සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි.

රහස්‍ය ලේඛනයකි.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2018

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

PAPERMASTER.LK

මෙය උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි.
පරීක්ෂක සාකච්ඡා පැවැත්වෙන අවස්ථාවේදී ඉදිරිපත්වන අදහස් අනුව මෙහි වෙනස්කම් කරනු ලැබේ.

අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතුව ඇත.

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2018

10 - සංයුක්ත ගණිතය

ලකුණු බෙදීයාම

I පත්‍රය

A කොටස :	10 x 25	=	250
B කොටස :	05 x 150	=	750

එකතුව = 1000/10

I පත්‍රය අවසාන ලකුණ = 100

PAPERMASTER.LK

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න.

   ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමඟ □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i) .... ✓ $\frac{4}{5}$

(ii) .... ✓ $\frac{3}{5}$

(iii) .... ✓ $\frac{3}{5}$

03 (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.
3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

PAPERMASTER.LK

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

මෙවර සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රයට අදාළ ලකුණු ලකුණු ලැයිස්තුවේ "I වන පත්‍රය" තීරුවේ ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලියන්න. අදාළ විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කර "II වන පත්‍රය" තීරුවේ II පත්‍රයේ අවසාන ලකුණු ඇතුළත් කරන්න. 51 චිත්‍ර විෂයයේ I, II හා III පත්‍රවලට අදාළ ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවල ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලිවිය යුතු වේ.

***

PAPERMASTER.LK

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ විට, ව:පැ: $= 1^3 = 1$ හා දෘ:පැ: $= \frac{1}{4}\cdot 1^2(1+1)^2 = 1$. 5

$\therefore$ $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n=p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි සිතමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{p} r^3 = \frac{1}{4}p^2(p+1)^2$. 5

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1} r^3 = \sum_{r=1}^{p} r^3 + (p+1)^3$ 5

$$= \frac{1}{4}p^2(p+1)^2 + (p+1)^3$$

$$= (p+1)^2 \frac{[p^2+4p+4]}{4}.$$

$$= \frac{1}{4}(p+1)^2(\overline{p+1}+1)^2.$$ 5

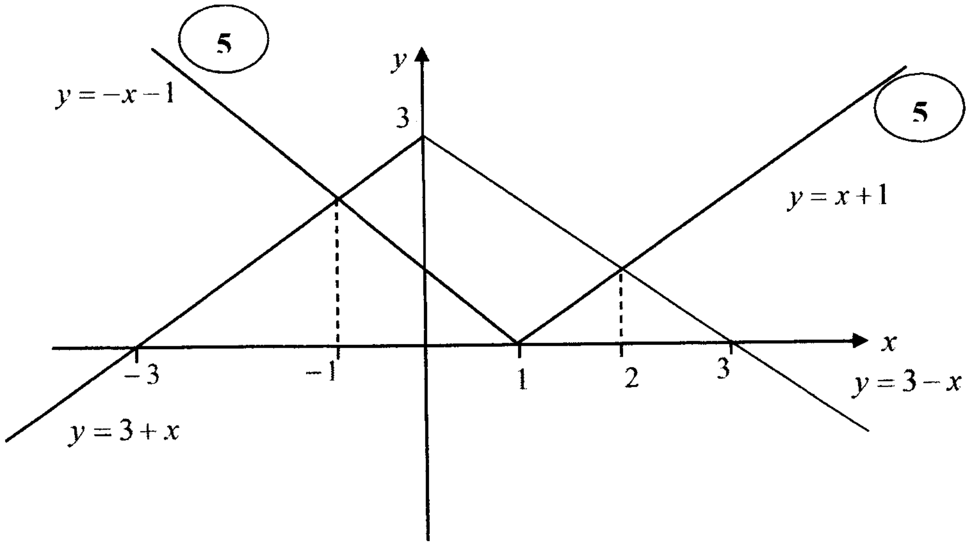
එනයින් $n=p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n=p+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. අපි දැනටමත් $n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව පෙන්වා ඇත. එනයින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

25

PAPERMASTER.LK

2. එක ම රූප සටහනක $y = 3-|x|$ හා $y = |x-1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|x|+|x-1| \le 3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වලදී $-x+1=3+x$ හෝ $x-1=3-x$

එනම්, $x=-1$ හෝ $x=2$. 5

තවද, $|x|+|x-1| \le 3$

$\Leftrightarrow \quad |x-1| \le 3-|x|$ 5

5

එනයින්, ප්‍රස්තාරයෙන්, විසඳුම් $-1 \le x \le 2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ.

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$|x|+|x-1| \le 3$

(i) අවස්ථාව $x \le 0$: $|x|+|x-1| \le 3 \Leftrightarrow -x-(x-1) \le 3$

$\Leftrightarrow -2x+1 \le 3$ 5

$\Leftrightarrow x \ge -1$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $-1 \le x \le 0$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ.

PAPERMASTER.LK

(ii) අවස්ථාව $0 < x \leq 1$

$|x| + |x-1| \leq 3$

$$\Leftrightarrow x-(x-1) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x-(x-1) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 3$$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $0 < x \leq 1$ වේ. 5

(iii) අවස්ථාව $1 < x$

$|x| + |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow x + x - 1 \leq 3$

$\Leftrightarrow 2x \leq 4$

$\Leftrightarrow x \leq 2$

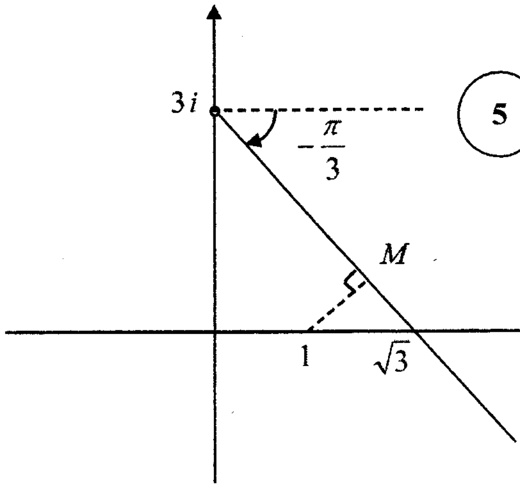
$\therefore$ මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $1 < x \leq 2$ වේ.

එනයින් විසඳුම් $-1 \leq x \leq 2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ. 5

PAPERMASTER.LK

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\mathrm{Arg}(z-3i) = -\frac{\pi}{3}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\mathrm{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි අවම අගය සොයන්න.



5 + 5

$$\mathrm{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ \mathrm{Arg}\overline{(\bar{z}+3i)} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ \mathrm{Arg}(z-3i) = -\frac{\pi}{3}.$$ 5

එනයින්, $\mathrm{Arg}(\bar{z}+3i) = \frac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි අවම අගය NM දෙනු ලබයි. 5

මෙහි $NM = (\sqrt{3}-1)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{(3-\sqrt{3})}{2}$.

5

25

PAPERMASTER.LK

4. $\left(x^2 + \frac{3k}{x}\right)^8$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x හා x^4 හි සංගුණක සමාන වේ. k නියතයෙහි අගය සොයන්න.

$$\left(x^2 + \frac{3k}{x}\right)^8 = \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r (x^2)^r \left(\frac{3k}{x}\right)^{8-r} \quad 5$$

$$= \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r (3k)^{8-r} x^{3r-8}$$

$x^1 : 3r - 8 = 1 \Leftrightarrow r = 3.$

$x^4 : 3r - 8 = 4 \Leftrightarrow r = 4.$ 5

දත්තයෙන් ${}^8C_r (3k)^5 = {}^8C_4 (3k)^4$ 5

$\frac{8!}{3!\,5!} 3^5 k = \frac{8!}{4!\,4!} 3^4$ 5

$k = \frac{5}{12}.$ 5

PAPERMASTER.LK

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \dfrac{\pi^2}{32}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{x^2(x+1)}$$ 5

$$= \lim_{x\to 0} 2\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{\left(\frac{\pi x}{8}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{1}{x+1}$$

5

$$= 2\cdot 1\cdot \frac{\pi^2}{64}\cdot\frac{1}{1}$$ 5 5

$$= \frac{\pi^2}{32}.$$ 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} \cdot \frac{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)\left(1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}$$ 5

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

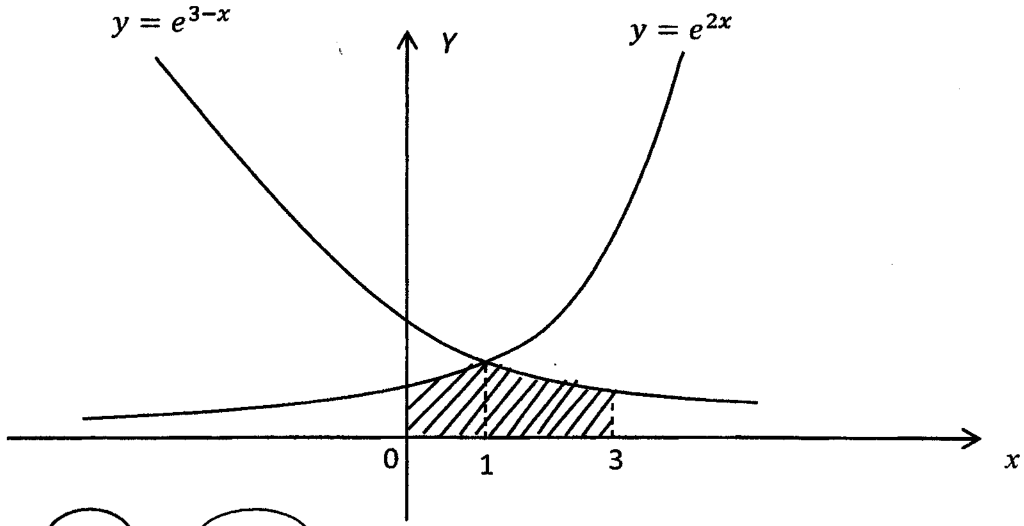
5

$$= 1\cdot \frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}$$ 5 5

$$= \frac{\pi^2}{32}.$$ 5

PAPERMASTER.LK

6. $y = e^{2x}$, $y = e^{3-x}$, $x = 0$, $x = 3$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක $\frac{3}{2}(e^2 - 1)$ බව පෙන්වන්න.



5 5

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_1^3 e^{3-x}\,dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1 + \left.\frac{e^{3-x}}{(-1)}\right|_1^3 \quad 5$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + (-1) + e^2 \quad 5$$

$$= \frac{3e^2}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2}(e^2 - 1). \quad 5$$

25

7. $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ සඳහා $x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$ හා $y = \sin t$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ.
$\frac{dy}{dx} = \cos t \sin t$ බව පෙන්වන්න.

$t = \frac{2\pi}{3}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී C වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශ රේඛාවෙහි අනුක්‍රමණය $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$$x = \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right) \qquad\qquad y = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \times \sec^2\frac{t}{2} \times \frac{1}{2} \quad 5 \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = \cos t \quad 5$$

PAPERMASTER.LK

$$= \frac{1}{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}$$ 5

$$= \frac{1}{\sin t}$$

දැන් $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \cos t \sin t$ 5

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

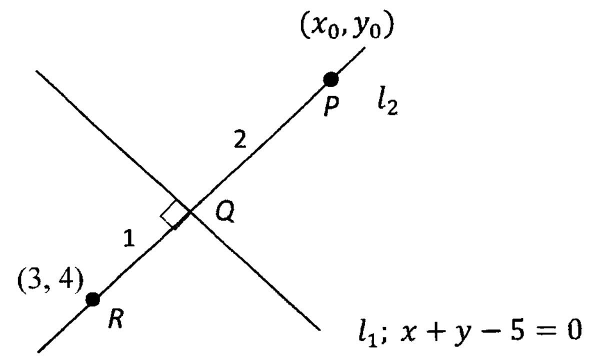
5

$\boxed{25}$

---

8. l_1 යනු $x + y - 5 = 0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $P \equiv (3, 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා l_1 ට ලම්බ වූ l_2 සරල රේඛාවෙහි සමීකරණය සොයන්න.

Q යනු l_1 හා l_2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යැයි ද R යනු $PQ : QR = 1 : 2$ වන පරිදි l_2 මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. R හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



l_2 හි අනුක්‍රමණය $= -\frac{1}{-1} = 1$ 5

l_2 සමීකරණය : $y - 4 = 1(x - 3)$

$x - y + 1 = 0$ 5

5 $Q \equiv (2,3)$.

$R \equiv (x_0, y_0)$ යයි ගනිමු.

එවිට,

$2 = \frac{x_0+6}{3}$ සහ $3 = \frac{y_0+8}{3}$ 5

වෙනත් ක්‍රමයක් 5

$\frac{QR}{RP} = -\frac{2}{3}$ බැවින්

$$R \equiv \left(\frac{-2\times 3 + 2\times 3}{3-2}, \frac{-2\times 4 + 3\times 3}{3-2}\right)$$

$= (0,1)$ 5

PAPERMASTER.LK

$\therefore x_0 = 0$ සහ $y_0 = 1$.

$\therefore R \equiv (0,1)$. 5

25

---

9. $P \equiv (1,2)$ හා $Q \equiv (7,10)$ යැයි ගනිමු. P හා Q ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය $S \equiv (x-1)(x-a)+(y-2)(y-b)=0$ වන පරිදි a හා b නියතවල අගයන් ලියා දක්වන්න.

$S' \equiv S + \lambda(4x-3y+2)=0$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. P හා Q ලක්ෂ්‍ය $S'=0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, මෙම වෘත්තය $R \equiv (1,4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි λහි අගය සොයන්න.

$a = 7$,

$b = 10$. 5

$P \equiv (1,2)$ සහ $Q \equiv (7,10)$ යන දෙකම $s=0$ සහ $4x-3y+2=0$ යන දෙකම තෘප්ත කරන බැවින් $s'=0$ වේ. 5 5

$\therefore P$ සහ Q ලක්ෂ්‍ය $s'=0$ මත පිහිටයි.

$s'=0$ යන්න $R \equiv (1,4)$ හරහා යයි නම්,

$0+(4-2)\times(4-10)+\lambda(4-12+2)=0$ වේ. 5

$6\lambda = -12$

$\lambda = -2$. 5

25

PAPERMASTER.LK

10. $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ සඳහා $\sec^3 x + 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ වේ.

$$\sec^3 a = 2\sec^2 x \tan x + \sec x \tan^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \quad 5$$

$$= \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin^2 x)} \quad 5$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)} \quad 5 \qquad \because n \in \mathbb{Z} \text{ සඳහා } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(1+\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)^2} \quad 5$$

$$= \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}. \quad 5$$

25

---

11. (*a*) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ සමීකරණයේ විවේචකය a හා b ඇසුරෙන් ලියා දක්වා **ඒ නයින්**, මෙම සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. a හා b ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වන්න.

දැන්, $\beta = \alpha + 2$ යැයි ගනිමු. $a^2 - ab + b^2 = 9$ බව පෙන්වා,

$|a| \leq \sqrt{12}$ බව **අපෝහනය** කර, a ඇසුරෙන් b සොයන්න.

(*b*) $c(\neq 0)$ හා d තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ද $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$ යැයි ද ගනිමු. $(x+c)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $-c^3$ වේ. තව ද $(x-c)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ. $c = -2$ හා $d = -12$ බව පෙන්වන්න.

c හා d හි මෙම අගයන් සඳහා $(x^2 - 4)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(a) $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$

විවේචකය $\Delta = 4(a+b)^2 - 12(ab)$

$$= 4(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) \quad 10$$

$$= 4(a^2 - ab + b^2)$$

PAPERMASTER.LK

$$= 4\left[\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] \geq 0 \text{ for all } a, b \in \mathbb{R}.$$ 5

5

ඒ නයින්, මූල තාත්ත්වික වේ. 5

25

$\alpha + \beta = \frac{2}{3}(a + b)$ $\quad \alpha\beta = \frac{ab}{3}$

5 5

$\beta = \alpha + 2 \Rightarrow (\beta - \alpha)^2 = 4$ 5

$\Rightarrow (\beta + \alpha)^2 - 4\,\alpha\beta = 4$ 5

$\Rightarrow \frac{4}{9}(a + b)^2 - \frac{4}{3}\,ab = 4$ 5 5

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 3ab = 9$

$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = 9$ 5

35

$b^2 - ab + a^2 = 9$

$$\Rightarrow \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - a^2 + 9$$

$$= -\frac{3a^2}{4} + 9$$

$$= \frac{3}{4}(12 - a^2)$$ 1

$\Rightarrow 12 - a^2 \geq 0$ 5

$\Rightarrow \quad |a| \leq \sqrt{12}$ 5

$$b = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{12 - a^2}.$$ 10

30

PAPERMASTER.LK

(b) $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$

$f(-c) = -c^3 + 4c^2 - c^2 + d = -c^3$ 5

5 $\Rightarrow 3c^2 + d = 0$ ------ (1)

$f(c) = c^3 + 4c^2 + c^2 + d = 0$ 5

5 $\Rightarrow c^3 + 5c^2 + d = 0$ ------ (2)

(2) − (1) මගින් $c^3 + 2c^2 = 0$ ලැබේ. 5

$\Rightarrow c^2(c+2) = 0$

$c \neq 0$, නිසා $c = -2$. 5

$\Rightarrow d = -3c^2 = -12$. 5

35

දැන් $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 12$.

$f(x)$ යන්න $x^2 - 4$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $\lambda x + \mu$ ආකාරය ගනී.

එනම් $f(x) = (x^2 - 4)q(x) + \lambda x + \mu$. 5

$\Rightarrow f(x) = (x-2)(x+2)q(x) + \lambda x + \mu$.

$f(2) = 8 = 2\lambda + \mu$ හා $f(-2) = 0 = -2\lambda + \mu$

5 5

$\Rightarrow \mu = 4$ හා $\lambda = 2$. 5

$\therefore$ ශේෂය $= 2x + 4$. 5

25

PAPERMASTER.LK

12. (*a*) එක එකක පිරිමි ළමයින් තිදෙනකු හා ගැහැනු ළමයින් දෙදෙනකු සිටින කණ්ඩායම් දෙකක සාමාජිකයන් අතුරෙන්, සාමාජිකයන් හයදෙනකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ කමිටුවේ සිටින ගැහැනු ළමයින් සංඛ්‍යාව වැඩි තරමින් දෙදෙනකු වන පරිදි ය.

(i) කමිටුවට එක් එක් කණ්ඩායමෙන් සාමාජිකයන් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත යුතු නම්,

(ii) කමිටුවට එක් ගැහැනු ළමයකු පමණක් තෝරා ගත යුතු නම්,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් කමිටු ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) = \frac{1}{(r+1)^2}$ සහ $U_r = \frac{(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) - f(r+2) = 4U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $t_n = \sum_{r=n}^{2n} U_r$ යැයි ගනිමු.

$\lim_{n \to \infty} t_n = 0$ බව පෙන්වන්න.

(a) (i)

තේරිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන		කමිටු ගණන
1 කණ්ඩායම	2 කණ්ඩායම	
2	4	
1G 1B	1G 3B	$2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$
2B	1G 3B	${}^3C_2 \times 2 \times 1 = 6$
2B	2G 2B	${}^3C_2 \times {}^2C_2 \times {}^3C_2 = 9$
		27

10

10

10

5

$\therefore$ වෙනස් කමිටු ගණන $= 27 \times 2$

$= 54$ 10

45

(ii) 1G 5B

10 ${}^4C_1 \times {}^6C_5 = 24.$ 5

15

PAPERMASTER.LK

(i) වෙනත් ක්‍රමයක්

1 කණ්ඩායම		2 කණ්ඩායම		කමිටු ගණන
M(3)	F(2)	M(3)	F(2)	
2		2	2	${}^{3}C_2 \times {}^{3}C_2 \times {}^{2}C_2 = 9$
2		3	1	${}^{3}C_2 \times {}^{3}C_3 \times {}^{2}C_1 = 6$
1	1	3	1	${}^{3}C_1 \times {}^{2}C_1 \times {}^{3}C_3 \times {}^{2}C_1 = 12$
2	2	2		9
3	1	2		6
3	1	1	1	12

10

10

10

5

කමිටු ගණන: $9 + 6 + 12 + 9 + 6 + 12 = 54$

10

PAPERMASTER.LK

(b)

$$f(r) - f(r+2) = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{(r+3)^2} \quad 5$$

$$= \frac{4(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2} \quad 5$$

$$= 4U_r \quad 5$$

15

එවිට

$r = 1; \quad 4U_1 = f(1) - f(3)$ 10

$r = 2; \quad 4U_2 = f(2) - f(4)$

$r = 3; \quad 4U_3 = f(3) - f(5)$

$\vdots$

$r = n-2; \quad 4U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$

$r = n-1; \quad 4U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$

$r = n; \quad 4U_n = f(n) - f(n+2)$ 10

$$4\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2) \quad 10$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+3)^2}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{13}{144} - \frac{1}{4(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+3)^2}. \quad 10$$

40

$n \to \infty$ විට ද. පැ. හි සීමාව $\frac{13}{144}$. 5

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වන අතර එකතුව $\frac{13}{144}$. 5 5

15

$$t_n = \sum_{r=n}^{2n} U_r$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} U_r - \sum_{r=1}^{n-1} U_r \quad 5$$

PAPERMASTER.LK

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී බැවින්

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{2n} U_r - \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n-1} U_r \quad 5$$

$$= \frac{13}{144} - \frac{13}{144} \quad 5$$

$$= 0. \quad 5$$

$\boxed{20}$

---

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{P} = \mathbf{AB}$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයා, a හි කිසිදු අගයකට $\mathbf{P}^{-1}$ **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{P}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

a සඳහා මෙම අගය සහිත ව, $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{I}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසයයි.

$\mathbf{Q}^{-1}$ ලියා දක්වා $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\mathbf{R} = \left(\frac{1}{5}\mathbf{Q}\right)^{-1}$ වන පරිදි $\mathbf{R}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ. z හි, මාපාංකය $|z|$ හා ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z}$ අර්ථ දක්වන්න.

(i) $z\bar{z} = |z|^2$,

(ii) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$ හා $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$

බව පෙන්වන්න.

$z \neq 1$ හා $w = \frac{1+z}{1-z}$ යැයි ගනිමු. $\mathrm{Re}\, w = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ හා $\mathrm{Im}\, w = \frac{2\,\mathrm{Im}\, z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha \ (0 < \alpha < 2\pi)$ නම්, $w = i\cot\frac{\alpha}{2}$ බව තව දුරටත් පෙන්වන්න.

(*c*) ආගන්ඩ් සටහනක, A හා B ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් $-3i$ හා 4 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. C හා D ලක්ෂ්‍ය පළමුවන චතුර්ථ පාදකයේ පිහිටන්නේ $ABCD$ රොම්බසයක් හා $B\hat{A}D = \theta$ වන පරිදි ය; මෙහි $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$ වේ. C හා D ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(a) $P = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}.$ 10

$\boxed{10}$

PAPERMASTER.LK

$\begin{vmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 2a = 0.$ 5

$\therefore$ a හි කිසිම අගයක් සඳහා P^{-1} නොපවතී. 5 **10**

වෙනත් ක්‍රමයක්

P^{-1} පැවතීම සඳහා

$\begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, c, d, e \in \mathbb{R}$ වන පරිදි පැවතිය යුතුය. 5

$\Leftrightarrow 2b + 2ad = 1, \quad b + ad = 0, \quad 2c + 2ae = 0$ සහ $c + ae = 1,$

මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore$ a හි කිසිම අගයක් සඳහා P^{-1} නොපවතී.

5

10

If $P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම් $\begin{pmatrix} 2+4a \\ 1+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$ 5

$\Leftrightarrow 2 + 4a = 10$ සහ $1 + 2a = 5.$

$\Leftrightarrow a = 2.$ 5 **10**

$a = 2.$

$Q = P + I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$ 5

$\therefore Q^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$ 10 **15**

$AA^T - \frac{1}{2}R = \left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1}$

$= 5Q^{-1}.$ 5

$\Leftrightarrow R = 2AA^T - 10Q^{-1}$

$= 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 10\left(\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 5

5

$= 2\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$

$= \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 14 & 36 \end{pmatrix}.$ 5 **20**

PAPERMASTER.LK

(b) $z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

5 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ සහ $\bar{z} = x - iy.$ 5 — 10

(i) $z\,\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$ 5

(ii) $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\,\mathrm{Re}\,z$ සහ 5

$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}\,z.$ 5 — 15

$z \neq 1$ නම් $w = \dfrac{1+z}{1-z} \times \dfrac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}} = \dfrac{1 - z\bar{z} + z - \bar{z}}{|1-z|^2} = \dfrac{1 - |z|^2 + 2i\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}$

5 5 5

$\Rightarrow \mathrm{Re}\,w = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ සහ $\mathrm{Im}\,w = \dfrac{2\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}$ 5 — 20

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha \; (0 < \alpha < 2\pi).$

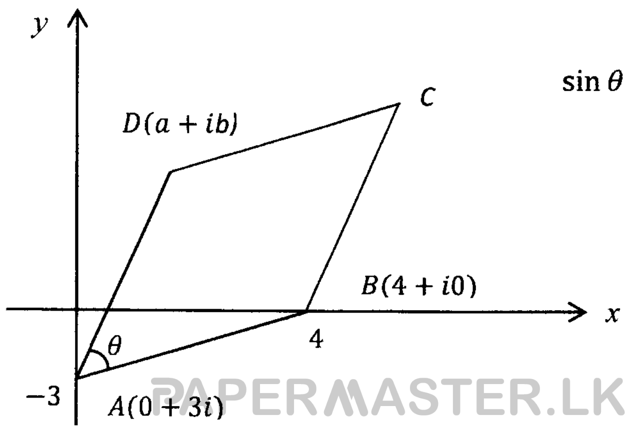
එවිට $|z| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,w = 0.$ 5

$\therefore\; w = \dfrac{2i\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2} = \dfrac{2i\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \dfrac{2i\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = i\,\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = i\cot\dfrac{\alpha}{2}.$

5 5 5

20

(c)



$\sin\theta = \dfrac{7}{25}, \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{24}{25}$

PAPERMASTER.LK

$D \equiv (a, b)$ යයි ගනිමු.

A වටා AB වාමාවර්තව භ්‍රමණය කිරීමෙන් AD ගත හැක.

$\therefore a + i(b+3) = (4+3i)(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= (4+3i)\left(\frac{24}{25} + i\frac{7}{25}\right)$ 10

$\Leftrightarrow a + i(b+3) = 3 + 4i.$

$\Leftrightarrow a = 3$ හා $b = 1.$

$\therefore D$ මගින් $3 + i$ නිරූපණය කරයි. 05

$C \equiv (p, q)$, නම්, $\frac{p+0}{2} = \frac{3+4}{2}$ හා $\frac{q-3}{2} = \frac{1+0}{2}.$

$\Rightarrow p = 7$ හා $q = 4.$

$\therefore C$ මගින් $7+4i$ නිරූපණය කරයි. 05 $\boxed{30}$

---

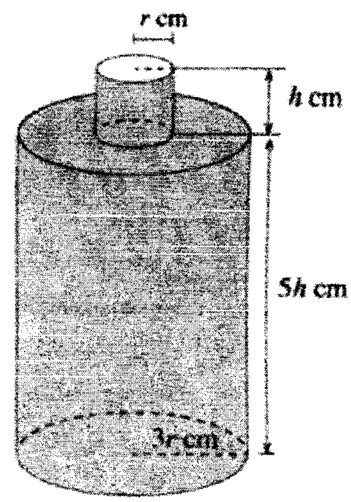
14. (a) $x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා $f(x) = \frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1)$ සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පවතින පරිදි $k \in \mathbb{R}$ හි අගයන් සොයන්න.

(b) අරය $3r$ cm හා උස $5h$ cm වන සංවෘත කුහර තුනී වෘත්ත සිලින්ඩරයක උඩත් මුහුණතින් අරය r cm වන තැටියක් ඉවත් කර, අරය r cm හා උස h cm වන විවෘත කුහර තුනී වෘත්ත සිලින්ඩරයක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සවිකර 391π cm^3 ක පරිමාවක් සහිත බෝතලයක් සාදා ගත යුතුව ඇත. බෝතලයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = \pi r(32h + 17r)$ **බව දී ඇත.** S අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.



(a) $x \neq -1, \frac{1}{3}$ සඳහා; $f(x) = \frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}.$

PAPERMASTER.LK

එවිට

$$f'(x) = \frac{16(x+1)^2(3x-1) - 16(x-1)[2(x+1)(3x-1) + 3(x+1)^2]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$ 15

$$= \frac{16(x+1)[(x+1)(3x-1) - 2(x-1)(3x-1) - 3(x-1)(x+1)]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$

$$= \frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2};\ \left(x \neq -1, \frac{1}{3}\right).$$ 10

25

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, එවිට $y = 0$. 5

$\lim_{x\to-1^{\pm}} f(x) \to \infty$, $\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x) \to \infty$ සහ $\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x) \to -\infty$.

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ: $x = -1$ සහ $x = \frac{1}{3}$. 5

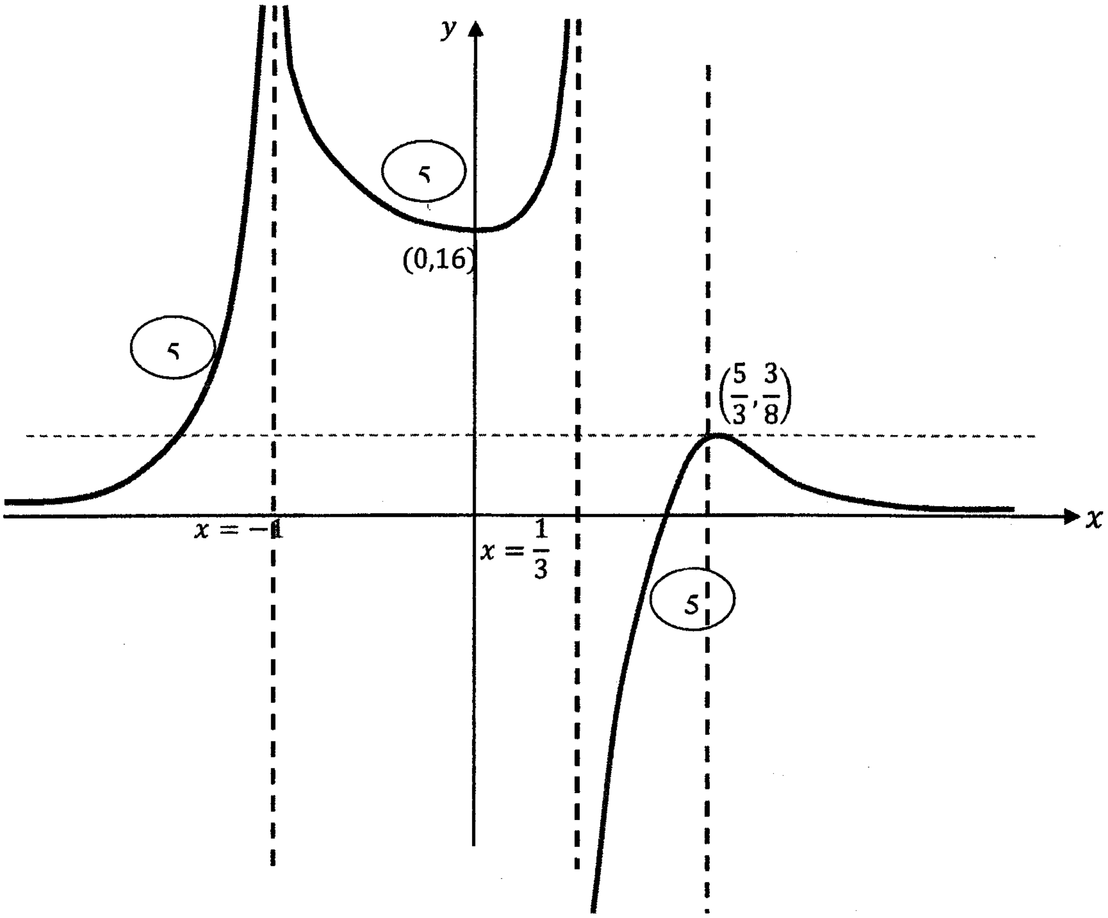
හැරුම් ලක්ෂ්‍ය වලදී $f'(x) = 0. \Leftrightarrow x = 0$ හෝ $x = \frac{5}{3}$.

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} < x < \infty$
$f'(x)$ ලකුණ	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$
	f ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ	f ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ	f ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ	f ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ	f ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ
	5	5	5	5	5

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය: $(0,16)$ ස්ථානීය අවමයක් සහ $\left(\frac{5}{3}, \frac{3}{8}\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක්.

5 5

PAPERMASTER.LK



60

$k(x+1)^2(3x-1) = 16(x-1).$

$$\Leftrightarrow k = \frac{16(x-1).}{(x+1)^2(3x-1)}. \quad 5$$

$k \le 0$ හෝ $\frac{3}{8} < k < 16$ නම් පමණක් දෙන ලද සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පමණක් පවතී.

5 5

15

(b) පරිමාව: $391\pi = \pi(3r)^2(5h) + \pi r^2 h$

$$\Rightarrow 391 = 46r^2h$$

$$\Rightarrow h = \frac{17}{2r^2}, \quad (r > 0).$$

5 10

පෘෂ්ඨික වර්ගඵලය: $S = \pi r(32h + 17r).$

$$= 17\pi\left(\frac{16}{r} + r^2\right)$$

5

PAPERMASTER.LK

5 $\dfrac{dS}{dr} = 17\pi\left(-\dfrac{16}{r^2} + 2r\right) = \dfrac{34\pi(r^3 - 8)}{r^2}$ 5

$\dfrac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 2.$ 5

$0 < r < 2$ විටදී $\dfrac{dS}{dr} < 0$ සහ $r > 2$ විටදී $\dfrac{dS}{dr} > 0.$

5 5

$\therefore$ $r = 2$ විටදී S අවම වේ. 5

50

PAPERMASTER.LK

15. (a) (i) x^2, x^1 හා x^0 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්,

සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{1}{x^3(x-1)}$ යන්න භින්න භාග වලින් ලියා දක්වා $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x-1)}\,dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^2 \cos 2x \, dx$ සොයන්න.

(b) $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx = 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$ සොයන්න.

(a) (i) $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$

සංගුණක සැසඳීමෙන්:

$x^2 \quad : -A + B = 0$ 5

$x^1 \quad : -B + C = 0$ 5

$x^0 \quad : \quad -C = 1$ 5

$A = -1, B = -1$ and $C = -1$ 5

20

$1 = -x^2(x-1) - x(x-1) - (x-1) + x^3$

$\therefore \frac{1}{x^3(x-1)}$ භින්න භාග ඇසුරින්:

$\frac{1}{x^3(x-1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x-1}$ ලෙස වේ. 5

එනයින් $\int \frac{1}{x^3(x-1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^3}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$

$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ln|x-1| + C,$ 5

5 5 5 5

මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ.

30

5

(ii) $\int x^2 \cos 2x\,dx = \frac{x^2 \sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int 2x \sin 2x\,dx$ 5

$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$ 5

5

PAPERMASTER.LK

$$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C,$$ මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ. 5 5

30

(b) $\theta = \tan^{-1}(\cos x);\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\tan\theta = \cos x \implies \sec^2\theta\, d\theta = -\sin x\, dx$ 5

$x = 0 \implies \theta = \tan^{-1}(1) \implies \theta = \frac{\pi}{4}$ 5

$x = \pi \implies \theta = \tan^{-1}(-1) \implies \theta = -\frac{\pi}{4}$ 5

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta \quad \left(\sqrt{sec^2\theta} = \sec\theta \text{ as } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$ 5 5 5

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{(\sec\theta+\tan\theta)}d\theta$$ 5

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1) - \ln(\sqrt{2}-1)$$ 5

$$= \ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\right)$$

$$= 2\ln(\sqrt{2}+1).$$ 5

50

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi-x)}}dx$$ 5

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$$ 5

$$\implies I = \pi[2\ln(\sqrt{2}+1)] - I$$ 5

$$\implies 2I = 2\pi\ln(\sqrt{2}+1)$$

$$\implies I = \pi\ln(\sqrt{2+1}).$$ 5

20

PAPERMASTER.LK

16. $A \equiv (-2, -3)$ හා $B \equiv (4, 5)$ යැයි ගනිමු. AB රේඛාව සමග l_1 හා l_2 රේඛා එක එකක් සාදන සුළු කෝණය $\frac{\pi}{4}$ වන පරිදි A ලක්ෂ්‍යය හරහා යන l_1 හා l_2 රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

P හා Q ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් l_1 හා l_2 මත ගෙන ඇත්තේ $APBQ$ සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි ය.

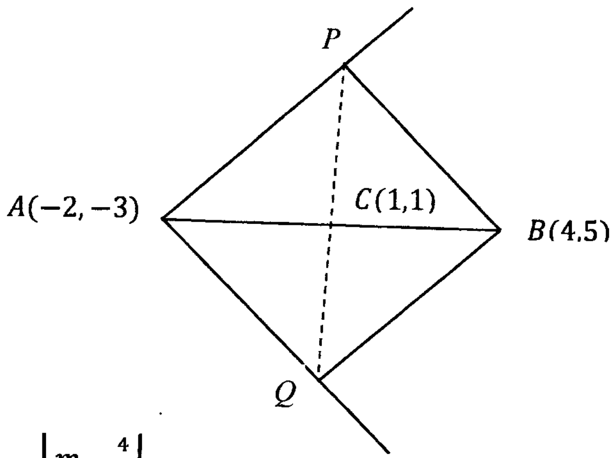
PQ හි සමීකරණය සොයා, P හා Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

තව ද A, P, B හා Q ලක්ෂ්‍ය හරහා යන S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda > 1$ යැයි ගනිමු. $R \equiv (4\lambda, 5\lambda)$ ලක්ෂ්‍යය, S වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

R ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය සොයන්න.

$\lambda (> 1)$ විචලනය වන විට, මෙම ස්පර්ශ ජ්‍යායන් අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.



$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m-\frac{4}{3}}{1+\frac{4m}{3}}\right| \quad 10$$

$$\Rightarrow \left(m-\frac{4}{3}\right)^2 = \left(1+\frac{4m}{3}\right)^2 \quad 5$$

$$\Rightarrow 7m^2 + 48m - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (7m-1)(m+7) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{7} \text{ or } m = -7.$$

5 5

PAPERMASTER.LK

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණ වන්නේ:

(i) $y+3=\frac{1}{7}(x+2) \Rightarrow x-7y-19=0,$ 10

සහ

(ii) $y+3=-7(x+2) \Rightarrow 7x+y+17=0.$ 10

45

---

l_1 යනු $x-7y-19=0$ රේඛාව සහ අනෙක l_2 යැයි ගනිමු.

PQ හි සමීකරණය: $y-1=-\frac{3}{4}(x-1) \Rightarrow 3x+4y-7=0$ 10

l_1 සහ PQ හි ඡේදන ලක්ෂය: $P=(5,-2)$ 5

$Q=(x_0,y_0)$ නම්,

$$\frac{5+x_0}{2}=1 \Rightarrow x_0=-3$$ 5

$$\frac{-2+y_0}{2}=1 \Rightarrow y_0=4$$

$Q\equiv(-3,4).$ 5

25

A, P, B හා Q ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය AB විෂ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තය වේ. 10

$(y-5)(y+3)+(x-4)(x+2)=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x-2y-23=0$

10

20

$CR^2=(4\lambda-1)^2+(5\lambda-1)^2$ හා වෘත්තයේ අරය 5 වේ. 10

දැන් $CR^2-25=(4\lambda-1)^2+(5\lambda-1)^2-25$ 5

$=41\lambda^2-18\lambda-23$

$=(\lambda-1)(41\lambda+23)>0$ as $\lambda>1.$ 10

$\therefore R$ ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයට පිටතින් පිහිටයි. 5

30

PAPERMASTER.LK

අවශ්‍ය ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය

$$x(4\lambda) + y(5\lambda) - (x + 4\lambda) - (y + 5\lambda) - 23 = 0$$ 10

$$(-x - y - 23) + \lambda(4x + 5y - 9) = 0$$ 5

$\therefore$ ස්පර්ශ ජ්‍යාය $4x + 5y - 9 = 0$ හා $x + y + 23 = 0$ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි.

එය අචල ලක්ෂයකි. 5 10

30

PAPERMASTER.LK

17. (a) $0 \le \theta \le \pi$ සඳහා $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ විසඳන්න.
$\cos\theta$ ඇසුරෙන් $\cos 2\theta$ හා $\cos 3\theta$ ලියා දක්වා, $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $t = \cos\theta$ වේ.

ඒ නයින්, $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල තුන ලියා දක්වා $4t^2 - 2t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ බව පෙන්වන්න.
$\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D යනු $BD : DC = m : n$ වන පරිදි BC මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු; මෙහි $m, n > 0$ වේ. $B\hat{A}D = \alpha$ හා $D\hat{A}C = \beta$ බව දී ඇත. BAD හා DAC ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $b = AC$ හා $c = AB$ වේ.

ඒ නයින්, $\frac{mb - nc}{mb + nc} = \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(c) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

5 5

(a) $0 \le \theta \le \pi$ සඳහා $\cos 3\theta = -\cos 2\theta = \cos(\pi - 2\theta)$

$$3\theta = 2n\pi \pm (\pi - 2\theta), \ n \in \mathbb{Z}. \quad 5$$

$$5\theta = 2n\pi + \pi, \ n \in \mathbb{Z} \text{ or } \theta = 2n\pi - \pi, \ n \in \mathbb{Z}.$$

$0 \le \theta \le \pi$ බැවින් විසඳුම් $\theta = \pi, \ \frac{\pi}{5}$ හා $\frac{3\pi}{5}$ **30**

5 5 5

---

5 5

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ and $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

$$\therefore \cos 2\theta + \cos 3\theta = 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1$$
$$= 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1, \text{ මෙහි } t = \cos\theta.$$

10 **20**

PAPERMASTER.LK

$\therefore\ 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ හි මූලයන් $\cos\pi, \cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ 10

$\cos\pi = -1 \implies t+1$ යනු $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ හි සාධකයකි.

$\implies 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = (t+1)(4t^2 - 2t - 1) = 0$ 10

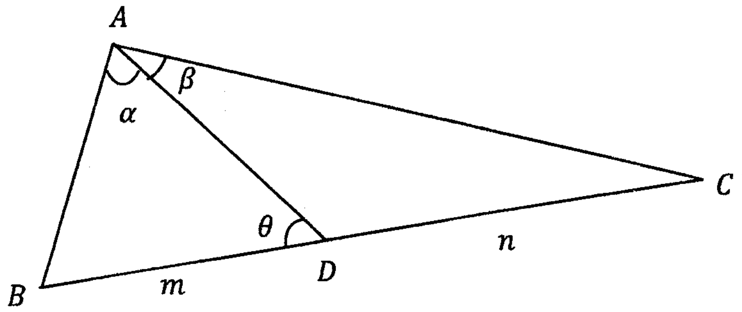
$\implies 4t^2 - 2t - 1 = 0$ හි මූලයන් $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$. 5

$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4\times4\times1}}{2\times4} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ 5

$\cos\frac{3\pi}{5} < 0$ බැවින් $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. 5

35

(b)



$B\widehat{D}A = \theta$ යැයි ගනිමු.

සයින් නීතිය භාවිතයෙන්:

$BAD\ \Delta: \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\theta}$ 10

$ADC\ \Delta: \frac{DC}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin(\pi-\theta)}$ 10

$\implies \frac{(BD)\sin\beta}{(DC)\sin\alpha} = \frac{c}{b}$

$\implies \frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. 5

25

PAPERMASTER.LK

$$mb = nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{mb-nc}{mb+nc} = \frac{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - nc}{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + nc} \quad 5$$

$$= \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \quad 5 \quad 5$$

$$= \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

5

$\boxed{20}$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma$ හා $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \delta$ යැයි ගනිමු. $0 < \delta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

5 $\quad 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$

$\Leftrightarrow \tan(2\gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$ $\quad$ ($\frac{\pi}{2} - \delta$ සුළු කෝණයක් බැවින්, 2γ ද සුළු කෝණයකි.)

$$\tan 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \quad 5$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cot\delta = \frac{3}{4} \quad 5$$

$$\therefore 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2}.. \quad 5$$

$\boxed{20}$

PAPERMASTER.LK

සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි.

රහස්‍ය ලේඛනයකි.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2018

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

PAPERMASTER.LK

මෙය උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි.
පරීක්ෂක සාකච්ඡා පැවැත්වෙන අවස්ථාවේදී ඉදිරිපත්වන අදහස් අනුව මෙහි වෙනස්කම් කරනු ලැබේ.

අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතුව ඇත.

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න. ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ $\triangle$ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමඟ $\square$ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i) ....
....
.... √ $\frac{4}{5}$

(ii) ....
....
.... √ $\frac{3}{5}$

(iii) ....
....
.... √ $\frac{3}{5}$

03 (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

PAPERMASTER.LK

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

මෙවර සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රයට අදාළ ලකුණු ලකුණු ලැයිස්තුවේ "I වන පත්‍රය" තීරුවේ ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලියන්න. අදාළ විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කර "II වන පත්‍රය" තීරුවේ II පත්‍රයේ අවසාන ලකුණු ඇතුළත් කරන්න. 51 චිත්‍ර විෂයයේ I, II හා III පත්‍රවලට අදාළ ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවල ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලිවිය යුතු වේ.

***

PAPERMASTER.LK

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2018

10 - සංයුක්ත ගණිතය

ලකුණු බෙදීයාම

II පත්‍රය

A කොටස	:	10 X 25	=	250
B කොටස	:	05 X 150	=	750

එකතුව = 1000/10

II පත්‍රය අවසාන ලකුණ = 100

PAPERMASTER.LK

1. සුමට තිරස් මේසයක් මත එකම සරල රේඛාවක් දිගේ එකිනෙක දෙසට එකම u වේගයෙන් චලනය වෙමින් තිබෙන, ස්කන්ධ පිළිවෙළින් $2m$ හා m වූ A හා B අංශු දෙකක් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු A අංශුව නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ බව ද ගැටුම නිසා B මත යෙදුන ආවේගයෙහි විශාලත්වය $2mu$ බව ද පෙන්වන්න.

පද්ධතියට $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

$\rightarrow \quad 0 = [2m(0) + mv] - [2mu - mu]$ 5

$\Rightarrow mv = mu.$

$\Rightarrow v = u$ 5

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමය යෙදීමෙන්: $v - 0 = -e(-u - u)$ 5

$u = e\,(2u)$

$e = \frac{1}{2}.$ 5

B සඳහා $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්:

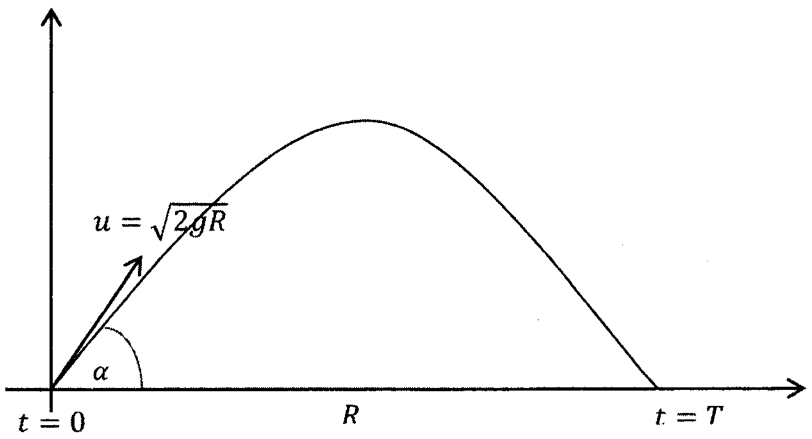
$\longrightarrow$ ආවේගය $= mv - m(-u)$

$= mu + mu = 2mu.$ 5

25

PAPERMASTER.LK

2. තිරස් බිම මත වූ ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසට $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් $u = \sqrt{2gR}$ ආරම්භක වේගයෙන් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ; මෙහි R යනු, බිම මත ප්‍රක්ෂිප්තයේ තිරස් පරාසය වේ. තිබිය හැකි ආරම්භක ප්‍රක්ෂේපණ දිශා දෙක අතර කෝණය $\frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.



$s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්, පියාසර කාලය T:

$\uparrow$ $0 = (u \sin \alpha)T - \frac{1}{2} gT^2 \implies T = \frac{2u \sin\alpha}{g}$ 5

$\rightarrow$ $R = (u \cos\alpha).\ T = \frac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$ 5

$R = 2R \sin 2\alpha; \quad \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$ 5

$2\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$

ප්‍රක්ෂේපණය කල හැකි කෝණ දෙක:

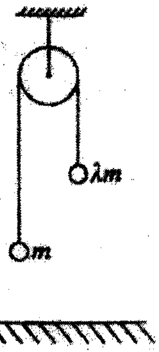
$\alpha_1 = \frac{\pi}{12}$ සහ $\alpha_2 = \frac{5\pi}{12}$; 5

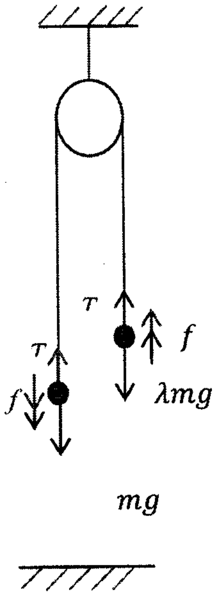
$\therefore\ \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{12}(5 - 1) = \frac{\pi}{3}$ 5

25

PAPERMASTER.LK

3. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය λm වූ Q අංශුවක් අචල, සුමට කප්පියක් උඩින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, තන්තුව තදව ඇතිව, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලබයි. P අංශුව $\frac{g}{2}$ ත්වරණයකින් පහළට චලනය වේ. $\lambda = \frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.
P අංශුව තිරස් අප්‍රත්‍යස්ථ ගෙබිමක v වේගයෙන් ගැටෙයි නම් හා Q අංශුව කිසිවිටෙකත් කප්පිය කරා ළඟා නොවේ නම්, P අංශුව බිම ගැටුණු මොහොතේ සිට Q අංශුව උපරිම උසට ළඟා වීමට ගන්නා කාලය සොයන්න.





$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

P සඳහා: $\downarrow \quad mg - T = m\left(\frac{g}{2}\right)$ -------------------- (1) 5

Q සඳහා: $\uparrow \quad T - \lambda mg = \lambda m\left(\frac{g}{2}\right)$ --------------------- (2) 5

$(1) + (2) \Rightarrow (1-\lambda)mg = (1+\lambda)m(g/2)$ 5

$\Rightarrow \quad 2(1-\lambda) = (1+\lambda)$

$\lambda = \frac{1}{3}.$ 5

Q ට, එහි උපරිම උසට ළඟා වීමට ගතවන කාලය T යන්න
$0 = v - gT$ මගින් දෙනු ලබයි.

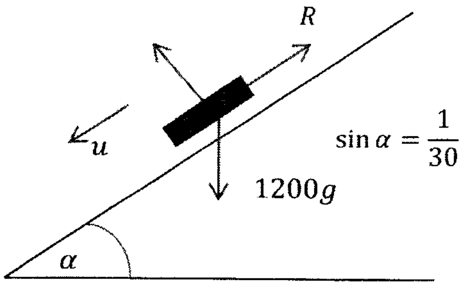
$\Rightarrow T = \frac{v}{g}.$ 5

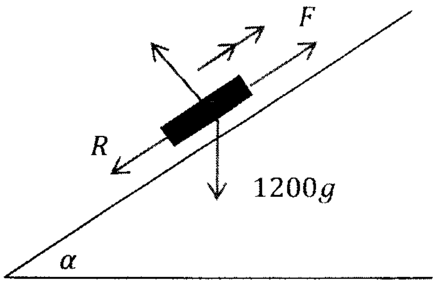
PAPERMASTER.LK

25

4. ස්කන්ධය 1200 kg වූ කාරයක් එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කර තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ සෘජු පාරක් දිගේ පහළට යම් නියත වේගයකින් චලනය වේ; මෙහි $\sin\alpha = \frac{1}{30}$ වේ. ගුරුත්වජ ත්වරණය $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ලෙස ගනිමින් කාරයේ චලිතයට ප්‍රතිරෝධය නිව්ටන වලින් සොයන්න.

කාරය, එම ප්‍රතිරෝධයටම යටත්ව $\frac{1}{6} \text{ m s}^{-2}$ ත්වරණයක් සහිත ව එම පාරම දිගේ ඉහළට ගමන් කරන විට, එහි වේගය 15 m s^{-1} වන මොහොතේ දී එන්ජිමේ ජවය කිලෝවොට් වලින් සොයන්න.





R ප්‍රතිරෝධය පමණක් යටතේ මෝටර් රථය පහලට චලනය වන විට,

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$\swarrow \quad 1200\, g \sin\alpha - R = 0$ (5)

$\Rightarrow \quad R = 1200(10)\left(\frac{1}{30}\right) = 400\ N.$ (5)

මෝටර් රථය ඉහළට චලනය වන විට, එහි ප්‍රකර්ෂණ බලය F යැයි ගනිමු.

$\nearrow \quad F - R - 1200\, g \sin\alpha = 1200\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow F = 1000 \text{ N}$

(5)

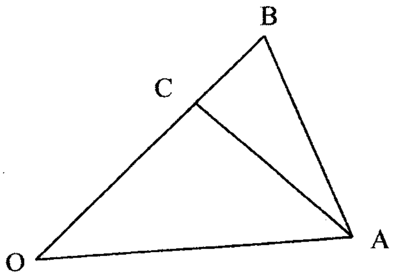
එනයින්, ජවය $P = FV = 15\,(1000)$ W (5)

$P = 15$ kW. (5)

25

PAPERMASTER.LK

5. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $3\mathbf{i}$ හා $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ යනු O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු. C යනු $O\hat{C}A = \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි OB සරල රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC}$ දෛශිකය $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ ඇසුරෙන් සොයන්න.



$\overrightarrow{OA} = 3\mathbf{i}, \qquad \overrightarrow{OB} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

එවිට, $\overrightarrow{OC} = \lambda(\overrightarrow{OB}) = \lambda(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ වේ. මෙහි λ අදිශයකි.

5

$\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CA}$ ට ලම්බ බැවින්,

$\lambda(2\mathrm{i} + 3\mathrm{j}).\{-\lambda(2\mathrm{i} + 3\mathrm{j}) + 3\mathrm{i}\} = 0$ 5

5

$6 - 13\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{6}{13}$ 5

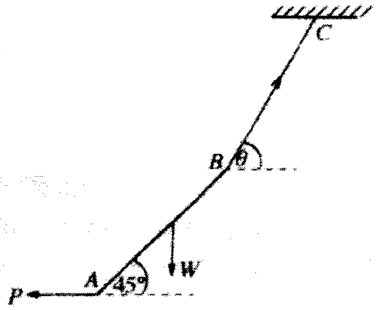
$\therefore \overrightarrow{OC} = \frac{12}{13}\mathrm{i} + \frac{18}{13}\mathrm{j}.$ 5

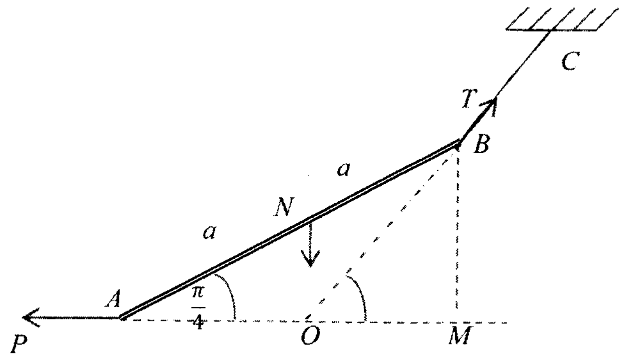
25

PAPERMASTER.LK

6. දිග $2a$ හා බර W වූ AB ඒකාකාර දණ්ඩක්, BC සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් හා A කෙළවරේ දී යොදන ලද P තිරස් බලයක් මගින් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සමතුලිතතාවේ අල්වා තබා ඇත. දණ්ඩ, තිරස සමග $45°$ කෝණයක් සාදන බව දී ඇත්නම්, BC තන්තුව තිරස සමග සාදන θ කෝණය $\tan\theta = 2$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

මෙම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය W ඇසුරෙන් සොයන්න.





BMO බල ත්‍රිකෝණයකි.

$BM = \frac{2a}{\sqrt{2}}$; $OM = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 5

$$tan\theta = \frac{BM}{OM} = \frac{2a/\sqrt{2}}{a/\sqrt{2}}$$

$\tan\theta = 2$ 5

$\uparrow T \sin\theta - W = 0$ 5

$= \frac{W}{\sin\theta} = \frac{W\sqrt{5}}{2}$ 5 $\left(\because \ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

5

25

PAPERMASTER.LK

7. A හා B යනු S නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ හා $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ වේ. $P(A|B')$, $P(A'\cap B')$ හා $P(B'|A')$ සොයන්න; මෙහි A' හා B' මගින් පිළිවෙළින් A හා B සිද්ධිවල අනුපූරක සිද්ධි දැක්වේ.

සිද්ධි වල සම්භාවිතා:

$$P(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{1}{4},\ P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

$P(A\cap B')+P(A\cap B)=P(A)$

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6} \qquad 5$$

මේ අනුව

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A\cap B')}{1-P(B)}=\frac{1/6}{3/4}=\frac{2}{9} \qquad 5$$

$$P(A'\cap B')=P\big((A\cup B)'\big)=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B) \qquad 5$$

$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{7}{12} \qquad 5$$

$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{7/12}{1-1/3}=\frac{7/12}{2/3}=\frac{7}{8} \qquad 5$$

25

PAPERMASTER.LK

8. පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සමාන වූ රතු බෝල 4 ක් හා කළු බෝල 3 ක් මල්ලක අඩංගු වේ. වරකට එක බැගින් ප්‍රතිස්ථාපනයෙන් තොරව, බෝල හතරක් සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) ඉවතට ගනු ලබන බෝල එකම පාටින් යුක්ත වීමේ,

(ii) ඕනෑම අනුයාත ඉවතට ගැනීම් දෙකක දී ඉවතට ගනු ලබන බෝල වෙනස් පාටින් යුක්ත වීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.

(i) සියල්ල රතු: $\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{35}$

5

සියල්ල කළු: විය නොහැක.

$\therefore$ පිළිතුර $=\frac{1}{35}$. 5

(ii)

$RBRB:\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{35}$ 5

$BRBR:\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{35}$ 5

$\therefore$ පිළිතුර $=\frac{3}{35}+\frac{3}{35}=\frac{6}{35}$. 5

25

PAPERMASTER.LK

9. එක එකක් 8 ට අඩු ධන නිඛිල පහකට එක මාතයක් පමණක් ඇත. ඒවායේ මධ්‍යනාසය, මාතය හා මධ්‍යස්ථය 6:10:5 අනුපාතවලට පිහිටයි. එම නිඛිල පහ සොයන්න.

මාතය $2a$ යැයි ගනිමු.

එවිට, දී ඇති ධන නිඛිල: $b, c, a, 2a, 2a$ 5

මධ්‍යනාසය: මාතය $= 6:10$

$$\therefore \quad \frac{10(b+c+5a)}{5} = 6 \times 2a$$ 5

5

$\Rightarrow b + c = a$

$\therefore$ දී ඇති නිඛිල වන්නේ $1, 2, 3, 6, 6.$ 10

25

PAPERMASTER.LK

10. එක්තරා නගරයක උෂ්ණත්වය දින 20ක් සඳහා දිනපතා වාර්තාගත කරන ලදී. මෙම දත්ත කුලකය සඳහා මධ්‍යන්‍යය μ හා සම්මත අපගමනය σ පිළිවෙළින් 28 °C හා 4 °C ලෙස ගණනය කර තිබුණි. කෙසේ නමුත් ඉහත උෂ්ණත්වවලින් දෙකක් 35 °C හා 21 °C ලෙස වැරදියට ඇතුළත් කර ඇති බව සොයා ගැනීමෙන් පසුව ඒවා 25 °C හා 31 °C ලෙස නිවැරදි කරන ලදී. μ හා σ හි නිවැරදි අගයන් සොයන්න.

$\mu = 28,\ \sigma_1 = 4$

නිවැරදි කල දත්ත: $35 \longrightarrow 25 \quad (-10)$

$21 \longrightarrow 31 \quad (+10)$

$\therefore$ එකතුව නොවෙනස්ව පවතී.

$\therefore\ \mu = 28$ ම වේ. 5

පැරණි $\sum x_i^2 = 20 \times \sigma_1^2 + 20\mu^2 = 20(4^2 + 28^2)$ 5

නව $\sum x_i^2 =$ පැරණි $\sum x_i^2 - 35^2 - 21^2 + 25^2 + 31^2$ 5

$= 20(4^2 + 28^2) - 8 \times 10$ 5

නව $\sigma^2 = \dfrac{20(28^2 + 4^2) - 8 \times 10 - 20 \times 28^2}{20}$

$= \frac{20\times16-20\times4}{20}$

$= 12$

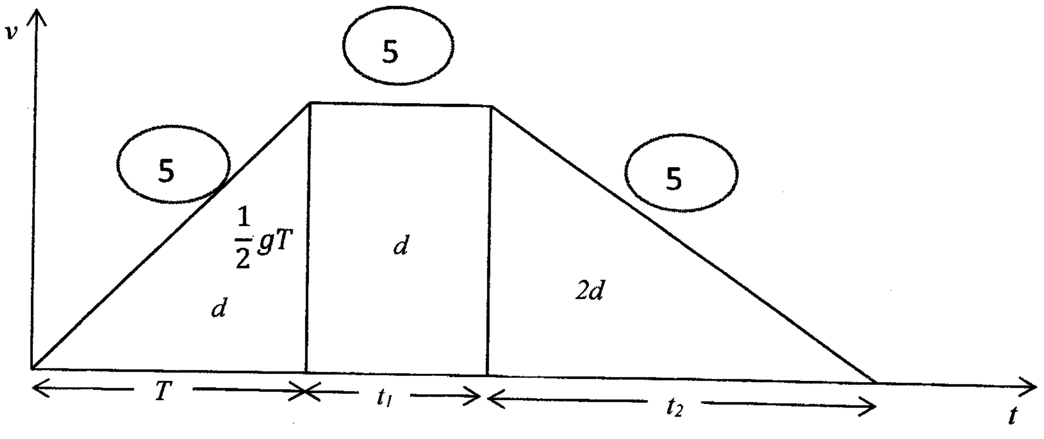
$\therefore$ සම්මත අපගමනය $\sigma = \sqrt{12}.$ 5

25

PAPERMASTER.LK

11. (*a*) මීටර $4d$ ගැඹුරු පතලක චලනය වන සෝපානයක් $t = 0$ කාලයේ දී A ලක්ෂ්‍යයකින් නිශ්චලතාවේ සිට සිරස් ව පහළට චලනය වීමට පටන් ගනී. එය, පළමුව $\frac{g}{2}$ m s^{-2} නියත ත්වරණයෙන් මීටර d දුරක් චලනය වී ඊළඟට එම චලිතය අවසානයේ ලබාගත් ප්‍රවේගයෙන් තව මීටර d දුරක් චලනය වේ. සෝපානය ඉන්පසු A සිට මීටර $4d$ දුරක් පහළින් පිහිටි B ලක්ෂ්‍යයේ දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙන පරිදි නියත මන්දනයකින් ඉතිරි දුර ද චලනය වේ.
සෝපානයෙහි චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින්, A සිට B දක්වා පහළට චලිතය සඳහා සෝපානය ගනු ලබන මුළු කාලය සොයන්න.

(*b*) පොළොවට සාපේක්ෂව u km h^{-1} ඒකාකාර වේගයකින් උතුරු දිශාවට නැවක් යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතක දී නැවේ සිට, දකුණෙන් නැගෙනහිරට β කෝණයකින්, නැවේ පෙතෙහි සිට p km දුරකින් B_1 බෝට්ටුවක් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබේ. මෙම මොහොතේ දී ම, B_2 බෝට්ටුවක් නැවේ සිට බටහිරින් q km දුරකින් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබේ. බෝට්ටු දෙකම පොළොවට සාපේක්ෂව $v(> u)$ km h^{-1} ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙත්වල, නැව අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් යාත්‍රා කරයි. පොළොවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවල පෙත් නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් එකම රූපයක අඳින්න.
පොළොවට සාපේක්ෂව B_1 බෝට්ටුවේ පෙත උතුරෙන් බටහිරට $\beta - \sin^{-1}\left(\frac{u \sin \beta}{v}\right)$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වා, පොළොවට සාපේක්ෂව B_2 බෝට්ටුවේ පෙත සොයන්න.
$\beta = \frac{\pi}{3}$ හා $v = \sqrt{3}u$ යැයි ගනිමු. $3q^2 > 8p^2$ නම්, B_1 බෝට්ටුව B_2 බෝට්ටුවට පෙර නැව අල්ලා ගන්නා බව පෙන්වන්න.



15

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}gT\right) \text{------------(1)}$$ 5

$$d = \left(\frac{1}{2}gT\right)t_1 \text{-----------(2)}$$ 5

PAPERMASTER.LK

(1) හා (2) $\Rightarrow\ t_1 = \frac{T}{2}$ 5

$$2d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}gT\right)\cdot t_2$$ 5

(1) හා (3)

$\Rightarrow\ t_2 = 2T$ 5

$(1) \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4d}{g}}$ 5

සම්පූර්ණ කාලය$= T + t_1 + t_2$

$= T + \frac{T}{2} + 2T = \frac{7T}{2} = 7\sqrt{\frac{d}{g}}$ 5

35

(b) $\underline{V}(S,E) = u \uparrow$,

$\underline{V}(B_i,E) = v$ for $i = 1, 2,$

$\underline{V}(B_1,S) = \nwarrow \beta$, සහ 10

$\underline{V}(B_2,S) = \longrightarrow$

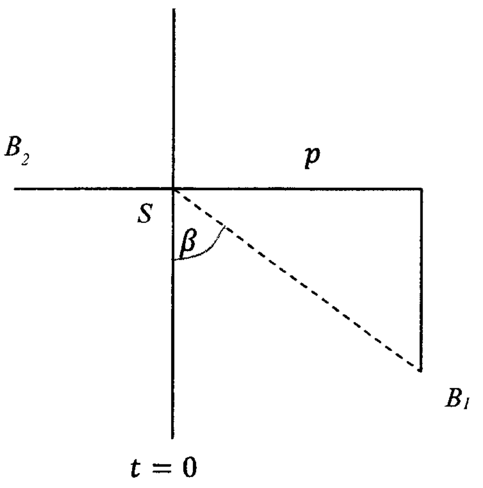
$\underline{V}(B_i,E) = \underline{V}(B_i,S) + \underline{V}(S,E)$ 10

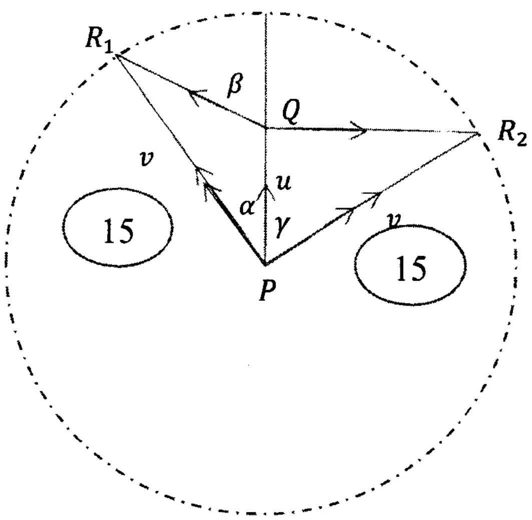
$= \underline{V}(S,E) + \underline{V}(B_i,S)$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i}$

$= \overrightarrow{PR_i}$ for $i = 1, 2.$

PAPERMASTER.LK





PQR_1 ත්‍රිකෝණයට සයින් සූත්‍රය භාවිතයෙන් $\dfrac{v}{\sin\beta} = \dfrac{u}{\sin(\beta-\alpha)}$ 5

$$\sin(\beta-\alpha) = \frac{u\sin\beta}{v}$$

$$(\beta-\alpha) = \sin^{-1}\left(\frac{u\sin\beta}{v}\right)$$

$$\alpha = \beta - \sin^{-1}\left(\frac{u\sin\beta}{v}\right) \text{------------- (i)}$$ 5

$\therefore$ B_1 හි පෙත උතුරෙන් බටහිරට සාදන α කෝණය (i) මගින් දෙනු ලැබේ.

අනුරූපව B_2 හි පොළවට සාපේක්ෂව පෙත උතුරෙන් නැගෙනහිරට γ කෝණයක් සාදයි. මෙහි $\gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{u}{v}\right)$. 5

65

PAPERMASTER.LK

(ii) දෙන ලද: $\beta = \frac{\pi}{3}$ හා $v = \sqrt{3}u$.

එවිට

$$\alpha = \frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\frac{u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{u}{\sqrt{3}}}\right) = \frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}$$ 5

$\therefore PQ = QR_1$

$\Rightarrow V(B,S) = u.$ 5

B_1 සාපේක්ෂ පථය ඔස්සේ

B_1 ට දුර $= \frac{2p}{\sqrt{3}}$ 5

B_1 ට කාලය $t_1 = \frac{\frac{2p}{\sqrt{3}}}{u} = \frac{2p}{\sqrt{3}u}.$ 5

B_2 ට කාලය $t_2 = \frac{q}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{q}{u\sqrt{3-1}} = \frac{q}{\sqrt{2}u}.$ 5

$t_1 < t_2$ නම් B_1, B_2 ට පෙර S අල්ලා ගනී. 5

එනම් $\frac{2p}{\sqrt{3}u} < \frac{q}{\sqrt{2}u}$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}p < \sqrt{3}q$

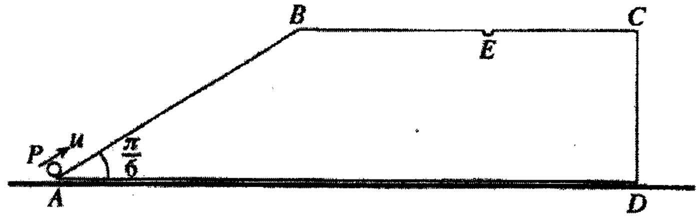
$\Rightarrow 8p^2 < 3q^2.$ 5

35

PAPERMASTER.LK

12. (a) $AB = a$ හා $B\hat{A}D = \frac{\pi}{6}$ වන පරිදි වූ රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ ත්‍රපීසියම, ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට ඒකාකාර කුට්ටියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩකි. AD හා BC රේඛා සමාන්තර වන අතර AB රේඛාව එය අඩංගු මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවකි. AD අයත් මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත ඇතිව කුට්ටිය තබනු ලබයි. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් A ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා, එයට $\overrightarrow{AB}$ දිගේ u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබයි; මෙහි $u^2 = \frac{7ga}{3}$ වේ. කුට්ටියට සාපේක්ෂව P හි මන්දනය $\frac{2g}{3}$ බව පෙන්වා, P අංශුව B කරා ළඟා වන විට, කුට්ටියට සාපේක්ෂව P අංශුවෙහි ප්‍රවේගය සොයන්න.

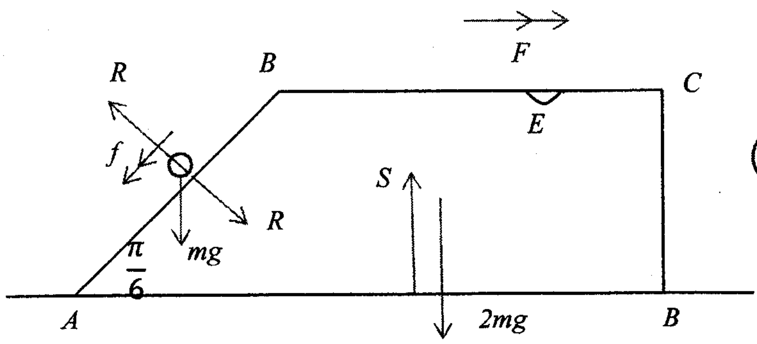
තව ද $BE = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ වන පරිදි කුට්ටියෙහි උඩත් මුහුණතෙහි BC මත වූ E ලක්ෂ්‍යයේ කුඩා සිදුරක් ඇත. කුට්ටියට සාපේක්ෂව චලිතය සැලකීමෙන්, P අංශුව E හි ඇති සිදුරට වැටෙන බව පෙන්වන්න.



(b) දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. අංශුව O ට සිරස් ව පහළින් නිශ්චලව එල්ලී තිබෙන අතර එයට විශාලත්වය $u = \sqrt{kag}$ වූ තිරස් ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ; මෙහි $2 < k < 5$ වේ. තන්තුව θ කෝණයකින් හැරී තවමත් නොබුරුල්ව තිබෙන විට අංශුවේ v වේගය $v^2 = (k-2)ag + 2ag\cos\theta$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

මෙම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

$\theta = \alpha$ වන විට තන්තුව බුරුල් වන බව **අපෝහනය** කරන්න; මෙහි $\cos\alpha = \frac{2-k}{3}$ වේ.



10

$\underline{a}(P,W) = f$ ↙ $\qquad \underline{a}(W,E) = F$ ⟶⟶

5

$\underline{F} = m\underline{a}$

පද්ධතියට $\rightarrow$ $0 = m\left(-f\cos\frac{\pi}{6} + F\right) + 2mF$

15

PAPERMASTER.LK

5

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}f + 3F \Rightarrow \frac{\sqrt{3}f}{6} = F$$

P සඳහා $\swarrow$ $mg\cos\frac{\pi}{3} = m\left(f - F\cos\frac{\pi}{6}\right)$ 10

$\frac{g}{2} = f - \frac{\sqrt{3}f}{2} \Rightarrow \frac{g}{2} = f - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}f$ 5

$\Rightarrow f = \frac{2g}{3}.$ 5

කුට්ටියට සාපේක්ෂව B ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුවේ ප්‍රවේගය චලිතය v යැයි ගනිමු.

$v^2 = u^2 + 2as$ භාවිතයෙන්

$v^2 = u^2 - 2\left(\frac{2g}{3}\right)a$ 5

$= \frac{7ga}{3} - \frac{4ga}{3}$

$v = \sqrt{ga}$ 5

65

AB මුහුණතින් ඉවත්වීමෙන් පසු, කුට්ටියට සාපේක්ෂව අංශුවේ චලිතය සඳහා

$\underline{a}(P,W) = \underline{a}(P,E) + \underline{a}(E,W)$

$= \downarrow g + \underline{0}$ ($\because$ කුට්ටිය නියත ප්‍රවේගයෙන් චලිත වන බැවින්)

$= \downarrow g$ 10

කුට්ටියේ උඩත් මුහුණතට නැවත ළඟා වීමට P අංශුව ගනු ලබන කාලය t යැයි ගනිමු.

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

එවිට $\uparrow$ $0 = v\sin\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}gt^2$ 5

$= \frac{v}{z}t - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{a}{g}}.$ 5

PAPERMASTER.LK

R යනු කුට්ටියේ උඩත් මුහුණත මත තිරස් සාපේක්ෂ විස්ථාපනය යැයි ගනිමු.

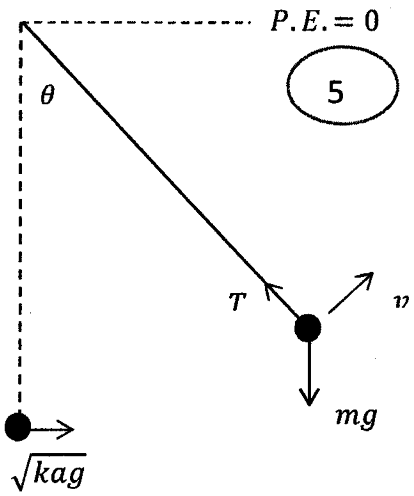
$R = v \quad \cos\frac{\pi}{6} \cdot t$ 5

$R = v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{ga} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}}$

$\therefore R = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$ 5

එබැවින් P අංශුව E හි සිදුරට වැටේ. $\boxed{30}$

(b)



ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්:

$-mga + \frac{1}{2}m(kag) = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$ 15

$\Rightarrow v^2 = -2ga + kag + 2ag\cos\theta$

$v^2 = (k-2)ag + 2ag\cos\theta$ 5 $\boxed{25}$

$\nwarrow \quad \underline{F} = m\underline{a}$

$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a}$ 10

PAPERMASTER.LK

$$\Rightarrow\ T - mg\cos\theta + \frac{m}{a}[(k-2)ag + 2ag\cos\theta]$$

ආතතිය: $T = (k-2)mg + 3mg\cos\theta$. 5

θ වැඩිවන විට v හා T දෙකම අඩුවේ.

$T = mg(3\cos\theta - 2 + k)$

5 $T = 0$ විට $3\cos\theta - 2 + k = 0$

i.e. $\cos\theta = \dfrac{2-k}{3}$. 5

එනම් $\cos\theta = \dfrac{2-k}{3}$,

$$v^2 = (k-2)ag + 2ag\frac{(2-k)}{3}$$

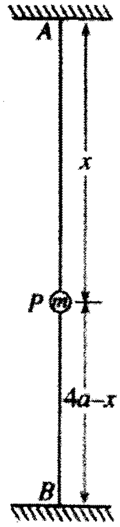
$$= \frac{ag}{3}(k-2) > 0 \text{ as } k > 2.$$ 5

එමනිසා තන්තුව බුරුල් වන්නේ, $\cos\alpha = \dfrac{2-k}{3}$ $\quad (2 < k < 5)$ වූ $\theta = \alpha$ විටය. $\boxed{30}$

$\cos\alpha = \dfrac{2-k}{3} \qquad (2 < k < 5)$.

PAPERMASTER.LK

13. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් එක එකක ස්වාභාවික දිග a හා මාපාංකය mg වූ සමාන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තු දෙකක කෙළවර දෙකකට ඈඳා ඇත. එක තන්තුවක නිදහස් කෙළවර A අචල ලක්ෂ්‍යයකට හා අනික් තන්තුවේ නිදහස් කෙළවර A ට සිරස් ව පහළින් $4a$ දුරකින් පිහිටි B අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත. (රූපය බලන්න.) තන්තු දෙකම නොබුරුල්ව, A ට $\frac{5a}{2}$ දුරක් පහළින් අංශුව සමතුලිතව තිබෙන බව පෙන්වන්න.



P අංශුව දැන්, AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට ඔසවා එම පිහිටීමේ දී නිසලතාවේ සිට සිරුවෙන් මුදාහරිනු ලැබේ. තන්තු දෙකම නොබුරුල් හා AP තන්තුවේ දිග x වන විට, $\ddot{x} + \frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right) = 0$ බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණය $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ ආකාරයෙන් නැවත ලියන්න; මෙහි $X = x - \frac{5a}{2}$ හා $\omega^2 = \frac{2g}{a}$ වේ.

$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් මෙම චලිතයේ විස්තාරය c සොයන්න.

P අංශුව එහි පහත් ම පිහිටීමට ළඟා වන මොහොතේ දී PB තන්තුව කපනු ලැබේ.
නව චලිතයේ දී $x = a$ වන විට අංශුව එහි උච්චතම පිහිටීමට ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

P අංශුව $x = 2a$ හි වූ එහි ආරම්භක පිහිටීමේ සිට පහළට a දුරක් ද ඊළඟට ඉහළට $\frac{a}{2}$ දුරක් ද චලනය වීමට ගනු ලබන මුළු කාලය $\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left(3 + \sqrt{2}\right)$ බව තව දුරටත් පෙන්වන්න.

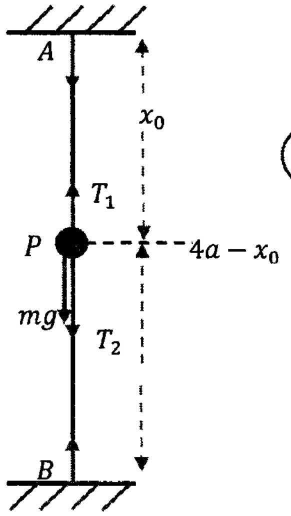
සමතුලිත පිහිටීමේ දී, $x = x_0$ යයි ගනිමු.

එවිට $\uparrow T_1 = T_2 + mg$ 5

$$\frac{mg}{a}(x_0 - a) = \frac{mg}{a}(4a - x_0 - a) + mg$$ 5

$$x_0 - a = 3a - x_0 + a$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{5a}{2}.$$ 5



5

20

P සඳහා $\downarrow$ $\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$$T_2' + mg - T_1' = m\ddot{x}$$ 5

$$\frac{mg}{a}(4a - x - a) + mg - = \frac{mg}{a}(x - a) = m\ddot{x}$$ 10

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right)$$

PAPERMASTER.LK

$\Rightarrow \ddot{x}+\frac{2g}{a}\left(x-\frac{5a}{2}\right)=0.$ 5

එවිට $X=x-\frac{5a}{2}$ හා $\omega^2=\frac{2g}{a}$

$\ddot{X}+\omega^2 X=0.$ 5

සරල අනුවර්තීය චලිතයේ කේන්ද්‍රය වන්නේ $x=\frac{5a}{2}$. 5

$\dot{X}^2=\omega^2(c^2-X^2)$, මෙහි c යනු විස්තාරයයි.

$X=-\frac{a}{2}$ විට $\dot{X}=0$ වේ. 5

$0=\omega^2\left(c^2-\frac{a^2}{4}\right)$ $c=\frac{a}{2}$ 10

$\therefore$ පහත්ම පිහිටීම $X=\frac{a}{2}$ $\Rightarrow x=3a$. 5

$\boxed{50}$

PB තන්තුව කැපීමෙන් පසු

$\downarrow$ $\underline{F}=m\underline{a}$

$mg-T=m\ddot{x}$

$mg-\frac{mg}{a}(x-a)=m\ddot{x}$ 5

$\ddot{x}+\frac{g}{a}(x-2a)=0 \Rightarrow$ $\ddot{Y}+\Omega^2 Y=0$, මෙහි $Y=x-2a$ හා $\Omega^2=\frac{g}{a}$. 5

5 5

නව සරල අනුවර්තීය චලිතයේ කේන්ද්‍රය $x=2a$.

$\dot{Y}^2=\Omega^2(b^2-Y^2)$, මෙහි b යනු විස්තාරයයි. 5

PAPERMASTER.LK

PB තන්තුව කැපීමෙන් මොහොතකට පසු , $\dot{Y}=0$ හා $x=3a$ 5

$\Rightarrow \dot{Y}=0$ at $Y=a$. 5

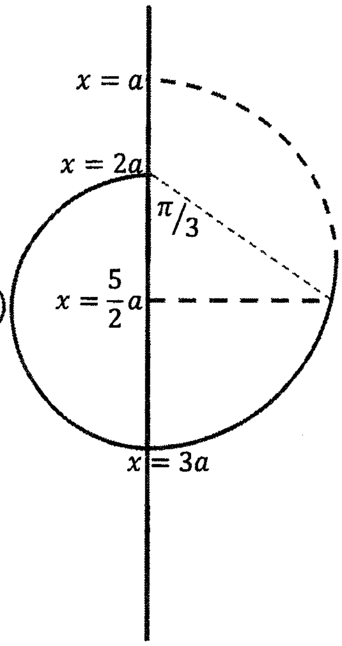
නව සරල අනුවර්තීය චලිතයේ විස්තාරය a වේ.

නැවත $\therefore \dot{Y}=0$ වන්නේ $Y=-a \Rightarrow x=a$ වන විටදීය. 5

එනම් $x=a$ වන විටදීය.

එනම් අංශුව $x=a$ හිදී උච්චතම පිහිටීමට පැමිණෙයි. 5

45



5 10

$x=2a$ සිට $x=3a$ දක්වා කාලය $\dfrac{\pi}{\omega}=\pi\sqrt{\dfrac{a}{2g}}$ 5

$x=3a$ සිට $x=\dfrac{5a}{2}$ දක්වා කාලය $=\dfrac{\pi}{3\Omega}=\dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{a}{g}}$. 10

සම්පූර්ණ කාලය $=\pi\sqrt{\dfrac{a}{2g}}+\dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{a}{g}}$ 5

$=\dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{a}{2g}}(3+\sqrt{2})$. 5

40

PAPERMASTER.LK

14. (*a*) OAB ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද E යනු OD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. F ලක්ෂ්‍යය OA මත පිහිටා ඇත්තේ $OF : FA = 1 : 2$ වන පරිදි ය. O අනුබද්ධයෙන් A හා B හි පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ වේ. $\overrightarrow{BE}$ හා $\overrightarrow{BF}$ දෛශික $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

B, E හා F ඒකරේඛීය බව **අපෝහනය** කර, $BE : EF$ අනුපාතය සොයන්න.

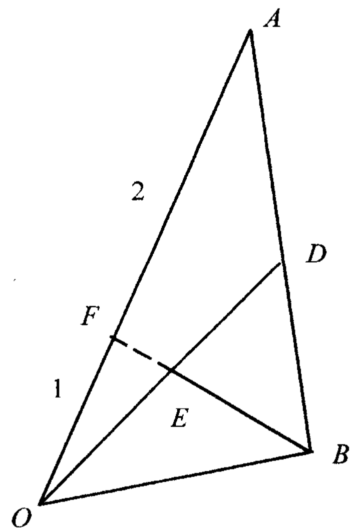
$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DF}$ අදිශ ගුණිතය $|\mathbf{a}|$ හා $|\mathbf{b}|$ ඇසුරෙන් සොයා, $|\mathbf{a}| = 3|\mathbf{b}|$ නම්, $\overrightarrow{BF}$ යන්න $\overrightarrow{DF}$ ට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න.

(*b*) Oxy-තලයේ වූ බල පද්ධතියක් පිළිවෙළින් $(-a, 2a)$, $(0, a)$ හා $(-a, 0)$ ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියාකරන $3P\mathbf{i} + 2P\mathbf{j}$, $2P\mathbf{i} - P\mathbf{j}$ හා $-P\mathbf{i} + 2P\mathbf{j}$ යන බල තුනෙන් සමන්විත වේ; මෙහි P හා a යනු පිළිවෙළින් නිව්ටන හා මීටරවලින් මනින ලද ධන රාශි වේ. O මූලය වටා, පද්ධතියේ දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය, $12Pa$ N m බව පෙන්වන්න.

තව ද පද්ධතිය, විශාලත්වය $5P$ N වූ තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා, එහි දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

දැන්, අතිරේක බලයක් පද්ධතියට ඇතුළත් කරනු ලබන්නේ නව පද්ධතිය දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය $24Pa$ N m වූ යුග්මයකට තුල්‍ය වන පරිදි ය. අතිරේක බලයෙහි විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

(a) $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \underline{b}$



$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\underline{a}$$

$$\overrightarrow{OD} = \tfrac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) \quad 5$$

$$\overrightarrow{OE} = \tfrac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b})$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} = \tfrac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b}) - \underline{b} = \tfrac{1}{4}(\underline{a} - 3\underline{b})$$

5 5

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\underline{a} - \underline{b} = \frac{1}{3}(\underline{a} - 3\underline{b}) \quad 5$$

$$\Longrightarrow 4\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BF}$$

B, E, F ඒක රේඛීය වේ සහ $BE : EF = 3 : 1$ 5

5

30

PAPERMASTER.LK

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\underline{a} - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{6}(\underline{a} + 3\underline{b})$$ 5

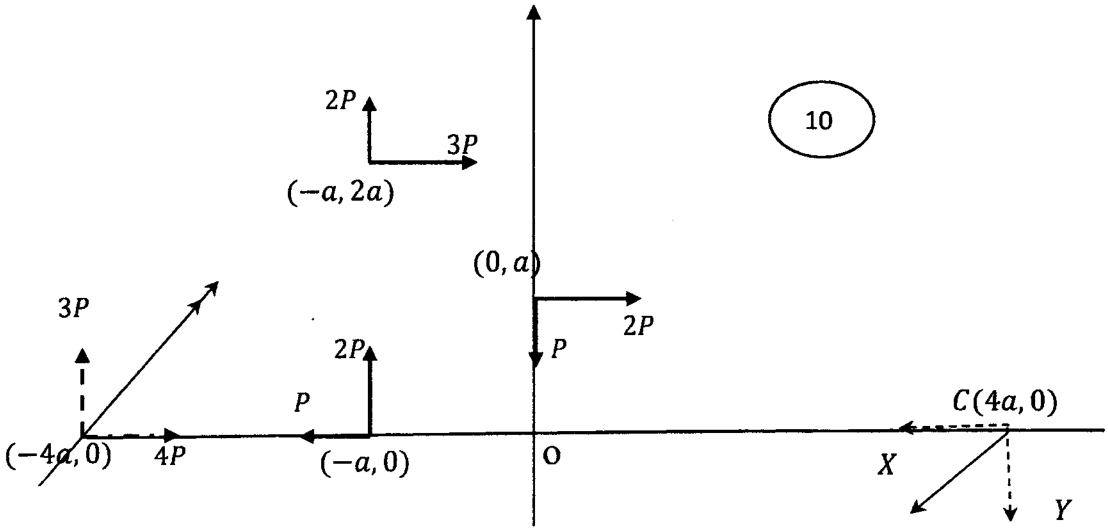
$\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}(\underline{a} - 3\underline{b}) \cdot \frac{1}{6}(-\underline{a} - 3\underline{b})$ 5

$= -\frac{1}{18}\left(|\underline{a}|^2 - 9|\underline{b}|^2\right) = 0$, ($|a| = 3|b|$ බැවින්) 5

∴ ඒවා නිශ්ශුන්‍ය බැවින් $\overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{DF}$ 5

20

(b)



0 වටා වාමාවර්තව ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$G = 2P.a + 3P.2a + 2P.a + 2P.a = 12P.a.$ Nm; 10

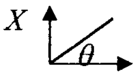
විභේදනයෙන් $\rightarrow$ $X = 3P + 2P - P = 4P$ 5

$\uparrow$ $Y = 2P + 2P - P = 3P$ 5

R සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය $5P$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 5P\ N$ 5

PAPERMASTER.LK



Y ක්‍රියා රේඛාව $x-$ අක්ෂය සමග θ කෝණයක් සාදයි, මෙහි $\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{3}{4}$. 5

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව $(-b, 0)$, $(b>0)$ ලක්ෂ්‍ය යේ දී $x-$ අක්ෂය හමුවේ නම් එවිට

O ↻

$Yb = 3Pb = 12Pa \Rightarrow \quad b = 4a$ 5

5

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x + 4a) \Rightarrow 4y - 3x = 12a$$

10

$\boxed{60}$

දැන් $C \equiv (c, 0)$, $c > 0$ ලක්ෂයේ දී $(-4P, -3P)$ බලයක් යෙදීමෙන් පමණක් පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍යවේ. 5

C ↻ $3P(c + 4a) = 24Pa$ 10

$\Rightarrow c = 4a$

5 5

අමතර බලයේ විශාලත්වය $= 5P$ N, සහ එහි දිශාව x- අක්ෂයේ සෘණ දිශාව සමග

5

$tan^{-1}\left(\frac{-3P}{-4P}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ කෝණයක් සාදයි.

අමතර බලයේ ක්‍රියා රේඛාව $y - 0 = \frac{3}{4}(x - 4a)$ 10

$\Rightarrow 4y - 3x + 12a = 0.$

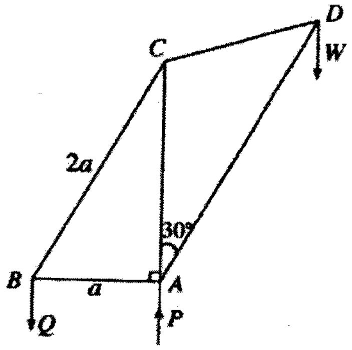
$\boxed{40}$

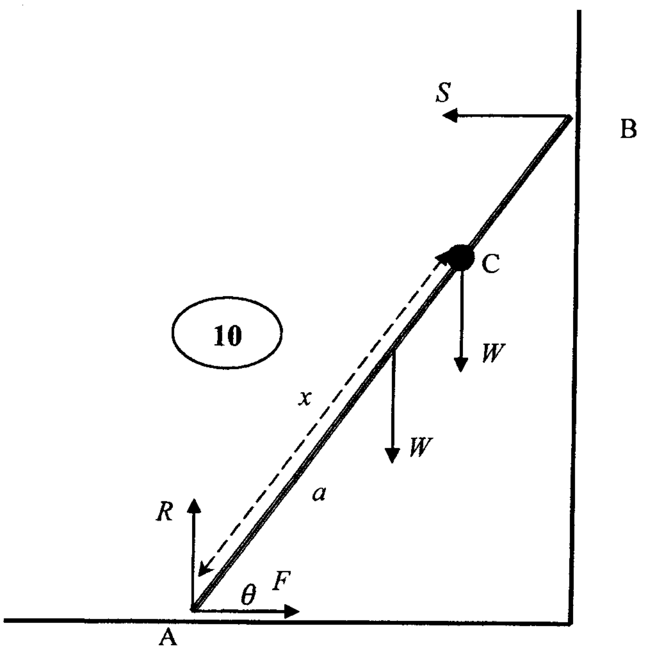
PAPERMASTER.LK

15.(*a*) බර W හා දිග $2a$ වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක A කෙළවර රළු තිරස් බිමක් මත හා B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව තබා ඇත. දණ්ඩ බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටන අතර, එය තිරස සමග θ කෝණයක් සාදයි; මෙහි $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ වේ. $AC = x$ ලෙස දණ්ඩ මත වූ C ලක්ෂ්‍යයට බර W වූ අංශුවක් සවි කර ඇත. අංශුව සහිත දණ්ඩ සමතුලිතතාවයේ ඇත. දණ්ඩ හා බිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\dfrac{5}{6}$ වේ. $x \le \dfrac{3a}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙහි පෙන්වා ඇති රාමු සැකිල්ල, AB, BC, AC, CD හා AD සැහැල්ලු දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවලින් නිදහසේ සන්ධි කර සාදා ඇත. $AB = a$, $BC = 2a$, $AC = CD$ හා $C\hat{A}D = 30°$ බව දී ඇත. බර W වූ භාරයක් D හි එල්ලෙන අතර පිළිවෙළින් A හා B හි දී **රූපයේ දක්වා ඇති දිශාවලට** ක්‍රියාකරන P හා Q සිරස් බලවල ආධාරයෙන් AB තිරස් ව හා AC සිරස් ව රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව තිබේ. Q හි අගය W ඇසුරෙන් සොයන්න.

බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ, **ඒ නයින්**, දඬු පහේ ප්‍රත්‍යාබල සොයා, මෙම ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරන්න.





AB දණ්ඩට A

$S \cdot 2a\sin\theta = W(a\cos\theta + x\cos\theta)$ 15

$\Rightarrow S \cdot 2a \cdot \dfrac{3}{5} = W \cdot (a + x) \cdot \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow S = \dfrac{2W(a+x)}{3a}$. 5

විභේදනයෙන්

$\rightarrow \quad F = S = \dfrac{2W(a+x)}{3a}$. 5

$\uparrow \quad R = 2W$. 5

$F \le \mu R$ හා $\mu = \dfrac{5}{6}$

5 $\Rightarrow \dfrac{2W(a+x)}{3a} \le \dfrac{5}{6} \cdot 2W$ 5

$\Rightarrow a + x \le \dfrac{5a}{2}$

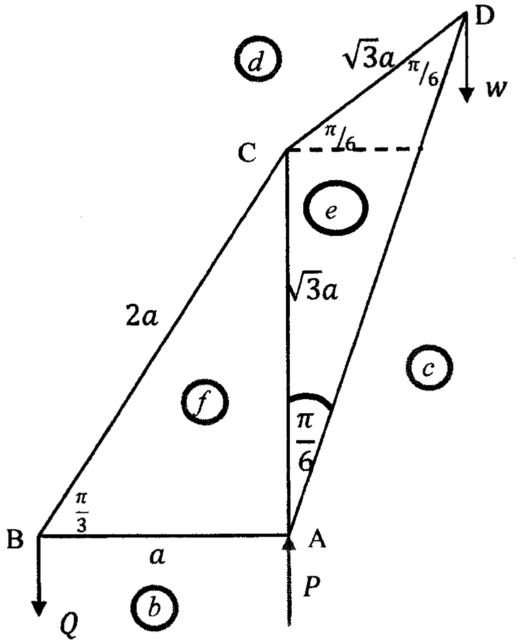
$\Rightarrow x \le \dfrac{3a}{2}$. 5

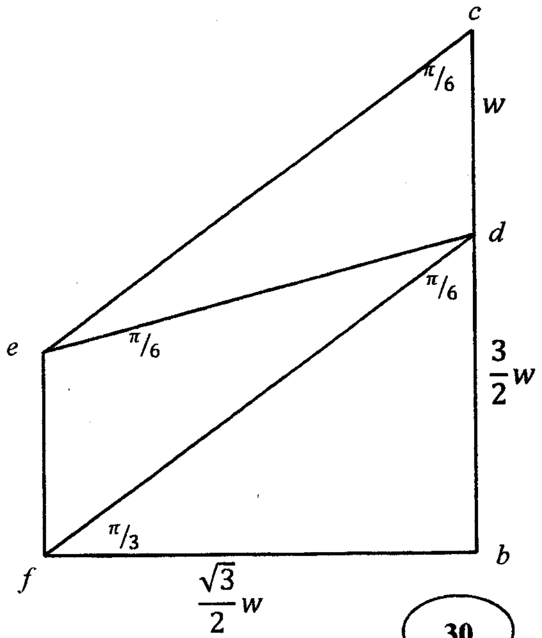
$\tan\theta = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{3}{5}$ හා $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$. 5

60

PAPERMASTER.LK

(b)





30

$AD = 2(\sqrt{3}\,a\cos 30^\circ) = 3a$

A ↻ $Qa = W\,AD\cos 60^\circ$

$\Rightarrow Q = \frac{3}{2}W$ 10

$\uparrow P = Q + W \Rightarrow P = \frac{5}{2}W$

දණ්ඩ	ආතති	තෙරපුම
AB		$\frac{\sqrt{3}}{2}W$
BC	$\sqrt{3}W$	
AC		W
CD	W	
AD		$\sqrt{3}W$

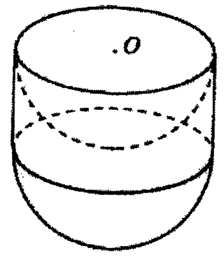
50

90

PAPERMASTER.LK

16. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

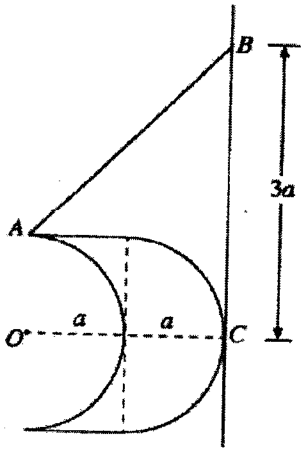
අරය a, උස a හා ඝනත්වය ρ වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් අරය a වූ අර්ධ ගෝලාකාර කොටසක් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. දැන්, යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සිලින්ඩරයේ ඉතිරි කොටසෙහි වෘත්තාකාර මුහුණතට අරය a හා ඝනත්වය $\lambda\rho$ වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක වෘත්තාකාර මුහුණත සවි කරනු ලබන්නේ, ඒවායේ සමමිතික අක්ෂ දෙක සම්පාත වන පරිදි ය. මෙලෙස සාදාගනු ලබන S වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිතික අක්ෂය මත, ගැටියේ O කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{(11\lambda+3)a}{4(2\lambda+1)}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

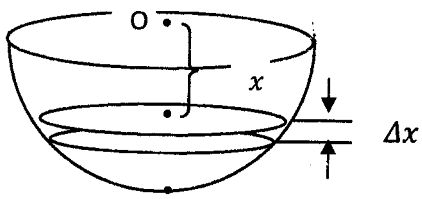


$\lambda = 2$ යැයි ද A යනු S වස්තුවෙහි වෘත්තාකාර ගැටිය මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු.

මෙම S වස්තුව රළු සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව සමතුලිතව තබා ඇත්තේ, A ලක්ෂ්‍යයට හා සිරස් බිත්තිය මත වූ B අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක ආධාරයෙනි. මෙම සමතුලිත පිහිටීමේ දී S හි සමමිතික අක්ෂය බිත්තියට ලම්බව පිහිටන අතර S හි අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය B ලක්ෂ්‍යයට $3a$ දුරක් සිරස් ව පහළින් වූ C ලක්ෂ්‍යයේ දී බිත්තිය ස්පර්ශ කරයි. (යාබද රූපය බලන්න.) O, A, B හා C ලක්ෂ්‍ය බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටයි.

μ යනු බිත්තිය හා S හි අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය නම්, $\mu \geq 3$ බව පෙන්වන්න.





5

සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, OA මත පිහිටයි.

PAPERMASTER.LK

OG= $\bar{x}$ යයි ද ρ ඝනත්වය යයි ද ගනිමු. එවිට.

$$\Delta m = \pi(a^2 - x^2)\Delta x \rho$$

සහ

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)\rho x\, dx}{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)\rho\, dx} \quad 15$$

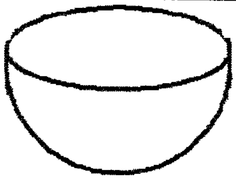
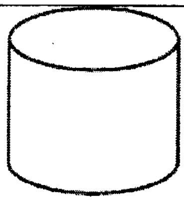
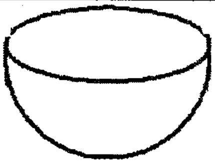
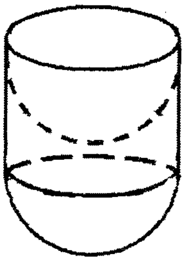
$$= \frac{\int_0^a (a^2 x - x^3)\, dx}{\int_0^a (a^2 - x^2)\, dx} == \frac{\left(a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^a}{\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a} \quad 10$$

5

$$= \frac{\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right)}{\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right)} = \frac{3}{8}a$$

එම නිසා O සිට ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\frac{3}{8}a$ වේ. 5 | 40

PAPERMASTER.LK

වස්තුව	ස්කන්ධය	O සිට දුර
	$\frac{2}{3}\lambda\pi a^3\rho$ 5	$\frac{11}{8}a$ 5
	$\pi a^3\rho$ 5	$\frac{1}{2}a$ 5
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ 5	$\frac{3}{8}a$ 5
	$\left(\frac{2}{3}\lambda+\frac{1}{3}\right)a^3\rho$ 5	$\bar{x}$

සමමිතිය මගින් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$$\frac{1}{3}(2\lambda+1)\pi a^3\rho\bar{x}_1=\frac{11}{8}a\times\frac{2}{3}\pi a^3\lambda\rho+\frac{a}{2}\times\pi a^3\rho-\frac{3}{8}a\frac{2}{3}\pi a^3\rho \quad 25$$

$$\frac{1}{3}(2\lambda+1)\bar{x} \;=\frac{11}{8}a\times\frac{2\lambda}{3}+\frac{a}{2}-\frac{3a}{8}\times\frac{2}{3}$$

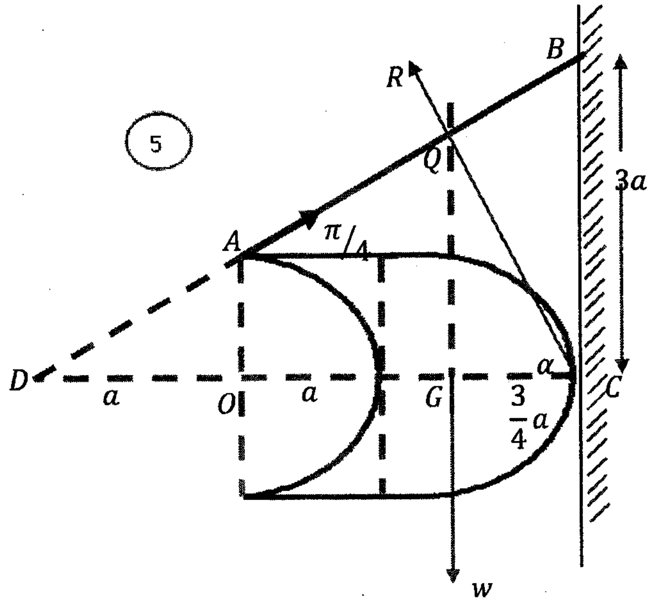
$$=\frac{11\lambda}{12}a+\frac{a}{2}-\frac{a}{4}=\frac{1}{12}(11\lambda+3)a$$

$$\bar{x} \;=\frac{(11\lambda+3)a}{4(2\lambda+1)} \quad 10$$

75

PAPERMASTER.LK

5



$\lambda = 2$ විට $\quad \bar{x} = \frac{5a}{4}.$ 5

සමතුලිතතාව සඳහා, 5

10 $\quad \mu \geq \tan\alpha = \frac{QG}{GC} = \frac{\frac{9a}{4}}{\frac{3a}{4}} = 3.$

5

$\therefore \mu \geq 3.$ 5

35

PAPERMASTER.LK

17. (a) ආයතනයක එක්තරා රැකියාවකට අයදුම් කරන සියලු ම අයදුම්කරුවන් අභියෝගාත්මක පරීක්ෂණයකට පෙනීසිටීම අවශ්‍ය වේ. මෙම අභියෝගාත්මක පරීක්ෂණයෙන් A ශ්‍රේණියක් ලබන අය රැකියාව සඳහා තෝරාගනු ලබන අතර, ඉතිරි අයදුම්කරුවන් සම්මුඛ පරීක්ෂණයකට මුහුණ දිය යුතු ය. අයදුම්කරුවන්ගෙන් 60% ක් A ශ්‍රේණි ලබන බව ද ඒ අයගෙන් 40% ක් ගැහැනු අය බව ද සමීක්ෂණයක දී සොයා ගෙන ඇත. සම්මුඛ පරීක්ෂණයට මුහුණ දෙන අයදුම්කරුවන්ගෙන් 10% ක් පමණක් තෝරාගනු ලබන අතර එයින් 70% ක් ගැහැනු අය වෙති.

(i) මෙම රැකියාව සඳහා පිරිමි අයකු තෝරාගනු ලැබීමේ,

(ii) රැකියාවට තෝරාගනු ලැබූ පිරිමි අයකු අභියෝගාත්මක පරීක්ෂණයට A ශ්‍රේණියක් ලබා තිබීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) එක්තරා රෝහලක රෝගීන් 100 දෙනකුගේ ප්‍රතිකාර ලබා ගැනීමට පෙර රැඳී සිටි කාල (මිනිත්තුවලින්) එක් රැස් කරනු ලැබේ. එම එක් එක් කාලයෙන් මිනිත්තු 20ක් අඩු කිරීමෙන් ලැබෙන අන්තර එක එකක් 10න් බෙදීමෙන් ලැබෙන අගයන්ගේ ව්‍යාප්තිය පහත වගුවෙන් දෙයි.

අගයන්ගේ පරාසය	රෝගීන් ගණන
−2 — 0	30
0 — 2	40
2 — 4	15
4 — 6	10
6 — 8	5

මෙම වගුවෙහි දී ඇති ව්‍යාප්තියෙහි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය නිමානය කරන්න.

ඒ නයින්, රෝගීන් 100 දෙනා රැඳී සිටි කාලවල මධ්‍යන්‍යය μ සහ සම්මත අපගමනය σ නිමානය කරන්න.

තව ද $\kappa = \dfrac{\mu - M}{\sigma}$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලබන කුටිකතා සංගුණකය κ නිමානය කරන්න; මෙහි M යනු රෝගීන් 100 දෙනා රැඳී සිටි කාලවල මාතය වේ.

(a) X = රැකියාව සඳහා පිරිමි අයකු තේරීම

A = අභියෝගතා පරීක්ෂණය සඳහා A සාමාර්ථයක් ලබා ගැනීම .

(i) $P(X) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{93}{250}$. 10

10 10

30

PAPERMASTER.LK

10

(ii) $P\left(A/X\right) = \frac{P(X\cap A)}{P(X)} = \frac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}}{\frac{93}{250}} = \frac{30}{31}.$ 10

10

30

(b)

5 5 5

අගය පරාසය	f	මධ්‍ය අගය y	y^2	fy	fy^2
-2 – 0	30	-1	1	-30	30
0 – 2	40	1	1	40	40
2 – 4	15	3	9	45	135
4 – 6	10	5	25	50	250
6 – 8	5	7	49	35	245
	$\sum f = 100$			$\sum fy = 140$	$\sum fy^2 = 700$

5 5

මධ්‍යනය: $\mu_y = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{140}{100} = \frac{7}{5}$ 5

5

සම්මත අපගමනය: $\sigma_y^2 = \frac{\sum fy^2}{\sum f} - \mu_y^2 = \frac{700}{100} - \frac{49}{25}$ $\sigma_y = \frac{\sqrt{504}}{10} \approx 2.24.$

5 5

45

$y = \frac{x-20}{10} \implies x = 10y + 20.$

එවිට $\mu = 10\mu_y + 20 = 10\left(\frac{7}{5}\right) + 20 = 34.$ 5

5

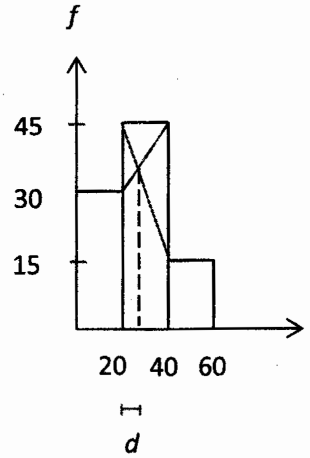
$\sigma = 10\sigma_y \approx 10(2.24) \approx 22.4.$ 5

5

20

PAPERMASTER.LK

මාතය M සෙවීම සඳහා :



y හි පරාසය	x හි පරාසය	සංඛ්‍යාතය
$-2-0$	$0-20$	30
$0-2$	$20-40$	40
$2-4$	$40-60$	15

5

5 $\frac{d}{40-30}=\frac{20-d}{40-15} \Rightarrow d=\frac{40}{7} \quad \Rightarrow M=20+\frac{40}{7}\approx 25.71.$ 5

$\kappa=\frac{\mu-M}{\sigma}=\frac{34-25.71}{22.4}\approx 0.37.$ 5

5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$M=L_{Mo}+c\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right)=20+20\left(\frac{10}{10+25}\right)\approx 25.71.$$ 5

5 5

PAPERMASTER.LK