - |x|$, $y = |x - 1|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, சமனிலி $|x| + |x - 1| \leq 3$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.



இடைவெட்டும் புள்ளிகளில் $-x + 1 = 3 + x$ அல்லது $x - 1 = 3 - x$

அதாவது $x = -1$ அல்லது $x = 2$. (5)

தரவிலிருந்து $|x| + |x - 1| \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad |x - 1| \leq 3 - |x|$ (5)

எனவே, வரைபிலிருந்து x திருப்தி செய்யும் பெறுமானங்களின் தீர்வுகள் $-1 \leq x \leq 2$. (5)

25

வேறுமுறை 1

$|x| + |x - 1| \leq 3$

வகை (i) $x \leq 0 : |x| + |x - 1| \leq 3$

$\Leftrightarrow -x - (x - 1) \leq 3$ (5)

$\Leftrightarrow -2x + 1 \leq 3$

$\Leftrightarrow x \geq -1$

இவ் வகையில், தீர்வுகள் $-1 \leq x \leq 0$

PAPERMASTER.LK

வகை (ii) $0 < x \leq 1$,

$|x| + |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow x - (x-1) \leq 3$

$\Leftrightarrow x - x + 1 \leq 3$ (5)

$\Leftrightarrow 1 \leq 3$

இவ் வகையில், தீர்வுகள் $0 < x \leq 1$.

வகை (iii) $1 < x$

$|x| + |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow x + x - 1 \leq 3$

$\Leftrightarrow 2x \leq 4$

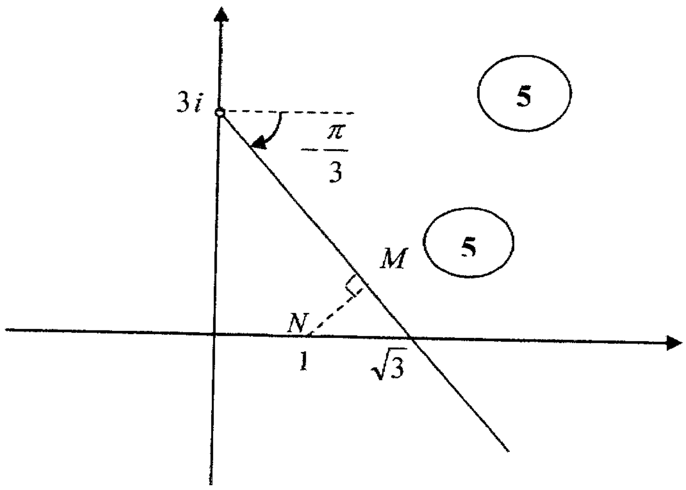
$\Leftrightarrow x \leq 2$

$\therefore$ இவ் வகையில்,தீர்வுகள் $1 < x \leq 2$.

இதிலிருந்து x திருப்தி செய்யும் பெறுமானங்களின் தீர்வுகள் $-1 \leq x \leq 2$. (5)

PAPERMASTER.LK

3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில், $\mathrm{Arg}(z-3i)=-\frac{\pi}{3}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பரும்படியாக வரைக.
இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\mathrm{Arg}(\bar{z}+3i)=\frac{\pi}{3}$ ஆகுமாறு $|z-1|$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.



தரவிலிருந்து

$$Arg(\bar{z}+3i)=\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ Arg\overline{(\bar{z}+3i)}=-\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ Arg(z-3i)=-\frac{\pi}{3}. \quad (5)$$

(5)

இதிலிருந்து $Arg(z-3i)=-\frac{\pi}{3}$ ஆகுமாறு $|z-1|$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் NM ஆல் கொடுக்கப்படும்

இங்கு $NM=(\sqrt{3}-1)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{(3-\sqrt{3})}{2}$.

(5)

25

PAPERMASTER.LK

4. $\left(x^2 + \frac{3k}{x}\right)^8$ இன் ஈருறுப்பு விரியின் x, x^4 ஆகியவற்றின் குணகங்கள் சமமாகும். மாறிலி k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\left(x^2 + \frac{3k}{x}\right)^8 = \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r (x^2)^r \left(\frac{3k}{x}\right)^{8-r}$$ (5)

$$= \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r (3k)^{8-r} x^{3r-8}$$

$x^1 : 3r - 8 = 1 \iff r = 3.$ (5)

$x^4 : 3r - 8 = 4 \iff r = 4.$

தரவின்படி: ${}^8C_3 (3k)^5 = {}^8C_4 (3k)^4$ (5)

$$\frac{8!}{3!\,5!} 3^5 k = \frac{8!}{4!\,4!} 3^4$$ (5)

$$k = \frac{5}{12}.$$ (5)

PAPERMASTER.LK

5. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \frac{\pi^2}{32}$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{x^2(x+1)} \quad (5)$$

$$= \lim_{x \to 0} 2\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{\left(\frac{\pi x}{8}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{x+1}$$

(5)

$$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{1} \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{\pi^2}{32}. \quad (5)$$

25

வேறுமுறை

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} \cdot \frac{1+cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{1+cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)\left(1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)} \quad (5)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

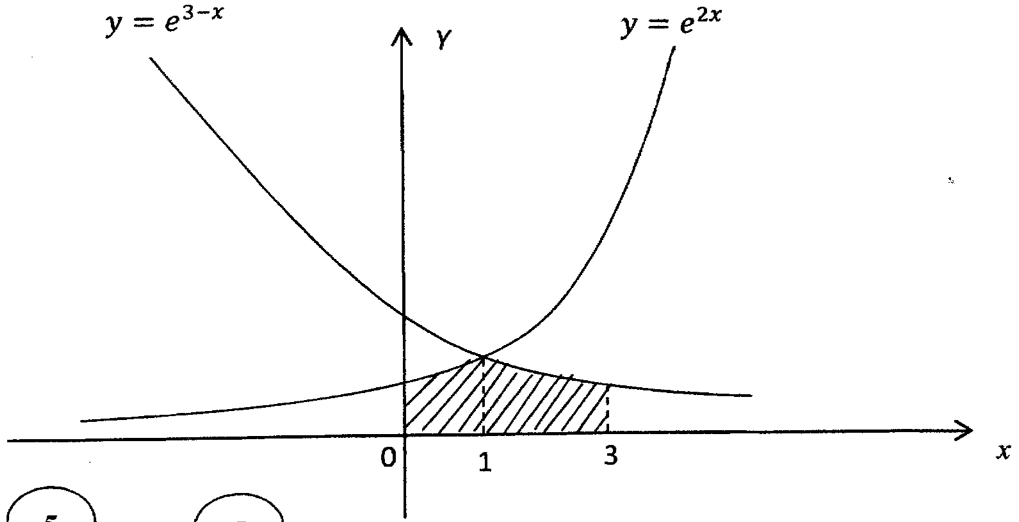
(5)

$$= 1 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \quad (5) + (5)$$

PAPERMASTER.LK

$$= \frac{\pi^2}{32}. \quad (5)$$

6. $y=e^{2x}$, $y=e^{3-x}$, $x=0$, $x=3$, $y=0$ ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\frac{3}{2}(e^2-1)$ சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.



(5) (5)

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_1^3 e^{3-x}dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 + \frac{e^{3-x}}{(-1)}\Big|_1^3$$ (5)

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + (-1) + e^2$$ (5)

$$= \frac{3e^2}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2}(e^2-1).$$ (5)

25

PAPERMASTER.LK

7. $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ இற்கு $x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$, $y = \sin t$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளினால் ஒரு வளையி C தரப்படுகின்றது.

$\frac{dy}{dx} = \cos t \sin t$ எனக் காட்டுக.

$t = \frac{2\pi}{3}$ ஐ ஒத்த புள்ளியில் வளையி C இற்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலிக் கோட்டின் படித்திறன் $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ என உய்த்தறிக.

$x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$ $\qquad$ $y = \sin t$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \times \sec^2\frac{t}{2} \times \frac{1}{2}$ (5) $\qquad$ $\frac{dy}{dt} = \cos t$ (5)

$= \frac{1}{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}$ (5)

$= \frac{1}{\sin t}$

எனவே $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \cos t \sin t$ (5)

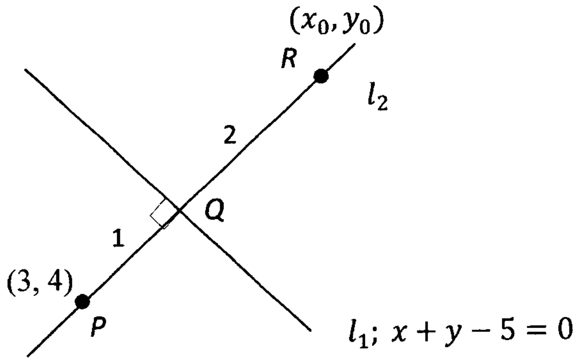
$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$

(5)

25

PAPERMASTER.LK

8. l_1 ஆனது நேர்கோடு $x + y - 5 = 0$ எனக் கொள்வோம். புள்ளி $P \equiv (3, 4)$ இனூடாகச் செல்வதும் l_1 இற்குச் செங்குத்தானதுமான நேர்கோடு l_2 இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.
Q என்பது l_1 இனதும் l_2 இனதும் வெட்டுப் புள்ளி எனவும் R என்பது $PQ : QR = 1 : 2$ ஆகுமாறு l_2 மீது உள்ள புள்ளி எனவும் கொள்வோம். R இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.



l_2 இன் படித்திறன் $= -\frac{1}{-1} = 1$ (5)

l_2 இன் சமன்பாடு: $y - 4 = 1(x - 3)$

$x - y + 1 = 0$ (5)

$Q \equiv (2,3).$ (5)

$R \equiv (x_0, y_0)$ என்க

எனவே,

$2 = \frac{x_0+6}{3}$; $3 = \frac{y_0+8}{3}$ (5)

$\therefore x_0 = 0$; $y_0 = 1.$

(5)

$\therefore R \equiv (0,1).$

வேறுமுறை

ஆதலால் $\frac{QR}{RP} = -\frac{2}{3}$

$R \equiv \left(\frac{-2 \times 3 + 2 \times 3}{3 - 2}, \frac{-2 \times 4 + 3 \times 3}{3 - 2}\right)$

$\equiv (0,1)$

25

PAPERMASTER.LK

9. $P \equiv (1,2)$ எனவும் $Q \equiv (7,10)$ எனவும் கொள்வோம். P, Q ஆகிய புள்ளிகளை ஒரு விட்டத்தின் முனைகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $S \equiv (x-1)(x-a)+(y-2)(y-b)=0$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக a, b ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களை எழுதுக.

$S' \equiv S + \lambda(4x - 3y + 2) = 0$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$ ஆகும். P, Q ஆகிய புள்ளிகள் வட்டம் $S' = 0$ மீது இருக்கின்றன எனக் காட்டி, இவ்வட்டம் புள்ளி $R \equiv (1,4)$ இனூடாகச் செல்லத்தக்கதாக λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$a = 7,$ (5)

$b = 10.$

$P \equiv (1,2)$, $Q \equiv (7,10)$ ஆகிய இரண்டும் $S = 0$, $4x - 3y + 2 = 0$ என்பவற்றைத் திருப்தி செய்வதால் $S' = 0$ ஆகும். (5) + (5)

$\therefore P$ உம் Q உம் $S' = 0$ மீது கிடக்கும்.

$R \equiv (1,4)$ ஆனது $S' = 0$ இனூடாகச் செல்வதால்

$0 + (4-2)\times(4-10) + \lambda(4-12+2) = 0$ (5)

$6\lambda = -12$

$\lambda = -2.$ (5)

25

PAPERMASTER.LK

10. $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ **இற்கு** $\sec^3 x + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ **எனக் காட்டுக; இங்கு** $n \in \mathbb{Z}$.

$\sec^3 a + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x$

$$= \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \quad (5)$$

$$= \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin^2 x)} \quad (5)$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)} \quad \left(\because x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\quad n \in \mathbb{Z} \text{ ஆக}\right) \quad (5)$$

$$= \frac{(1+\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)^2} \quad (5)$$

$$= \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}. \quad (5)$$

25

PAPERMASTER.LK

11. (a) $a, b \in \mathbb{R}$ எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ இன் பிரித்துக்காட்டியை a, b என்பவற்றில் எழுதி, இதிலிருந்து, இச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவை எனக் காட்டுக. இம்மூலங்கள் α, β எனக் கொள்வோம். $\alpha+\beta, \alpha\beta$ ஆகியவற்றை a, b என்பவற்றில் எழுதுக.

இப்போது, $\beta = \alpha + 2$ எனக் கொள்வோம். $a^2 - ab + b^2 = 9$ எனக் காட்டி, $|a| \le \sqrt{12}$ என உய்த்தறிந்து, b இனை a இல் காண்க.

(b) $c (\ne 0), d$ ஆகியன மெய்யெண்கள் எனவும் $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$ எனவும் கொள்வோம். $f(x)$ ஆனது $(x+c)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $-c^3$ ஆகும். அத்துடன் $(x-c)$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும். $c = -2$ எனவும் $d = -12$ எனவும் காட்டுக.

c, d ஆகியவற்றின் இப்பெறுமானங்களுக்கு $f(x)$ ஆனது (x^2-4) இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதியைக் காண்க.

(a) $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$

தன்மைகாட்டி $\Delta = 4(a+b)^2 - 12(ab)$ (10)

$= 4(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$

$= 4(a^2 - ab + b^2)$

$= 4\left[\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] \ge 0$ எல்லா $a, b \in \mathbb{R}$.

(5) (5)

(5) எனவே மூலங்கள் மெய்யானவை **25**

$\alpha + \beta = \frac{2}{3}(a+b) \quad \alpha\beta = \frac{ab}{3}$ (5) (5)

$\beta = \alpha + 2 \Rightarrow (\beta - \alpha)^2 = 4$ (5)

$\Rightarrow (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = 4$ (5)

$\Rightarrow \frac{4}{9}(a+b)^2 - \frac{4}{3}ab = 4$ (5) + (5)

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 3ab = 9$

$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = 9$ (5) **35**

$b^2 - ab + a^2 = 9$

$\Rightarrow \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - a^2 + 9$

PAPERMASTER.LK

$$= -\frac{3a^2}{4} + 9$$

$$= \frac{3}{4}(12 - a^2)$$ (10)

$\Rightarrow 12 - a^2 \geq 0$ (5)

$\Rightarrow \quad |a| \leq \sqrt{12}$ (5)

$b = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{12 - a^2}$ (10) **30**

(b) $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$

$f(-c) = -c^3 + 4c^2 - c^2 + d = -c^3$ (5)

(5) $\Rightarrow 3c^2 + d = 0 \quad \longrightarrow (1)$

$f(c) = c^3 + 4c^2 + c^2 + d = 0$ (5)

(5) $\Rightarrow c^3 + 5c^2 + d = 0 \longrightarrow (2)$

$(2) - (1) \Rightarrow c^3 + 2c^2 = 0$ (5)

$\Rightarrow c^2(c + 2) = 0$

$c \neq 0$, ஆதலால் $c = -2$ ஆகும் (5)

$\Rightarrow d = -3c^2 = -12.$ (5) **35**

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 12$ ஆகும்

$f(x)$ ஆனது $x^2 - 4$, ஆல் பிரிக்கப்படும் பொழுது மீதி $\lambda x + \mu$ என்னும் வடிவில் உள்ளதெனக.

அதாவது $f(x) = (x^2 - 4)q(x) + \lambda x + \mu.$ (5)

$\Rightarrow f(x) = (x - 2)(x + 2)q(x) + \lambda x + \mu.$

$f(2) = 8 = 2\lambda + \mu$; $f(-2) = 0 = -2\lambda + \mu$

(5) (5)

$\Rightarrow \mu = 4$; $\lambda = 2.$ (5)

$\therefore$ மீதி $= 2x + 4.$ (5) **25**

PAPERMASTER.LK

12. (a) ஒவ்வொன்றிலும் மூன்று ஆண் பிள்ளைகளும் இரண்டு பெண் பிள்ளைகளும் இருக்கும் இரு கூட்டங்களின் உறுப்பினர்களிடையே ஆறு உறுப்பினர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவை, குழுவில் உள்ள பெண் பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை உயர்ந்தபட்சம் இரண்டு ஆக இருக்கத்தக்கதாக, தெரிந்தெடுக்க வேண்டும்.

(i) குழுவுக்கு ஒவ்வொரு கூட்டத்திலிருந்தும் இரட்டை எண்ணிக்கையிலான உறுப்பினர்களைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டும் எனின்,

(ii) குழுவுக்கு ஒரு பெண் பிள்ளையை மாத்திரம் தெரிந்தெடுக்க வேண்டும் எனின்,

ஆக்கப்படத்தக்க அத்தகைய வெவ்வேறு குழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $f(r) = \dfrac{1}{(r+1)^2}$ எனவும் $U_r = \dfrac{(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$ எனவும் கொள்வோம்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $f(r) - f(r+2) = 4U_r$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{13}{144} - \dfrac{1}{4(n+2)^2} - \dfrac{1}{4(n+3)^2}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகின்றது என்பதை உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $t_n = \sum_{r=n}^{2n} U_r$ எனக் கொள்வோம்.

$\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ எனக் காட்டுக.

12 (a) (i)

தெரிவுகளின் வேறுபட்ட வழிகள்		குழுக்களின் எண்ணிக்கை	
குழு 1	குழு 2		
2	4		
1G 1B	1G 3B	$2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$	10
2B	1G 3B	${}^3C_2 \times 2 \times 1 = 6$	10
2B	2G 2B	${}^3C_2 \times 1 \times {}^3C_2 = 9$	10
		27	5

∴ அவ்வாறான வேறுபட்ட குழுக்களின் எண்ணிக்கை $= 27 \times 2$

$= 54$ 10

45

(ii) 1G 5B

${}^4C_1 \times {}^6C_5 = 24.$ 10 5

15

PAPERMASTER.LK

வேறுமுறை

குழு 1		குழு 2		குழுக்களின் எண்ணிக்கை
M(3)	F(2)	M(3)	F(2)	
2		2	2	${}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^2C_2 = 9$
2		3	1	${}^3C_2 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 6$
1	1	3	1	${}^3C_1 \times {}^2C_1 \times {}^3C_3 \times {}^2C_1 = 12$
2	2	2		9
3	1	2		6
3	1	1	1	12

10 10 10 5

குழுக்களின் எண்ணிக்கை: $9 + 6 + 12 + 9 + 6 + 12 = 54$ 10

(b) $f(r) - f(r+2) = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{(r+3)^2}$ 05

$= \frac{4(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$ 05

$= 4U_r$ 05

15

எனவே

$r = 1; \quad 4U_1 = f(1) - f(3)$ 10

$r = 2; \quad 4U_2 = f(2) - f(4)$

$r = 3; \quad 4U_3 = f(3) - f(5)$

$\vdots$

$r = n-2; \quad 4U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$

$r = n-1; \quad 4U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$

$r = n; \quad 4U_n = f(n) - f(n+2)$ 10

$$4\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$$ 10

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+3)^2}$$

PAPERMASTER.LK

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}.$$

40

$n \longrightarrow \infty$ ஆக வலது பக்க எல்லை $\frac{13}{144}$ ஆகும். (5)

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} U_r$

ஒருங்கும் (5) அத்துடன் கூட்டுத்தொகை $\frac{13}{144}$ ஆகும். (5)

15

$$t_n = \sum_{r=n}^{2n} U_r$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} U_r - \sum_{r=1}^{n-1} U_r$$ (5)

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஆனது ஒருங்குவதாலால்,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{2n} U_r - \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n-1} U_r$$ (5)

$$= \frac{13}{144} - \frac{13}{144}$$ (5)

$$= 0.$$ (5)

20

PAPERMASTER.LK

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ எனவும் $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{P} = \mathbf{AB}$ இனால் வரையறுக்கப்படும் தாயம் $\mathbf{P}$ ஐக் கண்டு, a இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் $\mathbf{P}^{-1}$ உளதாக இருப்பதில்லை எனக் காட்டுக.

$\mathbf{P}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ எனின், $a = 2$ எனக் காட்டுக.

a இற்குரிய இப்பெறுமானத்துடன் $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{I}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $\mathbf{I}$ ஆனது வரிசை 2 ஆகவுள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயம் ஆகும்.

$\mathbf{Q}^{-1}$ ஐ எழுதி, $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\mathbf{R} = \left(\frac{1}{5}\mathbf{Q}\right)^{-1}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் $\mathbf{R}$ ஐக் காண்க.

(*b*) $z = x + iy$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $x, y \in \mathbb{R}$ ஆகும். z இன் மட்டு $|z|$ ஐயும் உடன்புணரி $\bar{z}$ ஐயும் வரையறுக்க.

(i) $z\bar{z} = |z|^2$ எனவும்

(ii) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$ எனவும் $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$ எனவும்

காட்டுக.

$z \neq 1$ எனவும் $w = \frac{1+z}{1-z}$ எனவும் கொள்வோம். $\mathrm{Re}\,w = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ எனவும் $\mathrm{Im}\,w = \frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}$ எனவும் காட்டுக.

மேலும், $z = \cos\alpha + i\sin\alpha\ (0 < \alpha < 2\pi)$ எனின், $w = i\cot\frac{\alpha}{2}$ எனக் காட்டுக.

(*c*) ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் A, B ஆகிய புள்ளிகள் முறையே $-3i$, 4 என்னும் சிக்கலெண்களை வகைகுறிக்கின்றன. C, D ஆகிய புள்ளிகள் முதற் கால்வட்டத்தில், $ABCD$ ஒரு சாய்சதுரமாகவும் $B\hat{A}D = \theta$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக, உள்ளன; இங்கு $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$ ஆகும். C, D ஆகிய புள்ளிகளினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண்களைக் காண்க.

(a) $P = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}$. (10) **10**

$\begin{vmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 2a = 0.$ (5)

$\therefore a$ இன் எப் பெறுமானத்திற்கும் P^{-1} இருக்காது. (5) **10**

PAPERMASTER.LK

வேறுமுறை

P^{-1}, இருப்பதற்கு

$\begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (5) ஆகுமாறு $b, c, d, e \in \mathbb{R}$ இருக்கும்

$\Leftrightarrow 2b + 2ad = 1, \quad b + ad = 0, \quad 2c + 2ae = 0, \quad c + ae = 1,$

இது தரவுக்கு முரணானது

$\therefore a$ இன் எப் பெறுமானத்திற்கும் P^{-1} இருக்காது. (5)

$P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, எனின் $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2+4a \\ 1+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$. (5)

$\Rightarrow 2 + 4a = 10 \ ; \ 1 + 2a = 5.$

$\Rightarrow a = 2.$ (5)

10

$a = 2.$

$Q = P + I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. (5)

$\therefore Q^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. (10)

15

$\therefore AA^T - \frac{1}{2}R = \left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1}$

$= 5Q^{-1}$ (5)

$\Leftrightarrow R = 2AA^T - 10Q^{-1}$

$= 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 10\left(\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= 2\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. (5)

$= \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 14 & 36 \end{pmatrix}$. (5) (5)

20

PAPERMASTER.LK

(b) $z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\bar{z} = x - iy$. (5) (5) [10]

(i) $z\,\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$. (5)

(ii) $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\,\mathrm{Re}\, z$ (5)

$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}\, z$. (5) [15]

$z \neq 1, \quad w = \dfrac{1+z}{1-z} \times \dfrac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}} = \dfrac{1 - z\bar{z} + z - \bar{z}}{|1-z|^2} = \dfrac{1 - |z|^2 + 2i\,\mathrm{Im}\, z}{|1-z|^2}$ (5) (5) (5)

$\Rightarrow \mathrm{Re}\, w = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$; $\mathrm{Im}\, w = \dfrac{2\mathrm{Im}\, z}{|1-z|^2}$ (5) [20]

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha \ (0 < \alpha < 2\pi)$.

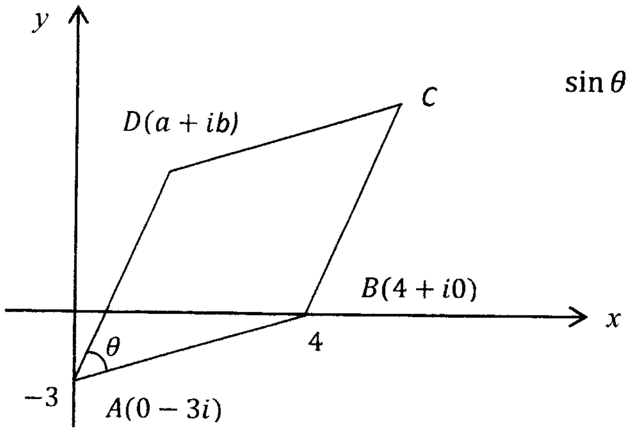
எனவே $|z| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, w = 0$. (5)

$\therefore\ w = \dfrac{2i\,\mathrm{Im}\, z}{|1-z|^2} = \dfrac{2i\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \dfrac{2i\sin\propto}{2(1 - coc\propto)} = i\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = i\cot\dfrac{\alpha}{2}$. (5)

(5) (5) [20]

PAPERMASTER.LK

C)



$\sin\theta = \frac{7}{25}, \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{24}{25}$

$D \equiv (a, b)$ என்க

AB ஆனது A பற்றி இடம்சுழிப்போக்கில் θ கோணத்தினூடு சுழற்றப்பட்டால் AD கிடைக்கும்.

$\Rightarrow a + i(b+3) = (4+3i)(\cos\theta + i\sin\theta)$ (10)

$= (4+3i)\left(\frac{24}{25} + i\frac{7}{25}\right)$

$\Leftrightarrow a + i(b+3) = 3 + 4i.$

$\Leftrightarrow a = 3, \ b = 1.$

$\therefore D$ ஆனது $3 + i$ ஐக் குறிக்கும் (5)

$C \equiv (p, q)$, எனின் $\frac{p+0}{2} = \frac{3+4}{2}, \ \frac{q-3}{2} = \frac{1+0}{2}.$ ஆகும்.

$\Rightarrow p = 7, \ q = 4.$

$\therefore C$ ஆனது 7+4i ஐக் குறிக்கும் (5)

20

PAPERMASTER.LK

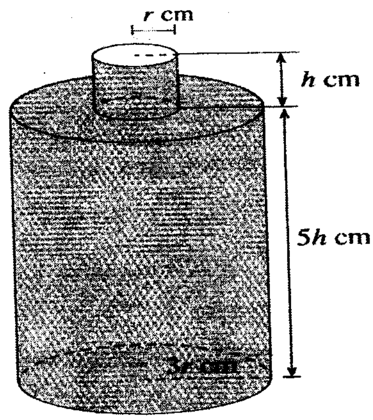
14. (*a*) $x \neq -1, \frac{1}{3}$ இற்கு $f(x) = \frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$ எனக் கொள்வோம்.

$x \neq -1, \frac{1}{3}$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = \frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.

அணுகுகோடுகளையும் திரும்பற் புள்ளிகளையும் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

வரைபைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடு $k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1)$ செப்பமாக ஒரு மூலத்தைச் கொண்டிருக்கத்தக்கதாக $k \in \mathbb{R}$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(*b*) $3r$ cm ஆரையையும் $5h$ cm உயரத்தையும் உடைய ஓர் அடைத்த செவ்வட்டப் பொள் உருளையின் மேல் முகத்திலிருந்து r cm ஆரையை உடைய ஒரு தட்டை அகற்றி r cm ஆரையும் h cm உயரத்தையும் உடைய ஒரு திறந்த செவ்வட்டப் பொள் உருளையை உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு பொருத்தி 391π cm^3 கனவளவு உள்ள ஒரு போத்தல் செய்யப்பட வேண்டியுள்ளது. போத்தலின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு S cm^2 ஆனது $S = \pi r(32h + 17r)$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. S இழிவாக இருக்கத்தக்கதாக r இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



(a) $x \neq -1, \frac{1}{3}$; இற்கு $f(x) = \frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$.

எனவே $f'(x) = \frac{16(x+1)^2(3x-1) - 16(x-1)[2(x+1)(3x-1) + 3(x+1)^2]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$ (15)

$= \frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}$; $x \neq -1, \frac{1}{3}$ ஆக (10)

25

கிடை அணுகுகோடுகள்: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \Rightarrow y = 0.$ (5)

நிலைக்குத்து அணுகுகோடுகள்: $x = -1$; $x = \frac{1}{3}$ (5)

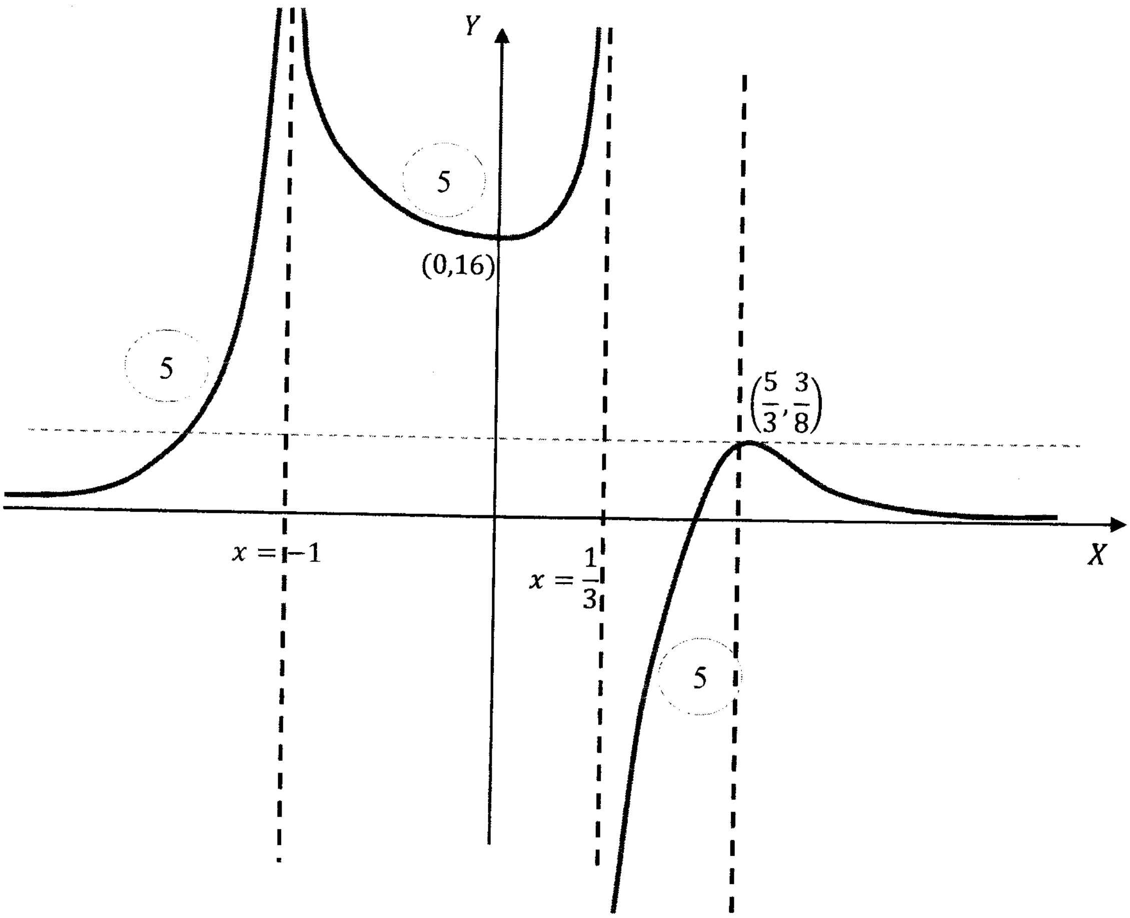
$\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) \to \infty$, $\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} f(x) \to \infty$; $\lim_{x \to \frac{1}{3}^+} f(x) \to -\infty$.

திரும்பல் புள்ளிகளில் $f'(x) = 0. \implies x = 0; x = \frac{5}{3}$

PAPERMASTER.LK

	5	5	5	5	5
	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} < x < \infty$
Sign of $f'(x)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$
	f அதிகரிக்கும்	f குறையும்	f அதிகரிக்கும்	f அதிகரிக்கும்	f குறையும்

இரண்டு திரும்பல் புள்ளிகள் உண்டு: $(0,16)$ என்பது ஓரிட இழிவும் $\left(\frac{5}{3},\frac{3}{8}\right)$ என்பது ஓரிட உயர்வுமாகும். 5 5



60

$k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1).$

$\Rightarrow k = \frac{16(x-1).}{(x+1)^2(3x-1)}.$ 5

PAPERMASTER.LK

$k \leq 0$ or $\frac{3}{8} < k < 16$, எனின் தரப்பட்ட சமன்பாடு சரியாக ஒரு மூலத்தைக் கொண்டிருக்கும்.. 15

5 5

(b) கனவளவு: $391\pi = \pi(3r)^2(5h) + \pi r^2 h$ 10

$391 = 46r^2h$

$h = \frac{17}{2r^2}$, $(r > 0)$. 5

மேற்பரப்பளவு: $S = \pi r(32h + 17r)$.

$= 17\pi\left(\frac{16}{r} + r^2\right)$ 5

5 $\frac{dS}{dr} = 17\pi\left(-\frac{16}{r^2} + 2r\right) = \frac{34\pi(r^3 - 8)}{r^2}$ 5

$\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 2.$ 5

For $0 < r < 2$, $\frac{dS}{dr} < 0$ and $r > 2$, $\frac{dS}{dr} > 0$. 5

5

$\therefore$ $r = 2$ ஆகும் பொழுது S இழிவாகும் 5 50

---

15. (a) (i) x^2, x^1, x^0 ஆகியவற்றின் குணகங்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம், எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\frac{1}{x^3(x-1)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களில் எழுதி, $\int \frac{1}{x^3(x-1)}\,dx$ ஐக் காண்க.

(ii) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int x^2 \cos 2x\,dx$ ஐக் காண்க.

(b) பிரதியீடு $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$ ஐப் பயன்படுத்தி $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}\,dx = 2\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

a ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ஐப் பயன்படுத்தி $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}\,dx$ ஐக் காண்க.

(a) (i) $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$

x இன் வலுவின் குணகங்களை ஒப்பிட

PAPERMASTER.LK

$x^2 \quad : -A + B = 0$ 5

$x^1 \; : -B + C = 0$ (5)

$x^0 \; : \quad -C = 1$ (5)

$A = -1, B = -1$ and $C = -1$ (5)

$1 = -x^2(x-1) - x(x-1) - (x-1) + x^3$

20

$$\therefore \frac{1}{x^3(x-1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x-1}$$ (5)

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^3(x-1)} = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ln|x-1| + C,$$ (5)

(5) (5) (5) (5)

இங்கு C என்பது எதேச்சையான மாறிலியாகும்.

30

(iii) $\int x^2 \cos 2x \, dx = \frac{x^2 \sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int 2x \sin 2x \, dx$ (5)

(5)

(5)

$$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$$ (5)

$$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C,$$ இங்கு C என்பது எதேச்சையான மாறிலியாகும்

(5) (5)

30

(b) $\theta = \tan^{-1}(\cos x); \; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\tan\theta = \cos x \implies \sec^2\theta \, d\theta = -\sin x \, dx$$ (5)

$$\theta = 0 \implies \theta = \tan^{-1} 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$ (5)

$$\theta = \pi \implies \theta = \tan^{-1} -1 \implies \theta = -\frac{\pi}{4}$$ (5)

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta \, d\theta$$ (5)

(5) (5)

$\left(\sqrt{\sec^2\theta} = \sec\theta\right)$ இங்கு $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta)}{(\sec\theta + \tan\theta)} d\theta$$ (5)

PAPERMASTER.LK

$$= ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \quad (5)$$

$$= ln(\sqrt{2}+1) - ln(\sqrt{2}-1) \quad (5)$$

$$= ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)}\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}\right)$$

$$= 2\, ln(\sqrt{2}+1). \quad (5)$$

50

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi-x)}}dx \quad (5)$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx \quad (5)$$

$$\Rightarrow I = \pi[2\ln(\sqrt{2}+1)] - I \quad (5)$$

$$\Rightarrow 2I = 2\,\pi\ln(\sqrt{2}+1)$$

$$\Rightarrow I = \pi\ln(\sqrt{2}+1). \quad (5)$$

20

---

16. $A \equiv (-2, -3)$ எனவும் $B \equiv (4, 5)$ எனவும் கொள்வோம். புள்ளி A இனூடாகச் செல்லும் l_1, l_2 ஆகிய கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் கோடு AB உடன் ஆக்கும் கூர்ங்கோணம் $\frac{\pi}{4}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக l_1, l_2 ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

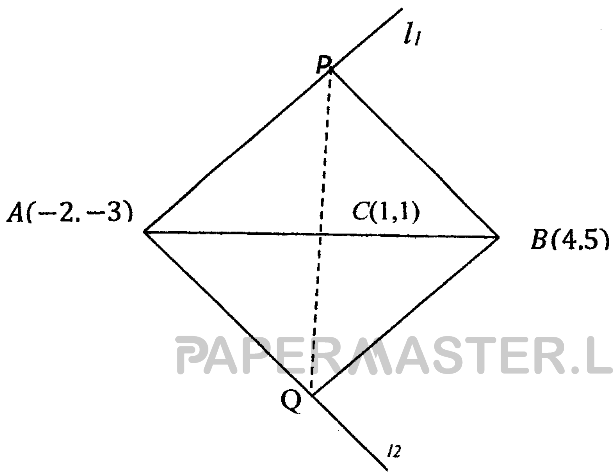
P, Q ஆகிய புள்ளிகள் முறையே l_1, l_2 ஆகியவற்றின் மீது, $APBQ$ ஒரு சதுரமாக இருக்கத்தக்கதாக, எடுக்கப்பட்டுள்ளன.

PQ இன் சமன்பாட்டைக் கண்டு, P, Q ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அத்துடன், A, P, B, Q ஆகிய புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டம் S இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$\lambda > 1$ எனக் கொள்வோம். புள்ளி $R \equiv (4\lambda, 5\lambda)$ ஆனது வட்டம் S இற்கு வெளியே இருக்கின்றதெனக் காட்டுக. புள்ளி R இலிருந்து வட்டம் S இற்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$\lambda (> 1)$ மாறும்போது இத்தொடுகை நாண்கள் ஒரு நிலைத்த புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றன எனக் காட்டுக.



PAPERMASTER.LK

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m-\frac{4}{3}}{1+\frac{4m}{3}}\right|$$ (10)

$\Rightarrow \left(m-\frac{4}{3}\right)^2 = \left(1+\frac{4m}{3}\right)^2$ (5)

$\Rightarrow 7m^2 + 48m - 7 = 0$

$\Rightarrow (7m-1)(m+7) = 0$

$\Rightarrow m = \frac{1}{7}$ or $m = -7$

(5) l_1 இன் சமன்பாடு : $y+3 = \frac{1}{7}(x+2) \Rightarrow x - 7y - 19 = 0$ (5) (1)

l_2 இன் சமன்பாடு : $y+3 = -7(x+2) \Rightarrow 7x + y + 17 = 0$ (10) **45**

PQ இன் சமன்பாடு : $y - 1 = \frac{-3}{4}(x-2) \Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0$ (1)

PQ , l_1 இன் இடைவெட்டும் புள்ளி $P \equiv (5,-2)$ (5)

$Q \equiv (x_0, y_0)$ எனின்

$\Rightarrow \frac{5+x_0}{2} = 1 \Rightarrow x_0 = -3$ (5)

$\frac{-2+y_0}{2} = 1 \Rightarrow y_0 = 4$ (5)

$Q \equiv (-3, 4)$.

25

A, P, B, Q என்னும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டமானது, AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டமாகும்.

$(y-5)(y+3) + (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ (10)

20

---

(10)

வட்டத்தின் ஆரை 5

$\lambda > 1$ ஆக $CR^2 = (4\lambda - 1)^2 - (5\lambda - 1)^2$ (10)

$CR^2 - 25 = (4\lambda - 1)^2 - (5\lambda - 1)^2 - 25$ (5)

$= 41\lambda^2 - 18\lambda - 23$

$= (\lambda - 1)(41\lambda + 23) > 0$ (10)

எனவே R ஆனது வட்டத்திற்கு வெளியே கிடக்கும். (5)

30

PAPERMASTER.LK

R இல் தொடுநாணின் சமன்பாடு :

$$x(4\lambda) + y(5\lambda) - (x + 4\lambda) - (y + 5\lambda) - 23 = 0$$ (10)

$$(-x - y - 23) + \lambda(4x + 5y - 9) = 0$$ (5)

என்பது $\lambda > 1$ ஆக இருக்கும் போது $4x + 5y - 9 = 0,\ x + y + 23 = 0$ என்னும் கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியினூடு செல்லும் (10)

இது ஓர் நிலைத்த புள்ளி (5)

30

---

17. (a) $0 \le \theta \le \pi$ இற்கு $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ ஐத் தீர்க்க.

$\cos 2\theta$ ஐயும் $\cos 3\theta$ ஐயும் $\cos\theta$ இல் எழுதி,

$\cos 2\theta + \cos 3\theta = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ எனக் காட்டுக; இங்கு $t = \cos\theta$.

இதிலிருந்து, சமன்பாடு $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ இன் மூன்று மூலங்களையும் எழுதி, சமன்பாடு $4t^2 - 2t - 1 = 0$ இன் மூலங்கள் $\cos\frac{\pi}{5},\ \cos\frac{3\pi}{5}$ எனக் காட்டுக.

$\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ என்பதை உய்த்தறிக.

(b) ABC ஒரு முக்கோணி எனவும் D ஆனது BC மீது, $BD : DC = m : n$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ள புள்ளி எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $m, n > 0$ ஆகும். $B\hat{A}D = \alpha$ எனவும் $D\hat{A}C = \beta$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. BAD, DAC ஆகிய முக்கோணிகளுக்குச் சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி,

$\frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $b = AC$ உம் $c = AB$ உம் ஆகும்.

இதிலிருந்து, $\frac{mb - nc}{mb + nc} = \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

(c) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ எனக் காட்டுக.

(a) $0 \le \theta \le \pi$ ஆக $\cos 3\theta = -\cos 2\theta = \cos(\pi - 2\theta)$ (5) (5)

$$3\theta = 2n\pi \pm (\pi - 2\theta),\ n \in \mathbb{Z}.$$ (5)

$$5\theta = 2n\pi + \pi\ ;\ \theta = 2n\pi - \pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$0 \le \theta \le \pi$ ஆதலால் , $\theta = \pi,\ \frac{\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5}$ என்பன தீர்வுகளாகும். (5) (5) (5)

PAPERMASTER.LK

30

(5) (5)

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ and $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$

$\cos 2\theta + \cos 3\theta = \cos 3\theta = 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1$

$= 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1,$ இங்கு $t = \cos\theta.$ (10)

20

$4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0 \longrightarrow (1)$ இன் மூலங்கள் $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ இன் மூலங்களாகும்.

எனவே $\cos\pi, \cos\frac{\pi}{5}, \cos\frac{3\pi}{5}$ என்பன (1) இன் மூலங்களாகும். (10)

$\cos\pi = -1 \implies t + 1$ என்பது $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ இன் காரணியாகும்.

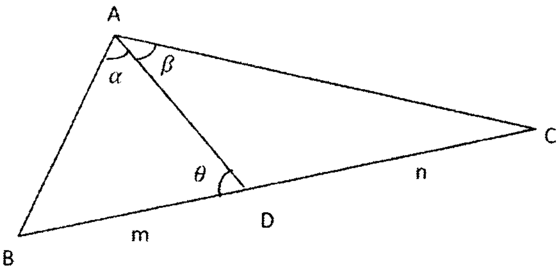
$\implies 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = (t+1)(4t^2 - 2t - 1) = 0$ (10)

$\implies \cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$ என்பன $4t^2 - 2t - 1 = 0.$ இன் மூலங்களாகும். (5)

$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4\times 4\times 1}}{2\times 4} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ (5)

$\cos\frac{3\pi}{5} < 0$ என்பதால் $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ ஆகும். (5) 35

(b).



$B\widehat{D}A = \theta$ என்க

சைன் விதிப்படி:

முக்கோணம் BAD இல் : $\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\theta}$ (5) + (5)

முக்கோணம் ADC இல்: $\frac{CD}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin(\pi-\theta)}$ (1)

PAPERMASTER.LK

$$\Rightarrow \frac{m \sin\beta}{n \sin\alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad (5)$$

25

$$mb = nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{mb - nc}{mb + nc} = \frac{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - nc}{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + nc} \quad (5)$$

$$= \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \quad (5)\ (5)$$

$$= \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \quad (5)$$

20

(c) Let $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma$ and $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \delta, \quad 0 < \delta, \gamma < \frac{\pi}{2}$

$$(5) \quad 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$\Leftrightarrow \tan(2\gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$ ($\frac{\pi}{2} - \delta$ கூர்ங்கோணம் ஆதலால் 2γ கூர்ங்கோணம் ஆகும்)

$$\tan 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1 - \tan^2\gamma} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \quad (5)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cot\delta = \frac{3}{4} \quad (5)$$

$$\therefore 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

30

PAPERMASTER.LK

அந்தரங்கமானது

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த (உயர்தர)ப் பரீட்சை - 2018

10 - இணைந்த கணிதம் - II

புள்ளியிடும் திட்டம்

PAPERMASTER.LK

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காக தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளப்படும் கருத்துக்களுக்கேற்ப இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றப்படலாம்.

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன

முழுப்பதிப்புரிமையுடையது

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நுட்ப முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்பட்டியலில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஓர் அங்கீகரிக்கப்பட்ட முறையைக் கடைப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிவப்பு நிற குமிழ்முனை பேனாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரீட்சகரின் குறியீட்டெண்ணைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது **தெளிவான இலக்கத்தில்** எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தனிக்கோட்டினால் கீறிவிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி, சிற்றொப்பத்தை இடவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உபபகுதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் △ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா இலக்கத்துடன் ☐ இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் பதிவதற்கு பரீட்சகர்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i) ....
....
.... ✓ $\frac{4}{5}$

(ii) ....
....
.... ✓ $\frac{3}{5}$

(iii) ....
....
.... ✓ $\frac{3}{5}$

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

பல்தேர்வு விடைத்தாள் (துளைத்தாள்)

1. க.பொ.த.(உ. தர) மற்றும் தகவல் தொழிநுட்பப் பரீட்சைக்கான துளைத்தாள் திணைக்களத்தால் வழங்கப்படும். சரியாக துளையிடபட்டு அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாள் தங்களுக்கு கிடைக்கப்பெறும். அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாளைப் பயன்படுத்துவது பரீட்சகரின் கடமையாகும்.
2. அதன் பின்னர் விடைத்தாளை நன்கு பரிசீலித்துப் பார்க்கவும். ஏதாவது வினாவுக்கு, ஒரு விடைக்கும் அதிகமாக குறியிட்டிருந்தாலோ, ஒரு விடைக்காவது குறியிடப்படாமலிருந்தாலோ தெரிவுகளை வெட்டிவிடக்கூடியதாக கோடொன்றைக் கீறவும். சில வேளைகளில் பரீட்சார்த்தி முன்னர் குறிப்பிட்ட விடையை அழித்துவிட்டு வேறு விடைக்குக் குறியிட்டிருக்க முடியும். அவ்வாறு அழித்துள்ள போது நன்கு அழிக்காது விட்டிருந்தால், அவ்வாறு அழிக்கப்பட்ட தெரிவின் மீதும் கோடிடவும்.
3. துளைத்தாளை விடைத்தாளின் மீது சரியாக வைக்கவும். சரியான விடையை ✓ அடையாளத்தாலும் பிழையான விடையை O அடையாளத்தாலும் இறுதி நிரலில் அடையாளமிடவும். சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை அவ்வவ் தெரிவுகளின் இறுதி நிரையின் கீழ் அத்துடன் அவற்றை கூட்டி சரியான புள்ளியை உரிய கட்டத்தில் எழுதவும்.

PAPERMASTER.LK

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரீட்சார்த்திகளால் விடைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இடங்களையும், பக்கங்களையும் குறுக்குக் கோடிட்டு வெட்டிவிடவும். பிழையான பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோடிடவும். புள்ளி வழங்கக்கூடிய இடங்களில் ✓ அடையாளமிட்டு அதனைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஓவலண்ட் கடதாசியின் இடது பக்கத்தில் குறிக்கவும்.
3. சகல வினாக்களுக்கும் கொடுத்த முழுப் புள்ளியை விடைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பெட்டியினுள் வினா இலக்கத்திற்கு நேராக 2 இலக்கங்களில் பதியவும். வினாத்தாளில் உள்ள அறிவுறுத்தலின் படி வினாக்கள் தெரிவு செய்யப்படல் வேண்டும். எல்லா வினாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விடைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விடைகளின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கூட்டில் பதியவும். விடைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும். ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விதத்தில் எழுதுவும்.

புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

இம்முறை சகல பாடங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவினுள் கணிப்பிடப்படமாட்டாது. இது தவிர ஒவ்வொரு வினாப் பத்திரத்துக்குமான இறுதிப்புள்ளி தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும். வினாப்பத்திரம் I இற்குரிய புள்ளிப்பட்டியலில் "வினாப்பத்திரம் I" என்ற நிரலில் பதிந்து எழுத்திலும் எழுத வேண்டும். பகுதிப்புள்ளிகளை உள்ளடக்கி "வினாப்பத்திரம் II" எனும் நிரலில் வினாப்பத்திரம் II இற்குரிய இறுதிப்புள்ளியை பதிய வேண்டும். 51 சித்திரப் பாடத்திற்குரிய I, II, மற்றும் III ஆம் வினாப்பத்திரங்களுக்குரிய புள்ளிகளை தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதிந்து எழுத்திலும் எழுதுதல் வேண்டும்.

ooo

PAPERMASTER.LK

க.பொ.த. (உ/த) பரீட்சை – 2018

10 - இணைந்த கணிதம்

புள்ளித்திட்டம்

வினாத்தாள் II :

பகுதி **A : 10 X 25 = 250**

பகுதி **B : 05 X 150 = 750**

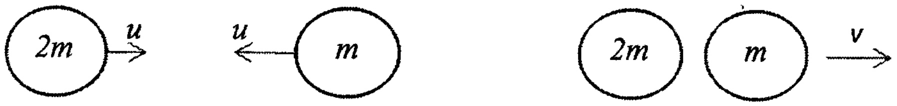
மொத்தம் = 1000/10

வினாத்தாள் II- இறுதிப் புள்ளி = 100

PAPERMASTER.LK

இணைந்த கணிதம்-II

1. ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஒரே நேர்கோட்டின் வழியே ஒன்றையொன்று நோக்கி ஒரே கதி u இல் இயங்கும் முறையே $2m, m$ என்னும் திணிவுகளை உடைய A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் நேரடியாக மோதுகின்றன. மொத்தலுக்குச் சற்றுப் பின்னர் துணிக்கை A ஓய்வுக்கு வருகின்றது. மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ எனவும் மொத்தல் காரணமாக B மீது உஞற்றப்படும் கணத்தாக்கின் பருமன் $2mu$ எனவும் காட்டுக.



தொகுதிக்கு $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ ஐ பிரயோகிக்க

$\rightarrow \quad 0 = [2m(0) + mv] - [2mu - mu]$ (5)

$mv = mu.$ (5)

நியூட்டனின் மீள்தன்மை விதிப்படி: $v - 0 = -e(-u - u)$ (5)

$u = e\,(2u)$

$e = \frac{1}{2}.$ (5)

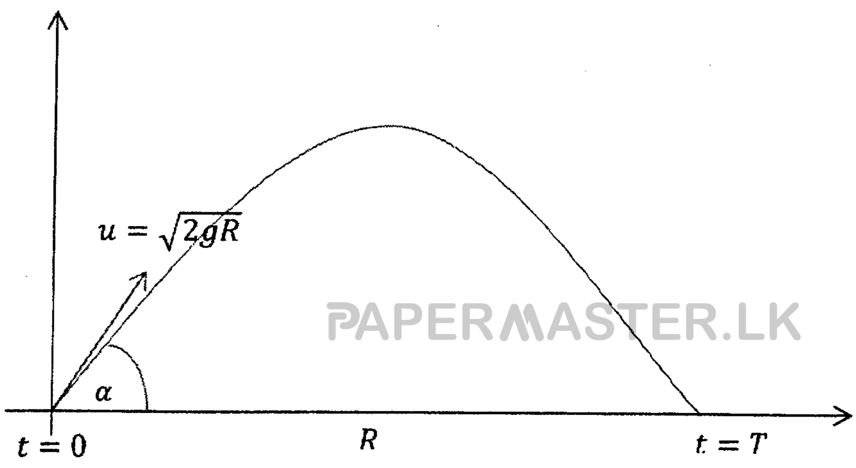
B இன் மீதான கணத்தாக்கு $= B$ இன் மீதான உ.மா. $= mv - m(-u)$

$= mu + mu = 2mu.$ (5)

25

---

2. கிடைத் தரை மீது உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு துணிக்கை கிடையுடன் கோணம் $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ ஐ ஆக்கும் ஒரு திசையில் தொடக்கக் கதி $u = \sqrt{2gR}$ உடன் எறியப்படுகின்றது; இங்கு R ஆனது தரையின் மீது எறிபடையின் கிடை வீச்சாகும். எறியத்தின் இரு இயல்தகு தொடக்கத் திசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் $\frac{\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.



PAPERMASTER.LK

$\uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐ பிரயோகிப்பதால் பறப்பு நேரம் T பெறப்படும்

$\uparrow\ 0 = (u \sin\alpha)T - \frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow T = \frac{2u \sin\alpha}{g}$ (5) $R = (u \cos\alpha).\ T = \frac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$ (5)

$R = 2R \sin 2\alpha;\ \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$ (5)

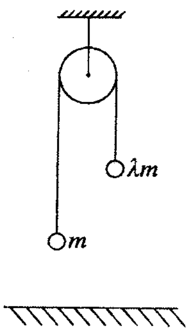
$2\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$

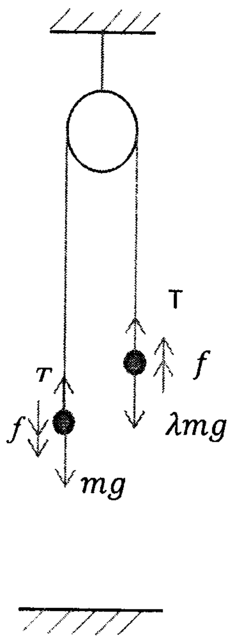
எறியற் கோணங்களின் இரண்டு இயல்தகு நிலைகள் $\alpha_1 = \frac{\pi}{12};\ \alpha_2 = \frac{5\pi}{12};$ (5)

$\Rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{12}(5-1) = \frac{\pi}{3}$ (5)

25

3. ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் இரு நுனிகளுடன் திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உம் திணிவு λm ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கை Q உம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு இழை இறுக்கமாக இருக்க, இத்தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை P ஆனது ஆர்முடுகல் $\frac{g}{2}$ உடன் கீழ்நோக்கி இயங்குகின்றது. $\lambda = \frac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.
துணிக்கை P ஒரு **மீள்தன்மையின்றிய** கிடை நிலத்தைக் கதி v உடன் மோதுகின்றது அத்துடன் துணிக்கை Q ஒருபோதும் கப்பியை அடையாது எனின், துணிக்கை P நிலத்தில் மோதும் கணத்திலிருந்து துணிக்கை Q உயர்ந்தபட்ச உயரத்தை அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.





PAPERMASTER.LK

$\underline{F} = m\underline{a}$ ஐ பிரயோகிக்க

P இற்கு: ↓ $mg - T = m\left(\frac{g}{2}\right)$ -------------------- (1) (5)

Q இற்கு: ↑ $T - \lambda mg = \lambda m(\frac{g}{2})$--------------------(2) (5)

$(1) + (2) \Rightarrow (1 - \lambda)mg = (1 + \lambda)m(g/2)$ (5)

$\Rightarrow \quad 2(1 - \lambda) = (1 + \lambda)$

$\lambda = \frac{1}{3}.$ (5)

Q அதியுயர் உயரத்தை அடைய எடுத்த நேரம் T எனின், v=u+ft பிரயோகிக்க

↑ $0 = v - g\,T \quad \Rightarrow 0 = v - gT$

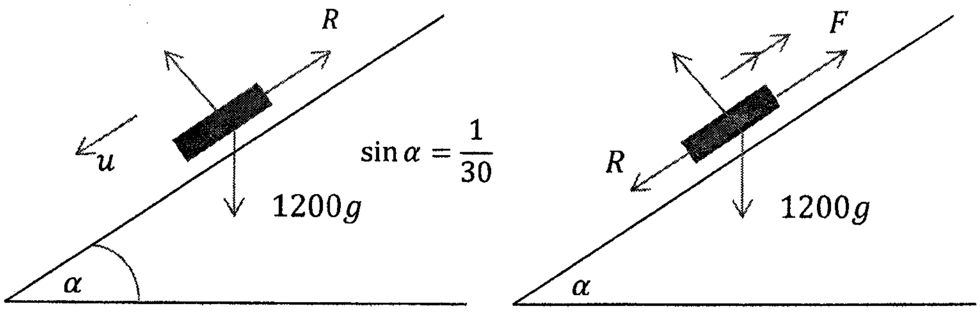
$T = \frac{v}{g}.$ (5)

25

PAPERMASTER.LK

4. 1200 kg திணிவுள்ள ஒரு கார், அதன் எஞ்சின் நிறுத்தப்பட்ட நிலையில், கிடையுடன் சாய்வு α இல் உள்ள ஒரு நேர் வீதி வழியே, இங்கு $\sin\alpha = \frac{1}{30}$, ஒரு குறித்த மாறாக் கதியுடன் கீழ்நோக்கி இயங்குகின்றது. புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகல் $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ எனக் கொண்டு காரின் இயக்கத்திற்கான தடையை நியூற்றனில் காண்க.

கார் இத்தடையின் கீழ் அவ்வீதி வழியே மேல்நோக்கி ஓர் ஆர்முடுகல் $\frac{1}{6}\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ உடன் செல்லும்போது அதன் கதி $15\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ஆகவுள்ள கணத்தில் எஞ்சினின் வலுவைக் கிலோவாற்றிற் காண்க.



தடை R உடன் மாத்திரம்

$\underline{F} = m\underline{a}$ ஐ பிரயோகிக்க

↙ $1200\,g\sin\alpha - R = 0$ (5)

$\Rightarrow \quad R = 1200(10)\left(\frac{1}{30}\right) = 400\ N.$ (5)

கார் உஞற்றும் விசை F உடன் ஏறும் போது

↗ $F - R - 1200\,g\sin\alpha = 1200\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow F = 1000\mathrm{N}$

(5)

$\Rightarrow \quad F = 1000 = \frac{P}{V}$ இங்கு வேகம் V இல் வலு P ஆகும்

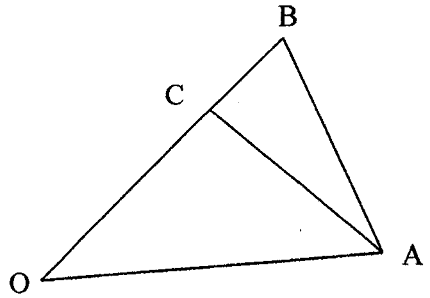
எனவே வலு $P = F\,V = 15\ (1000)$ உவாற்று (5)

P = 15 kW. (5)

25

PAPERMASTER.LK

5. வழக்கமான குறிப்பீட்டில், $3\mathbf{i}, 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ ஆகியன ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி முறையே A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகளெனக் கொள்வோம். C ஆனது நேர்கோடு OB மீது, $O\hat{C}A = \frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ள புள்ளி எனவும் கொள்வோம். $\overrightarrow{OC}$ ஐ $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ஆகியவற்றில் காண்க.



$\overrightarrow{OA} = 3\mathbf{i}, \qquad \overrightarrow{OB} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \lambda(\overrightarrow{OB}) = \lambda(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$, இங்கு λ ஒரு எண்ணி (5)

$\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CA}$ இற்கு செங்குத்தாகும் $\Rightarrow \lambda(2\mathrm{i} + 3\mathrm{j}).\{-\lambda(2\mathrm{i} + 3\mathrm{j}) + 3\mathrm{i}\} = 0$ (5) (5)

$6 - 13\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{6}{13}$ (5)

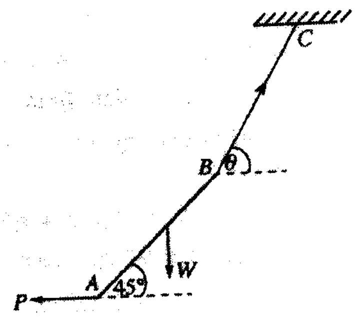
எனவே $\overrightarrow{OC} = \frac{12}{13}\mathrm{i} + \frac{18}{13}\mathrm{j}$. (5)

25

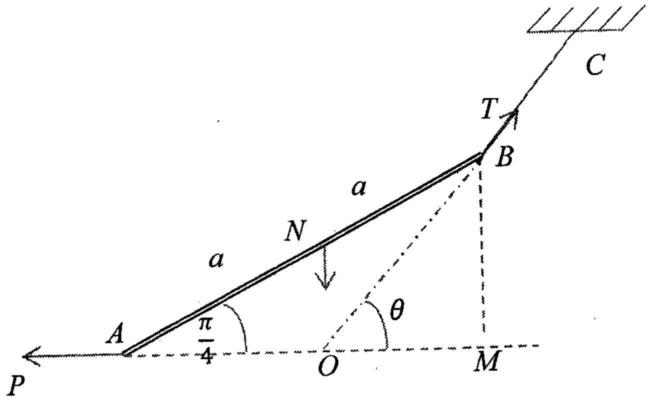
PAPERMASTER.LK

6. $2a$ நீளமும் W நிறையும் கொண்ட ஒரு சீரான கோல் AB ஆனது ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழை BC இனாலும் முனை A இல் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு கிடை விசை P இனாலும் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு நாப்பத்தில் தாங்கப்படுகின்றது. கோல் கிடையுடன் கோணம் $45°$ ஐ ஆக்குகின்றதெனத் தரப்படின், இழை BC கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் θ ஆனது $\tan\theta = 2$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

இந்நிலையில், இழையில் உள்ள இழுவையை W இற் காண்க.



....



$BM = \frac{2a}{\sqrt{2}}$; $OM = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (5)

$\tan\theta = \frac{BM}{OM} = \frac{2a/\sqrt{2}}{a/\sqrt{2}}$ (5)

$\tan\theta = 2$

↑ $T \sin\theta - W = 0$ (5)

$= \frac{W}{\sin\theta} = \frac{W\sqrt{5}}{2}$ (5) $\because \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(5)

25

PAPERMASTER.LK

7. A, B ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி S இல் இரு நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில் $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ ஆகும். $P(A\mid B')$, $P(A'\cap B')$, $P(B'\mid A')$ ஆகியவற்றைக் காண்க; இங்கு A', B' ஆகியன முறையே A, B ஆகியவற்றின் நிரப்பு நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கின்றன.

நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள்:

$$P(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{1}{4},\ P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cap B')+P(A\cap B)=P(A)$$

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$ (5)

எனவே

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A\cap B')}{1-P(B)}=\frac{1/6}{3/4}=\frac{2}{9}$$ (5)

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$ (5)

$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$$ (5)

$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{7/12}{1-1/3}=\frac{7/12}{2/3}=\frac{7}{8}$$ (5)

25

PAPERMASTER.LK

8. ஒரு பையில் நிறத்தைத் தவிர எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமனான 4 சிவப்புப் பந்துகளும் 3 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. பிரதிவைப்பு இல்லாமல் ஒரு தடவைக்கு ஒன்று வீதம் நான்கு பந்துகள் எழுமாற்றாகப் பையிலிருந்து வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன.
(i) வெளியே எடுக்கப்படும் பந்துகள் ஒரே நிறத்தைக் கொண்டனவாக இருப்பதற்கான,
(ii) எவையேனும் இரு அடுத்துவரும் எடுப்புகளில் வெளியே எடுக்கப்படும் பந்துகள் வெவ்வேறு நிறங்களைக் கொண்டனவாக இருப்பதற்கான
நிகழ்தகவைக் காண்க.

(i) எல்லாம் சிவப்பு: $\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{35}$ (5)

எல்லாம் கறுப்பு: சாத்தியமில்லை

விடை $=\frac{1}{35}$ (5)

(ii)

$RBRB: \frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{35}$ (5)

$BRBR: \frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{35}$ (5)

விடை$=\frac{6}{35}$ (5)

25

9. ஒவ்வொன்றும் 8 இலும் குறைவான ஐந்து நேர் நிறையெண்கள் ஓர் ஆகாரத்தை மாத்திரம் கொண்டுள்ளன. அவற்றின் இடை, ஆகாரம், இடையம் ஆகியன 6 : 10 : 5 விகிதங்களில் உள்ளன. இவ்வைந்து நிறையெண்களையும் காண்க.

ஆகாரம் $2a$ என்க

எனவே இதற்கான நேர் நிறைவெண்கள் $b, c, a, 2a, 2a$ (5)

இடை : ஆகாரம்$= 6:10$

$$\therefore \frac{10(b+c+5a)}{5} = 6\times 2a \Rightarrow b+c=a$$ (5) (5)

PAPERMASTER.LK

∴ தரப்பட்ட நேர் நிறைவெண்கள் $1, 2, 3, 6, 6.$ (10)

25

10. ஒரு குறித்த நகரத்தின் வெப்பநிலை 20 நாட்களுக்குத் தினமும் பதியப்பட்டது. இத்தரவுத் தொகுதிக்கு இடை μ உம் நியம விலகல் σ உம் முறையே 28 °C, 4 °C எனக் கணிக்கப்பட்டன. எனினும், மேற்குறித்த வெப்பநிலைகளில் இரண்டு தவறுதலாக 35 °C, 21 °C எனப் பதியப்பட்டிருப்பதாகக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு, 25 °C, 31 °C எனப் பின்னர் திருத்தப்பட்டன. μ, σ ஆகியவற்றின் சரியான பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$\mu = 28, \qquad \sigma_1 = 4$$

மாற்றப்பட்ட தரவுகள்: $35 \longrightarrow 25(-10)$

$21 \longrightarrow 31(+10)$

∴ கூட்டுத்தொகை மாற்றப்படாமல் அவ்வாறே இருக்கும்.

∴ μ , 28 ஐ எடுக்கும் (5)

முன்னைய : $\sum x_i^2 = 20 \times \sigma_1^2 + 20\mu^2 = 20(28^2 + 4^2)$ (5)

புதிய: $\sum x_i^2$ =முன்னைய $\sum x_i^2 - 35^2 - 21^2 + 25^2 + 31^2$ (5)

$= 20(28^2 + 4^2) - 8 \times 10$ (5)

புதிய: $\sigma^2 = \frac{15920 - 20\times 28^2}{20} = 796 - 784 = 12 \Longrightarrow \sigma = \sqrt{12}$

(5) 25

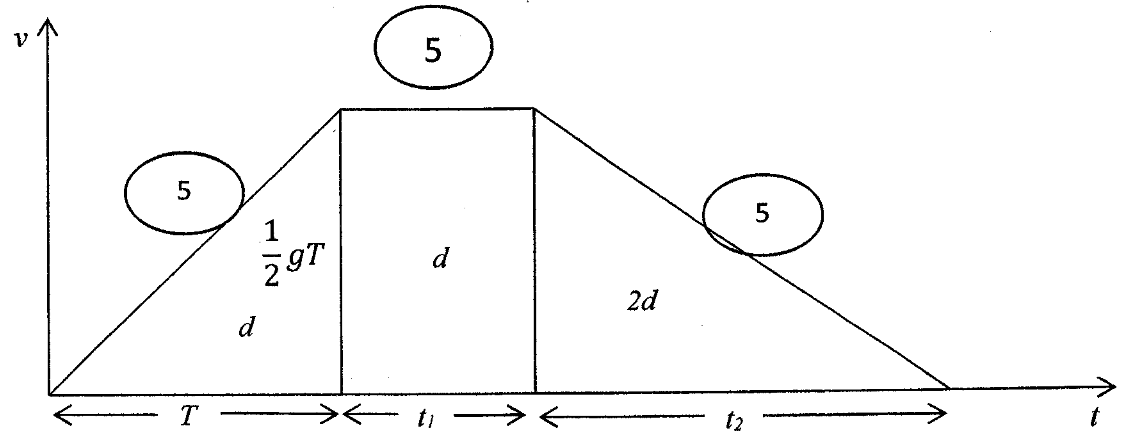
PAPERMASTER.LK

11. (*a*) ஆழம் $4d$ மீற்றரை உடைய ஒரு சுரங்கக் கிடங்கில் இயங்கும் ஓர் உயர்த்தி நேரம் $t = 0$ இல் ஒரு புள்ளி A இல் ஓய்விலிருந்து நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி இயங்கத் தொடங்குகின்றது. முதலில் அது மாறா ஆர்முடுகல் $\frac{g}{2}$ m s^{-2} உடன் தூரம் d மீற்றரிற்கும் பின்னர் அது அவ்வியக்கத்தின் இறுதியில் அடைந்த வேகத்துடன் மேலும் தூரம் d மீற்றரிற்கும் இயங்குகின்றது. பின்னர் உயர்த்தி A இற்குக் கீழே தூரம் $4d$ மீற்றரில் உள்ள புள்ளி B இல் செப்பமாக ஓய்வுக்கு வருமாறு மாறா அமர்முடுகலுடன் எஞ்சியுள்ள தூரத்திற்கும் இயங்குகின்றது.

உயர்த்தியின் இயக்கத்துக்கான வேக-நேர வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து, உயர்த்தி A இலிருந்து B இற்குக் கீழ்நோக்கி இயங்குவதற்கு எடுக்கும் மொத்த நேரத்தைக் காண்க.

(*b*) ஒரு கப்பல் புவி தொடர்பாகச் சீரான கதி u km h^{-1} உடன் வடக்கு நோக்கிச் செல்கின்றது. ஒரு குறித்த கணத்தில் ஒரு படகு B_1 ஆனது தெற்கிலிருந்து கோணம் β கிழக்கே **கப்பலின் பாதையிலிருந்து** தூரம் p km இல் இருப்பதாகக் கப்பலிலிருந்து அவதானிக்கப்படுகின்றது. அதே கணத்தில், ஒரு படகு B_2 ஆனது கப்பலிலிருந்து மேற்கே தூரம் q km இல் இருப்பதாக அவதானிக்கப்படுகின்றது. இரு படகுகளும் கப்பலை இடைமறிக்கும் நோக்குடன் நேர்கோட்டுப் பாதைகளில் புவி தொடர்பாகச் சீரான கதி $v\,(> u)$ km h^{-1} உடன் செல்கின்றன. புவி தொடர்பாகப் படகுகளின் பாதைகளைத் துணிவதற்கு வேக முக்கோணிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.
புவி தொடர்பாகப் படகு B_1 இன் பாதை வடக்கிலிருந்து மேற்கே கோணம் $\beta - \sin^{-1}\left(\frac{u \sin\beta}{v}\right)$ ஐ ஆக்குகின்றதெனக் காட்டி, புவி தொடர்பாகப் படகு B_2 இன் பாதையைக் காண்க.
$\beta = \frac{\pi}{3}$, $v = \sqrt{3}u$ எனக் கொள்வோம். $3q^2 > 8p^2$ எனின், படகு B_1 ஆனது படகு B_2 இற்கு முன்பாகக் கப்பலை இடைமறிக்குமெனக் காட்டுக.



15

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}gT\right) \text{-------------} (1) \quad \textcircled{5}$$

$$d = \left(\frac{1}{2}gT\right)t_1 \text{-----------} (2) \quad \textcircled{5}$$

$$(1), (2) \quad \Rightarrow t_1 = \frac{T}{2} \quad \textcircled{5}$$

PAPERMASTER.LK

$$2d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}gT\right)\cdot t_2$$ (5)

(1) , (3)

$\Rightarrow t_2 = 2T$ (5)

$(1) \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4d}{g}}$ (5)

மொத்த நேரம் $= T + t_1 + t_2$

$= T + \frac{T}{2} + 2T = \frac{7T}{2} = 7\sqrt{\frac{d}{g}}$ (5)

35

(b) $\underline{V}(S, E) = u$,

$\underline{V}(B_i, E) = v$; $i = 1, 2,$

$\underline{V}(B_1, S) =$,

(10)

$\underline{V}(B_2, S) = \longrightarrow$.

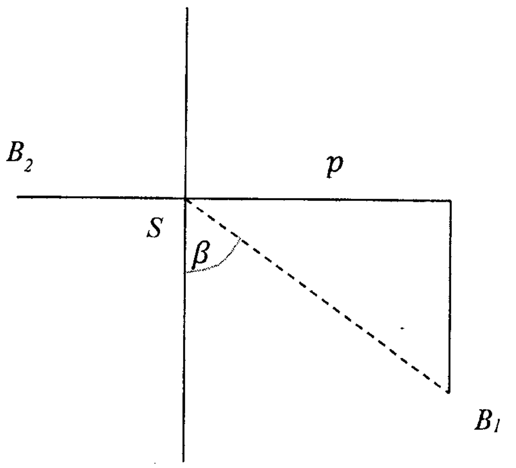
$\underline{V}(B_i, E) = \underline{V}(B_i, S) + \underline{V}(S, E)$

$= \underline{V}(S, E) + \underline{V}(B_i, S)$ (10)

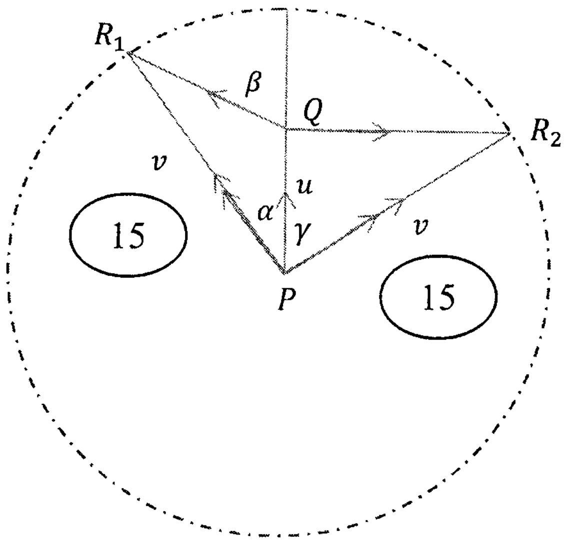
$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i}$

PAPERMASTER.LK

$= \overrightarrow{PR_i}$; $i = 1, 2.$



$t = 0$



$\Delta\ PQR$, சைன் விதிப்படி $\dfrac{v}{\sin\beta} = \dfrac{u}{\sin(\beta-\alpha)}$ (5)

$$\sin(\beta-\alpha) = \frac{u\sin\beta}{v}$$

$$(\beta-\alpha) = \sin^{-1}\left(\frac{u\sin\beta}{v}\right)$$

$$\alpha = \beta - \sin^{-1}\left(\frac{u\sin\beta}{v}\right) \text{------------- (i)}$$ (5)

$\therefore$ பூமி சார்பான B_1 இன் பாதை அமைக்கும் கோணம் α ஆனது (i)இன் படி வடக்குடன் α கோணம் மேற்கு ஆகும்

இதே போல் பூமி சார்பான B_2 இன் பாதை அமைக்கும் கோணம் γ ஆனது, வடக்குடன் γ கோணம் கிழக்கு ஆகும்

இங்கு $\gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{u}{v}\right)$. (5)

65

PAPERMASTER.LK

(ii) $\beta = \dfrac{\pi}{3}$; $v = \sqrt{3}u$.என எடுக்க

எனவே, $\alpha = \dfrac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\dfrac{u\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\dfrac{u}{\sqrt{3}}}\right) = \dfrac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$. (5)

எனவே PQ = QR_1

$V(B_1,S) = u$ (5)

B_1 இன் தொடர்பான பாதையின் தூரம் $\dfrac{2p}{\sqrt{3}}$ (5)

B_1 இற்கு, நேரம் $t_1 = \dfrac{\dfrac{2p}{\sqrt{3}}}{u} = \dfrac{2p}{\sqrt{3}u}$ (5)

B_2 இற்கு, நேரம் $t_2 = \dfrac{q}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \dfrac{q}{u\sqrt{3-1}} = \dfrac{q}{\sqrt{2}u}$. (5)

$t_1 < t_2$ எனின் B_1 ஆனது B_2 இற்கு முன் S ஐ சந்திக்கும்

அதாவது $\dfrac{2p}{\sqrt{3}u} < \dfrac{q}{\sqrt{2}u}$ எனின் (5)

$\Rightarrow 2\sqrt{2}p < \sqrt{3}q$

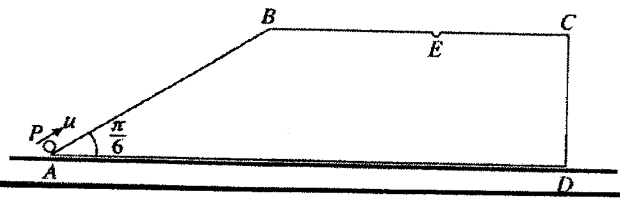
$\Rightarrow 8p^2 < 3q^2$. (5)

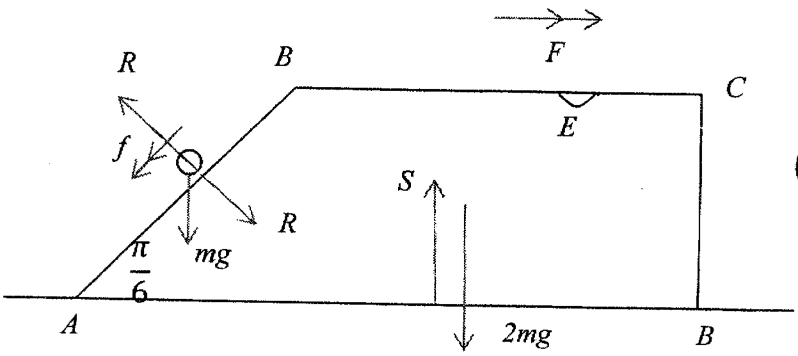
35

PAPERMASTER.LK

12. (*a*) உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள $AB = a$ ஆகவும் $B\hat{A}D = \frac{\pi}{6}$ ஆகவும் இருக்கும் சரிவகம் $ABCD$ ஆனது திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான சீரான குற்றியின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாக உள்ள ஒரு நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டாகும். AD, BC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமானவையும் கோடு AB ஆனது அதனைக் கொண்டுள்ள முகத்தின் ஓர் அதியுயர் சரிவுக் கோடும் ஆகும். AD ஐக் கொண்ட முகம் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது இருக்குமாறு குற்றி வைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது புள்ளி A இல் வைக்கப்பட்டு, அதற்கு $\overrightarrow{AB}$ வழியே ஒரு வேகம் u தரப்படுகின்றது; இங்கு $u^2 = \frac{7ga}{3}$. குற்றி தொடர்பாக P இன் அமர்முடுகல் $\frac{2g}{3}$ எனக் காட்டி, துணிக்கை P ஆனது B ஐ அடையும்போது குற்றி தொடர்பாகத் துணிக்கை P இன் வேகத்தைக் காண்க.

அத்துடன் குற்றியின் மேல் முகத்தில் BC மீது $BE = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ ஆகவுள்ள புள்ளி E இல் ஒரு சிறிய துளை உள்ளது. குற்றி தொடர்பாக உள்ள இயக்கத்தைக் கருதுவதன் மூலம் துணிக்கை P ஆனது E இல் உள்ள துளையினுள்ளே விழுமெனக் காட்டுக.





10

$a(P,W) = f$ ↙ $\qquad a(W,E) = F$ →→ (5)

$F = ma$

தொகுதிக்கு → $\quad 0 = m\left(-f\cos\frac{\pi}{6} + F\right) + 2mF$ (15)

$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}f + 3F \Rightarrow \frac{\sqrt{3}f}{6} = F$ (5)

P இற்கு ↙ $\quad mg\cos\frac{\pi}{3} = m\left(f - F\cos\frac{\pi}{6}\right)$ (10)

PAPERMASTER.LK

$\frac{g}{2} = f - \frac{\sqrt{3}f}{2} \Rightarrow \frac{g}{2} = f - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}f$ (5)

$\Rightarrow f = \frac{2g}{3}$. (5)

குற்றி தொடர்பாக B இல் P இன் வேகம் v என்க.

$v^2 = u^2 + 2as$ பிரயோகிக்க

$$v^2 = u^2 - 2\left(\frac{2g}{3}\right)a$$ (5)

$$= \frac{7ga}{3} - \frac{4ga}{3}$$

$$v = \sqrt{ga}$$ (5)

65

முகம் AB ஐ விட்டு விலகிய பின் குற்றி தொடர்பான **P** இன் இயக்கம்

$a(P,W) = a(P,E) + a(E,W)$

$= \downarrow g + \underline{0}$ $\because$ குற்றி சீரான வேகத்துடன் இயங்கும்

$= \downarrow g$ (10)

துணிக்கை P குற்றியின் மேல் முகத்தை மீண்டும் அடைய எடுத்த நேரம் t என்க.

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ பிரயோகிக்க

$\uparrow \quad 0 = v\sin\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}gt^2$ (5)

$$= \frac{v}{z}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{a}{g}}.$$ (5)

நேரம் t இல் கிடையான சார்பு இடப்பெயர்ச்சி R என்க.

$R = v \quad \cos\frac{\pi}{6}\cdot t$ (5)

$R = v\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{ga}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{a}{g}} \quad \therefore R = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ (5)

PAPERMASTER.LK

எனவே துணிக்கை E இலுள்ள துளையினுள் விழும்.

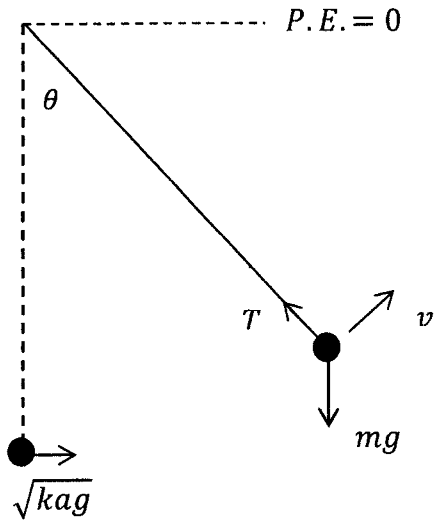
30

(b) நீளம் a ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடனும் மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை O இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே ஓய்வில் தொங்குகின்றது. அதற்குப் பருமன் $u = \sqrt{kag}$ ஐ உடைய ஒரு கிடை வேகம் தரப்படுகின்றது; இங்கு $2 < k < 5$. இழை கோணம் θ இனூடாகத் திரும்பி இன்னும் இறுக்கமாக இருக்கும்போது துணிக்கையின் கதி v ஆனது $v^2 = (k-2)ag + 2ag\cos\theta$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

இவ்வமைவில் இழையில் உள்ள இழுவையைக் காண்க.

$\theta = \alpha$ ஆக இருக்கும்போது இழை தளரும் என்பதை **உய்த்தறிக**; இங்கு $\cos\alpha = \frac{2-k}{3}$.

b)



(5)

சக்திக் காப்புத் தத்துவத்தின் படி:

$$-mga + \frac{1}{2}m(kag) = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$$ (15)

$$\Rightarrow v^2 = -2ga + kag + 2ag\cos\theta$$

$$v^2 = (k-2)ag + 2ag\cos\theta$$ (5)

[25]

$F = ma$ பிரயோகிக்க

$$\nwarrow T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a}$$ (10)

PAPERMASTER.LK

$$\Rightarrow T - mg\cos\theta + \frac{m}{a}[(k-2)ag + 2ag\cos\theta]$$ (5)

இழுவை: $T=(k-2)mg+3mg\cos\theta$.

θ அதிகரிக்க v, T ஆகிய இரண்டும் குறையும்

$T=mg(3\cos\theta-2+k)$

$3\cos\theta-2+k=0$ ஆகும் போது, $T=0$, (5)

i.e. $\cos\theta=\dfrac{2-k}{3}$. (5)

$\cos\theta=\dfrac{2-k}{3}$ ஆகும் போது

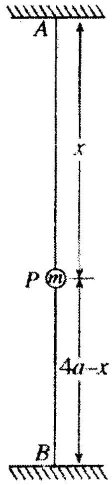
$$v^2=(k-2)ag+2ag\frac{(2-k)}{3}$$

$$=\frac{ag}{3}(k-2)>0 \text{ as } k>2.$$ (5)

எனவே $\theta=\alpha$ ஆகும் போது இழை தொய்யும் இங்கு $\cos\alpha=\dfrac{2-k}{3}$ $(2<k<5)$. 30

PAPERMASTER.LK

13. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது ஒவ்வொன்றும் இயற்கை நீளம் a ஐயும் மட்டு mg ஐயும் உடைய இரு இலேசான சம மீள்தன்மை இழைகளின் இரு நுனிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஓர் இழையின் சுயாதீன நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி A உடனும் மற்றைய இழையின் சுயாதீன நுனி A இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே தூரம் $4a$ இல் இருக்கும் ஒரு நிலைத்த புள்ளி B உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன (வரிப்படத்தைப் பார்க்க). இரு இழைகளும் இறுக்கமாக இருக்க A இற்குக் கீழே தூரம் $\frac{5a}{2}$ இல் துணிக்கை நாப்பத்திலே இருக்குமெனக் காட்டுக.



துணிக்கை P இப்போது AB இன் நடுப் புள்ளிக்கு உயர்த்தப்பட்டு அத்தானத்தில் ஓய்விலிருந்து மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. இரு இழைகளும் இறுக்கமாகவும் இழை AP இன் நீளம் x ஆகவும் இருக்கும்போது $\ddot{x} + \frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right) = 0$ எனக் காட்டுக.

இச்சமன்பாட்டினை வடிவம் $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ இல் மீண்டும் எழுதுக; இங்கு $X = x - \frac{5a}{2}$ உம் $\omega^2 = \frac{2g}{a}$ உம் ஆகும்.

சூத்திரம் $\dot{X}^2 = \omega^2 (c^2 - X^2)$ ஐப் பயன்படுத்தி இவ்வியக்கத்தின் வீச்சம் c ஐக் காண்க.

துணிக்கை P அதன் மிகத் தாழ்ந்த தானத்தை அடையும் கணத்தில் இழை PB வெட்டப்படுகின்றது.

புதிய இயக்கத்தில் $x = a$ ஆக இருக்கும்போது துணிக்கை அதன் அதியுயர் தானத்தை அடைகின்றதெனக் காட்டுக.

மேலும் துணிக்கை P ஆனது $x = 2a$ இல் உள்ள அதன் தொடக்கத் தானத்திலிருந்து கீழ்முகமாகத் தூரம் a இற்கும் பின்பு மேன்முகமாகத் தூரம் $\frac{a}{2}$ இற்கும் செல்வதற்கு எடுக்கும் மொத்த நேரம் $\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left(3 + \sqrt{2}\right)$ என மேலும் காட்டுக.

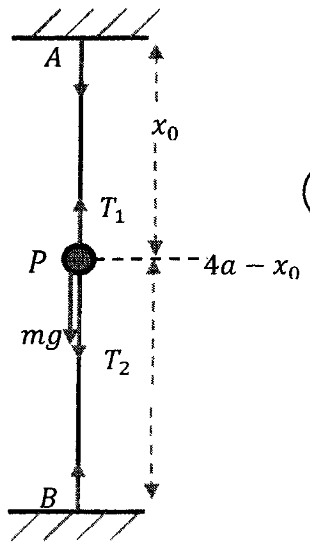
சமநிலைத்தானத்தில் $x = x_0$ என்க.

$\uparrow$ $T_1 = T_2 + mg$ (5)

$$\frac{mg}{a}(x_0 - a) = \frac{mg}{a}(4a - x_0 - a) + mg$$ (5)

$$x_0 - a = 3a - x_0 + a$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{5a}{2}.$$ (5)



(5)

20

P இற்கு $\underline{F} = m\underline{a}$ பிரயோகிக்க

$\downarrow$ $T_2' + mg - T_1' = m\ddot{x}$ (5)

PAPERMASTER.LK

$$\frac{mg}{a}(4a - x - a) + mg - = \frac{mg}{a}(x - a) = m\ddot{x}$$ (10)

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right) = 0.$$ (5)

$X = x - \frac{5a}{2}$; $\omega^2 = \frac{2g}{a}$

எனவே $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$. (5)

S.H.M. இன் மையம் $x = \frac{5a}{2}$. (5)

$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$, இங்கு c வீச்சமாகும்.

$\dot{X} = 0$, ஆக $X = -\frac{a}{2}$ (5)

பிரதியிட:

$0 = \omega^2\left(c^2 - \frac{a^2}{4}\right)$: $c = \frac{a}{2}$ (10)

$\therefore$ அதி தாழ்ந்த தானம்: $X = \frac{a}{2}$ $\Rightarrow x = 3a$. (5)

50

இழை PB ஐ வெட்டிய பின் $F = ma$

$\downarrow$ $mg - T = m\ddot{x}$

$mg - \frac{mg}{a}(x - a) = m\ddot{x}$ (5)

$\ddot{x} + \frac{g}{a}(x - 2a) = 0 \Rightarrow$ (5) $\ddot{Y} + \Omega^2 Y = 0$, (5) இங்கு $Y = x - 2a$; $\Omega^2 = \frac{g}{a}$. (5)

PAPERMASTER.LK

புதிய S.H.M. இன் மையம் $x = 2a$. (5)

$\dot{Y}^2 = \Omega^2(b^2 - Y^2)$, இங்கு b வீச்சம்

இழை PB ஐ வெட்டிய சற்றுப் பின் $\dot{Y} = 0$; $x = 3a$ (5)

$.Y = a$ இல் $\dot{Y} = 0$ (5)

$\therefore$ புதிய S.H.M. இன் வீச்சம் a ஆகும்

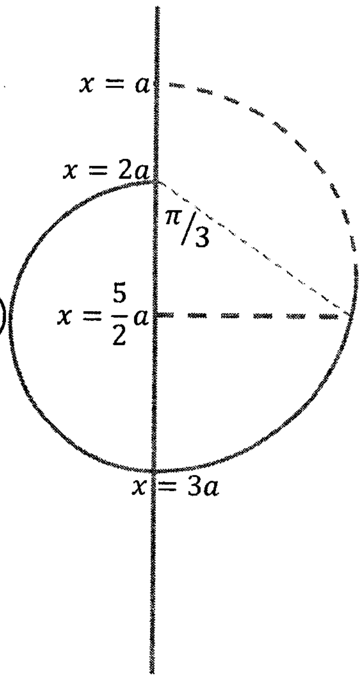
மீண்டும் Y=$-a$ இல் $\dot{Y} = 0$ ஆகும் $\Rightarrow$ $x = a$ (5)

அதாவது $x = a$ இல் துணிக்கை அதியுயர் தானத்தை அடையும் (5)

45

---

(5)



(10)

$x = 2a$ இலிருந்து $x = 3a$ இற்கு கீழ்முகமாக இயங்க எடுக்கும் நேரம் $: \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$ (5)

$x = 3a$ இலிருந்து $x = \frac{5a}{2}$ இற்கு மேல்முகமாக இயங்க எடுக்கும் நேரம் $: \frac{\pi}{3\Omega} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$ (10)

Total time $= \pi\sqrt{\frac{a}{2g}} + \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$

$$= \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{2g}}(3 + \sqrt{2}).$$ (5)

PAPERMASTER.LK

35

14. (*a*) OAB ஒரு முக்கோணி எனவும் D ஆனது AB இன் நடுப் புள்ளி எனவும் E ஆனது OD இன் நடுப் புள்ளி எனவும் கொள்வோம். புள்ளி F ஆனது OA மீது $OF : FA = 1 : 2$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ளது. O பற்றி A, B ஆகியவற்றின் தானக் காவிகள் முறையே $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகும். $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}$ ஆகிய காவிகளை $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகியவற்றில் எடுத்துரைக்க.

B, E, F ஆகியன ஒரேகோட்டிலுள்ளன என்பதை **உய்த்தறிந்து**, விகிதம் $BE : EF$ ஐக் காண்க.

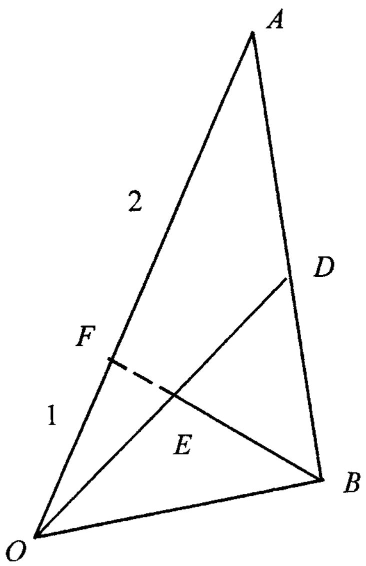
எண்ணிப் பெருக்கம் $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DF}$ ஐ $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|$ ஆகியவற்றிற் கண்டு, $|\mathbf{a}| = 3|\mathbf{b}|$ எனின், $\overrightarrow{BF}$ ஆனது $\overrightarrow{DF}$ இற்குச் செங்குத்தானதெனக் காட்டுக.

(*b*) Oxy-தளத்தில் உள்ள ஒரு விசைத் தொகுதி முறையே $(-a, 2a), (0, a), (-a, 0)$ என்னும் புள்ளிகளில் தாக்கும் $3P\mathbf{i} + 2P\mathbf{j},\ 2P\mathbf{i} - P\mathbf{j},\ -P\mathbf{i} + 2P\mathbf{j}$ என்னும் மூன்று விசைகளைக் கொண்டுள்ளது; இங்கு P, a ஆகியன முறையே நியூற்றனிலும் மீற்றரிலும் அளக்கப்படும் நேர்க் கணியங்களாகும். உற்பத்தி O பற்றித் தொகுதியின் வலஞ்சுழித் திருப்பம் $12Pa$ N m எனக் காட்டுக.

மேலும் தொகுதி பருமன் $5P$ N ஐ உடைய ஒரு தனி விளையுள் விசைக்குச் சமவலுவுள்ளதெனக் காட்டி, அதன் திசையையும் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டினையும் காண்க.

இப்போது இத்தொகுதிக்கு ஒரு மேலதிக விசை, புதிய தொகுதி வலஞ்சுழித் திருப்பம் $24Pa$ N m ஐ உடைய ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளதாக இருக்குமாறு, புகுத்தப்படுகின்றது. மேலதிக விசையின் பருமனையும் திசையையும் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டினையும் காண்க.

(a) $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \underline{b}$



$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\underline{a}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b}) \quad (5)$$

$$(5) \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b}) - \underline{b} = \frac{1}{4}(\underline{a} - 3\underline{b})$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\underline{a} - \underline{b} = \frac{1}{3}(\underline{a} - 3\underline{b}) \quad (5)$$

$$\Longrightarrow 4\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BF} \quad (5)$$

(5) (5)

எனவே B, E, F ஒரே நேர் கோட்டில் அமையும் அத்துடன் $BE : EF = 3 : 1$

30

PAPERMASTER.LK

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\underline{a} - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{6}(\underline{a} + 3\underline{b})$$ (5)

$$\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{DF} = \tfrac{1}{3}(\underline{a} - 3\underline{b}) \cdot \tfrac{1}{6}(-\underline{a} - 3\underline{b})$$ (5)

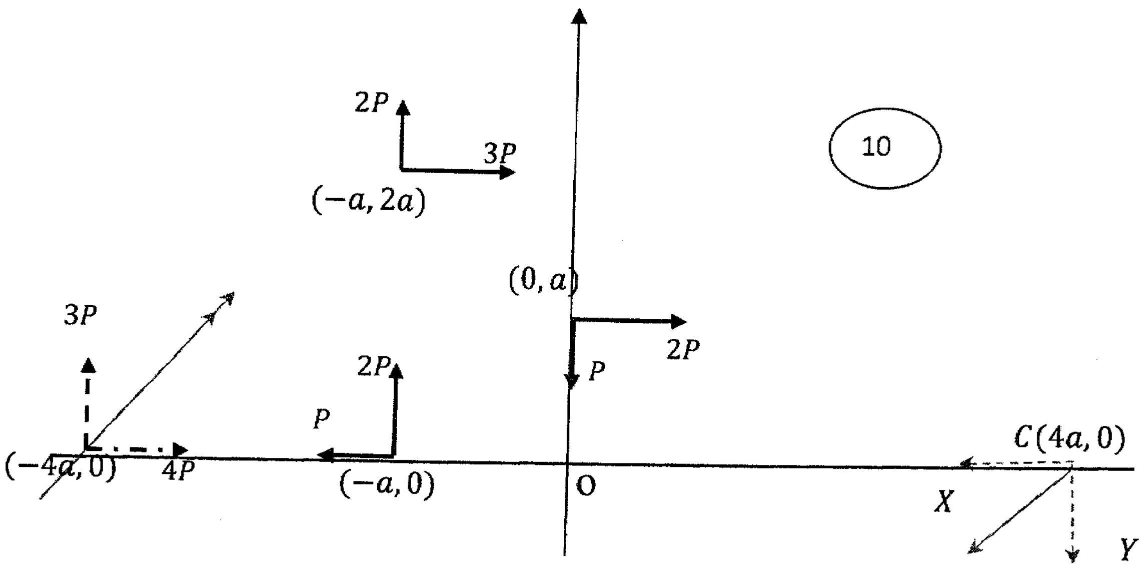
(5)

$$= -\tfrac{1}{18}(|\underline{a}|^2 - 9|\underline{b}|^2) = 0 \text{ , when } |a| = 3|b|$$ (5)

$\therefore \overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{DF}$, ஏனெனில் அவை பூச்சியமன்று ஆகையால்.

20

(b)



0 ↻ பற்றித் திருப்பம்

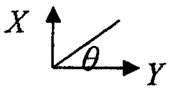
$G = 2P.a + 3P.2a + 2P.a + 2P.a = 12P.a.$ Nm; இடம் சுழிப் போக்கில் (10)

→ $X = 3P + 2P - P = 4P$ (5)

↑ $Y = 2P + 2P - P = 3P$ (5)

PAPERMASTER.LK

விளையுளின் பருமன் R எனின் $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 5P\ N$ (5)



விளையுள் $x-$ அச்சுடன் ஆக்கும் கோணம் $\measuredangle\theta$ எனின் $\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{3}{4}$ (5)

விளையுளின் $x-$ அச்சினை சந்திக்கும் புள்ளி $(-b, 0)$, $(b > 0)$ எனின்

O ↓

$Y\,b = 3P\,b = 12P\,a \Longrightarrow \quad b = 4a$ (5) (5)

∴ விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x + 4a) \Longrightarrow 4y - 3x = 12a$$

(10)

60

புதிய தொகுதி ஓர் இணைக்கு சமவலுவாகும் எனின் மட்டும் ஒரு விசை $(-4P, -3P)$ ஆனது ஒரு புள்ளி $C \equiv (c, 0)$, $c > 0$ இல் பின்வருமாறு பிரயோகிக்கப்படும். (5)

$C \curvearrowleft \quad 3P(c + 4a) = 24Pa$ (10) (5)

$\Rightarrow c = 4a$ (5)

மேலதிக விசையின் பருமன் $= 5\,P$ N, அதன் திசை மறை x- அச்சுடன் கோணம் $tan^{-1}(\frac{-3P}{-4P}) = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ ஆகும். (5)

மேலதிக விசையின தாக்கக்கோடு $y - 0 = \frac{3}{4}(x - 4a)$

PAPERMASTER.LK

(10)

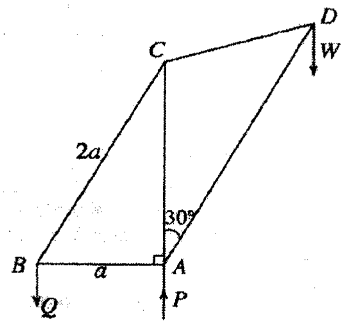
$$\Rightarrow 4y - 3x + 12a = 0.$$

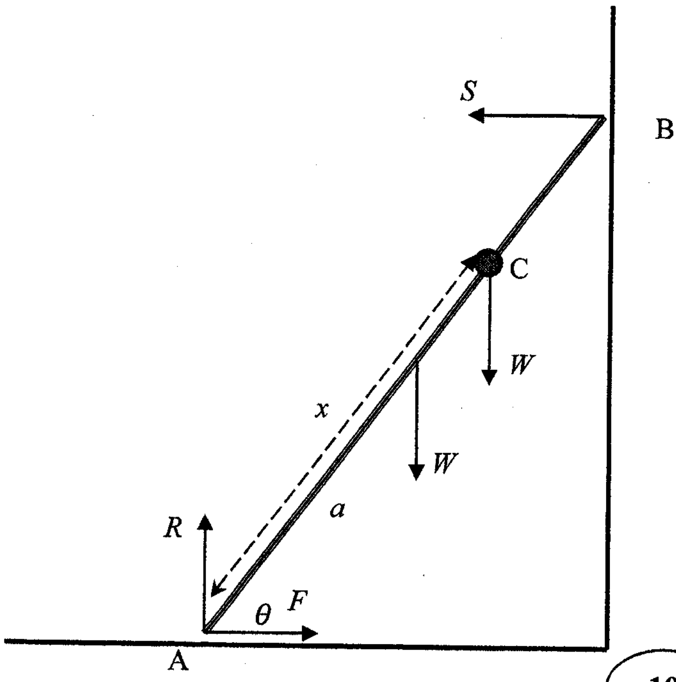
40

15. (*a*) நிறை W ஐயும் நீளம் $2a$ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை A ஒரு கரடான கிடைத் தரை மீதும் மற்றைய முனை B ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிரேயும் உள்ளன. கோல் சுவருக்குச் செங்குத்தான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கும் அதே வேளை கிடையுடன் கோணம் θ ஐ ஆக்குகின்றது; இங்கு $\tan\theta = \frac{3}{4}$ ஆகும். $AC = x$ ஆகுமாறு கோலின் மீது உள்ள புள்ளி C உடன் நிறை W ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை இணைக்கப்பட்டுள்ளது; துணிக்கையுடன் கோல் நாப்பத்தில் உள்ளது. கோலுக்கும் தரைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{5}{6}$ ஆகும். $x \le \frac{3a}{2}$ எனக் காட்டுக.

(*b*) அருகே உள்ள உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல் முனைகளில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட AB, BC, AC, CD, AD என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. $AB = a$, $BC = 2a$, $AC = CD$, $C\hat{A}D = 30°$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. நிறை W ஐ உடைய ஒரு சுமை D இல் தொங்குகின்றது. முறையே A இலும் B இலும் **உருவில் காட்டப்பட்ட திசைகளில்** தாக்கும் P, Q என்னும் நிலைக்குத்து விசைகளின் துணையுடன் AB கிடையாகவும் AC நிலைக்குத்தாகவும் இருக்கச் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் உள்ளது. Q இன் பெறுமானத்தை W இற் காண்க.

போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, **இதிலிருந்து,** ஐந்து கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளைக் கண்டு, இத்தகைப்புகள் இழுவைகளா, உதைப்புகளா என எடுத்துரைக்க.





A↺ கோல் AB இற்கு: **15**

$$S \cdot 2a\sin\theta = W(a\cos\theta + x\cos\theta)$$

$$\Rightarrow S \cdot 2a \cdot \frac{3}{5} = W \cdot (a+x) \cdot \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow S = \frac{2W(a+x)}{3a}.$$ **5**

துணித்தலால்

$$\rightarrow \quad F = S = \frac{2W(a+x)}{3a}.$$ **5**

5

5 $\uparrow \quad R = 2W.$

$$F \le \mu R \text{ and } \mu = \frac{5}{6}$$ **5**

10

$$\Rightarrow \frac{2W(a+x)}{3a} \le \frac{5}{6}.$$ **5**

$$\tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\theta = \frac{3}{5}; \cos\theta = \frac{4}{5}.$$ **5**

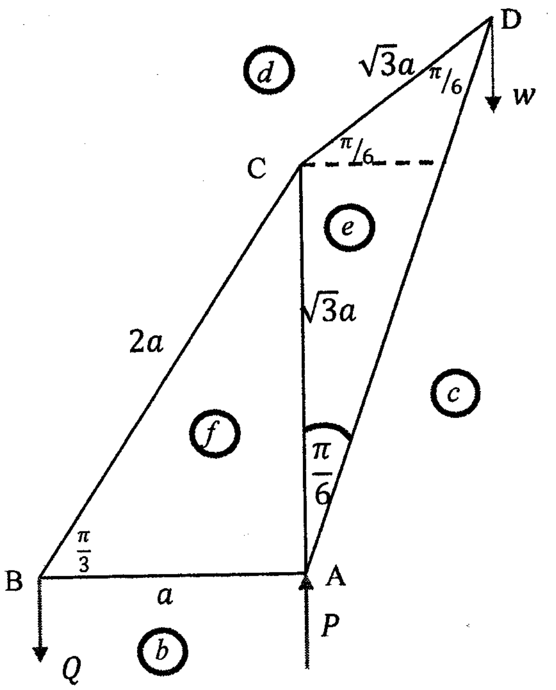
PAPERMASTER.LK

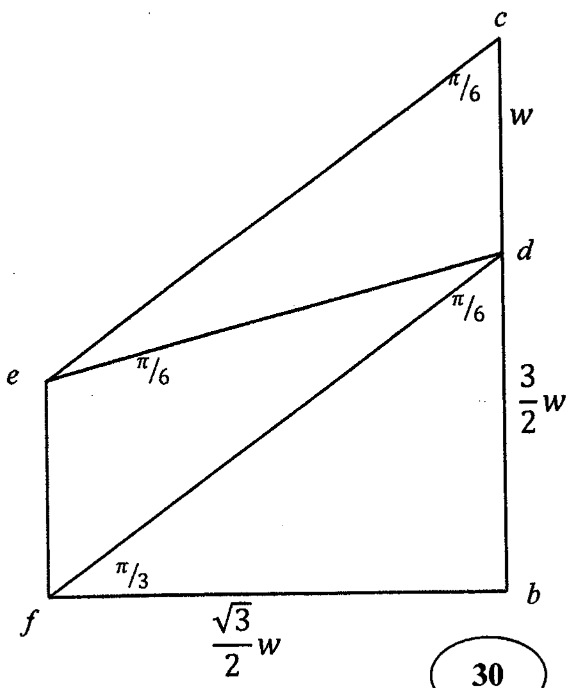
$$\Rightarrow a + x \le \frac{5a}{2}$$

$$\Rightarrow x \le \frac{3a}{2}.$$

60

15(b)





30

$$AD = 2(\sqrt{3}\,a\cos 30^\circ) = 3a$$

A ↻ $Qa = W\,AD\cos 60^\circ$

$$\Rightarrow Q = \frac{3}{2}W$$

10

$\uparrow P = Q + W \Rightarrow P = \frac{5}{2}W$

கோல்	இழுவை	உதைப்பு
AB		$\frac{\sqrt{3}}{2}W$
BC	$\sqrt{3}W$	
AC		W
CD	W	
AD		$\sqrt{3}W$

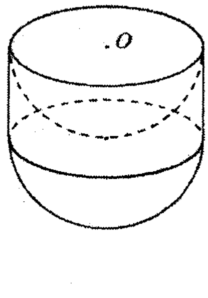
50

90

PAPERMASTER.LK

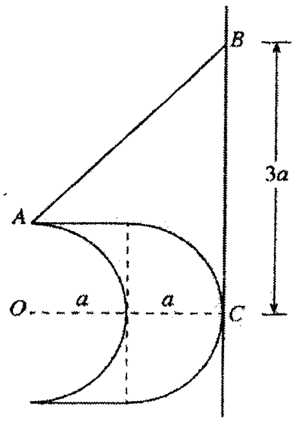
16. ஆரை a ஐ உடைய ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளத்தின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{3}{8}a$ இல் உள்ளதெனக் காட்டுக.

ஆரை a, உயரம் a, அடர்த்தி ρ ஆகியவற்றை உடைய ஒரு சீரான திண்மச் செவ்வட்ட உருளையிலிருந்து ஆரை a ஐ உடைய ஓர் அரைக்கோளப் பகுதி நீக்கப்பட்டுள்ளது. இப்போது அருகே உள்ள உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு உருளையின் எஞ்சியிருக்கும் பகுதியின் வட்ட முகத்துடன் ஆரை a ஐயும் அடர்த்தி $\lambda\rho$ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளத்தின் வட்ட முகம், அவற்றின் இரு சமச்சீரச்சுகளும் பொருந்தத்தக்கதாக, இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறு ஆக்கப்படும் பொருள் S இன் திணிவு மையம் அதன் சமச்சீரச்சின் மீது வளையத்தின் மையம் O இலிருந்து தூரம் $\frac{(11\lambda+3)a}{4(2\lambda+1)}$ இல் உள்ளதெனக் காட்டுக.

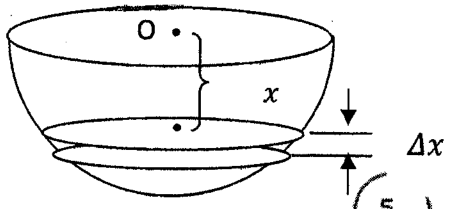


$\lambda = 2$ எனவும் A ஆனது பொருள் S இன் வட்ட விளிம்பு மீது உள்ள ஒரு புள்ளி எனவும் கொள்வோம்.

ஒரு நுனி ஒரு புள்ளி A உடனும் மற்றைய நுனி ஒரு கரடான நிலைக்குத்துச் சுவர் மீது உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி B உடனும் இணைக்கப்பட்ட ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் இப்பொருள் S அந்நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிராக நாப்பத்தில் பேணப்படுகின்றது. இந்நாப்பத் தானத்தில் S இன் சமச்சீரச்சு சுவருக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் அதே வேளை S இன் அரைக்கோள மேற்பரப்பானது புள்ளி B இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே தூரம் $3a$ இல் உள்ள ஒரு புள்ளி C இல் சுவரைத் தொடுகின்றது (அருகில் உள்ள உருவைப் பார்க்க). O, A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் சுவருக்குச் செங்குத்தான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளன.



S இன் அரைக்கோள மேற்பரப்புக்கும் சுவருக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ எனின், $\mu \geq 3$ எனக் காட்டுக.



(5)

சமச்சீரின்படி திணிவு மையம் G, OA இல் கிடக்கும்.

OG= $\bar{x}$, அடர்த்தி ρ எனக் கொள்வோம்

அப்போது $\Delta m = \pi(a^2 - x^2)\Delta x\rho$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)\rho x\, dx}{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)\rho\, dx}$$ (15)

PAPERMASTER.LK

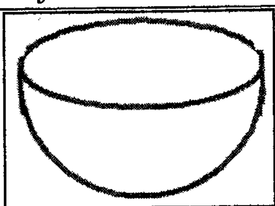
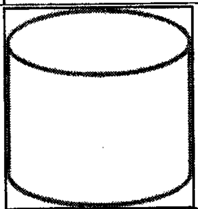
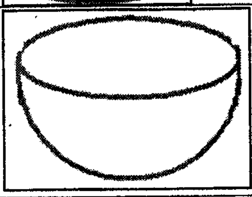
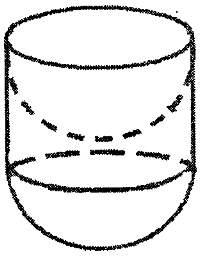
$$= \frac{\int_0^a (a^2x - x^3)\, dx}{\int_0^a (a^2 - x^2)\, dx}$$ (5)

$$= \frac{\left(a^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^a}{\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a} \quad (5) \quad (5)$$

$$= \frac{\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right)}{\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right)} = \frac{3}{8}a \quad (5)$$

எனவே திணிவு மையம் O இலிருந்து $\frac{3}{8}a$ தூரத்தில் இருக்கும்.

40

Object	Mass	O இலிருந்து தூரம்
	$\frac{2}{3}\lambda a^3\rho$ (5)	$\frac{11}{8}a$ (5)
	$\pi a^3\rho$ (5)	$\frac{1}{2}a$ (5)
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ (5)	$\frac{3}{8}a$ (5)
	$\left(\frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3}\right)a^3\rho$ (5)	$\bar{x}$

சமச்சீரின்படி திணிவு மையம் சமச்சிரச்சில் கிடக்கும். (5)

$$\frac{1}{3}(2\lambda+1)\pi a^3\rho\bar{x} = \frac{11}{8}a \times \frac{2}{3}\pi a^3\lambda\rho + \frac{a}{2} \times \pi a^3\rho - \frac{3}{8}a\frac{2}{3}\pi a^3\rho \quad (25)$$

$$\frac{1}{3}(2\lambda+1)\bar{x} = \frac{11}{8}a \times \frac{2\lambda}{3} + \frac{a}{2} - \frac{3a}{8} \times \frac{2}{3}$$

PAPERMASTER.LK

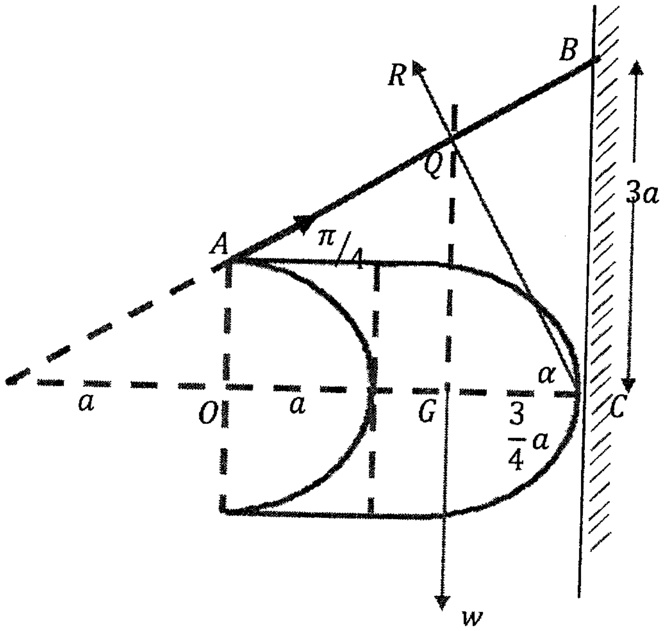
$$= \frac{11\lambda}{12}a + \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{1}{12}(11\lambda+3)a \quad (10)$$

$$\bar{x} = \frac{(11\lambda + 3)a}{4(2\lambda + 1)}$$

75

திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன

5



$\lambda = 2$ என்க. எனவே $\bar{x} = \frac{5a}{4}$. (5)

சமநிலையில், (5)

(10) $\mu \geq \tan\alpha = \frac{QG}{GC} = \frac{\frac{9a}{4}}{\frac{3a}{4}} = 3$

$\therefore \mu \geq 3.$ (5)

(5)

35

PAPERMASTER.LK

17. (*a*) ஒரு நிறுவகத்தில் ஒரு குறித்த தொழிலுக்காக விண்ணப்பிக்கும் எல்லா விண்ணப்பகாரர்களும் ஓர் உளச்சார்புப் பரீட்சைக்குத் தோற்ற வேண்டும். உளச்சார்புப் பரீட்சையில் A தரங்களைப் பெறுபவர்கள் தொழிலுக்காகத் தெரிந்தெடுக்கப்படுவர். ஏனைய விண்ணப்பகாரர்கள் ஒரு நேர்முகப் பரீட்சைக்குத் தோற்ற வேண்டும். ஓர் அளவையீட்டில் விண்ணப்பகாரர்களில் 60% ஆனோர் A தரங்களைப் பெறுவதாகவும் இவர்களில் 40% ஆனோர் பெண்கள் எனவும் காணப்பட்டுள்ளது. நேர்முகப்பரீட்சைக்குத் தோற்றும் விண்ணப்பகாரர்களில் 10% ஆனோர் மாத்திரம் தெரிந்தெடுக்கப்படும் அதே வேளை அவர்களில் 70% ஆனோர் பெண்களாவர்.

(i) இத்தொழிலுக்காக ஓர் ஆண் தெரிந்தெடுக்கப்படுவதற்கான,

(ii) தொழிலுக்காகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட ஓர் ஆண் உளச்சார்புப் பரீட்சையில் A தரத்தைப் பெற்றிருப்பதற்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

(*b*) ஒரு குறித்த மருத்துவமனையில் 100 நோயாளிகள் சிகிச்சையைப் பெறுவதற்கு முன்னர் காத்திருக்கும் (நிமிடத்திலான) நேரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டுள்ளன. அந்நேரங்கள் ஒவ்வொன்றிலுமிருந்து 20 நிமிடங்களைக் கழித்துக் கிடைக்கும் வித்தியாசங்கள் ஒவ்வொன்றும் 10 இனால் வகுக்கப்பட்டுப் பெறப்படும் பெறுமானங்களின் பரம்பல் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

பெறுமான வீச்சு	நோயாளிகளின் எண்ணிக்கை
−2 − 0	30
0 − 2	40
2 − 4	15
4 − 6	10
6 − 8	5

இவ்வட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ள பரம்பலின் இடையையும் நியம விலகலையும் மதிப்பிடுக.

இதிலிருந்து, 100 நோயாளிகளின் காத்திருக்கும் நேரங்களின் இடை μ ஐயும் நியம விலகல் σ ஐயும் மதிப்பிடுக.

அத்துடன் $\kappa = \dfrac{\mu - M}{\sigma}$ இனால் வரையறுக்கப்படும் ஓராயக் குணகம் κ ஐயும் மதிப்பிடுக; இங்கு M ஆனது 100 நோயாளிகளின் காத்திருக்கும் நேரங்களின் ஆகாரமாகும்.

(a) $X =$ தொழிலுக்காகத் தெரிவுசெய்யப்பட்ட ஆண்கள்.

A = உளச்சார்புப் பரீட்சையில் A தரத்தைப் பெற்றவர்கள்.

(i) $P(X) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{93}{250}.$ (10)

(10) (10)

30

PAPERMASTER.LK

(10)

(ii) $P(A/X) = \frac{P(X \cap A)}{P(X)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}}{\frac{93}{250}} = \frac{30}{31}.$ (10)

(10)

30

(b)

(5) (5) (5)

பெறுமான வீச்சு	f	நடுப்புள்ளி y	y^2	fy	fy^2
-2 – 0	30	-1	1	-30	30
0 – 2	40	1	1	40	40
2 – 4	15	3	9	45	135
4 – 6	10	5	25	50	250
6 – 8	5	7	49	35	245
	$\sum f = 100$			$\sum fy = 140$	$\sum fy^2 = 700$

(5) (5)

(5) இடை: $\mu_y = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{140}{100} = \frac{7}{5}$. (5)

நியம விலகல்: $\sigma_y^2 = \frac{\sum fy^2}{\sum f} - \mu_y^2 = \frac{700}{100} - \frac{49}{25}$ $\quad \sigma_y = \frac{\sqrt{504}}{10} \approx 2.24.$

(5) (5)

45

$y = \frac{x-20}{10} \implies x = 10y + 20.$

எனவே $\mu = 10\mu_y + 20 = 10\left(\frac{7}{5}\right) + 20 = 34.$ (5)

(5)

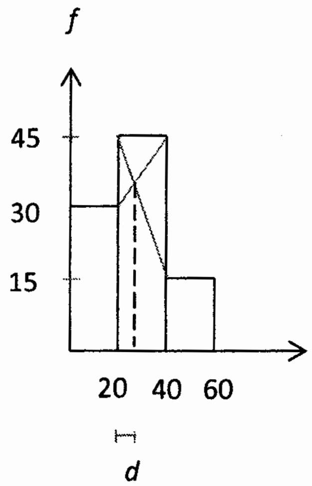
$\sigma = 10\sigma_y \approx 10(2.24) \approx 22.4.$ (5)

(5)

20

PAPERMASTER.LK

ஆகாரம் M காணல்



y இன் வீச்சு	x இன் வீச்சு	மீடிறன்
-2 – 0	0 – 20	30
0 – 2	20 – 40	40
2 – 4	40 – 60	15

5 5 5

$$\frac{d}{40-30} = \frac{20-d}{40-15} \Rightarrow d = \frac{40}{7} \Rightarrow M = 20 + \frac{40}{7} \approx 25.71.$$

$$\kappa = \frac{\mu - M}{\sigma} = \frac{34-25.71}{22.4} \approx 0.37.$$

5 5

வேறுமுறை

$$M = L_{Mo} + c\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right) = 20 + 20\left(\frac{10}{10+25}\right) \approx 25.71.$$

5 5 5

PAPERMASTER.LK