සංයුක්ත ගණිතය - I පත්‍රය
පිළිතුරු සඳහා මග පෙන්වීම

A කොටස

1. $n=1$ වන විට, ව.අ.පැ. $= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ද.අ.පැ. $= \begin{pmatrix} 1+2\times 1 & -4\times 1 \\ 1 & 1-2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ව.අ.පැ.

$\therefore n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

$n=p$ වන විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට, $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 1+2p & -4p \\ p & 1-2p \end{pmatrix}$ (5)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{p+1} = \begin{pmatrix} 1+2p & -4p \\ p & 1-2p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} 3(1+2p)-4p & -4(1+2p)+4p \\ 3p+1-2p & -4p-(1-2p) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+2p & -4-4p \\ 1+p & -1-2p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2(p+1) & -4(p+1) \\ (p+1) & 1-2(p+1) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$\therefore n=p+1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$\therefore$ සියලු n ධන නිඛිල සඳහා ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයෙන් ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

$\boxed{25}$

---

2. $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^4$

$$= {}^4C_0\left(\sqrt{5}\right)^4+{}^4C_1\left(\sqrt{5}\right)^3.\sqrt{3}+{}^4C_2\left(\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{3}\right)^2+{}^4C_3\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}\right)^3+{}^4C_4\left(\sqrt{3}\right)^4+{}^4C_0\left(\sqrt{5}\right)^4 \quad (5)$$
$$-{}^4C_1\left(\sqrt{5}\right)^3\left(\sqrt{3}\right)+{}^4C_2\left(\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{3}\right)^2-{}^4C_3\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}\right)^3+{}^4C_4\left(\sqrt{3}\right)^4$$

$$= 2\left[{}^4C_0\left(\sqrt{5}\right)^4+{}^4C_2\left(\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{3}\right)^2+{}^4C_4\left(\sqrt{3}\right)^4\right]$$

$= 2[25+6\times 15+9]$ (5)

$= 2\times 124$

$= 248$ ——— (1)

[2 වන පිටුව බලන්න

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) = 5-3=2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 0<\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)<1 \quad (5) \quad \left(\because \sqrt{5}+\sqrt{3}>2\right)$$

$$\Rightarrow 0<\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^4<1$$

$\therefore$ (1) න්, $0<248-\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^4<1$

$$\Rightarrow 247<\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^4<248$$

$$\Rightarrow n=247 \quad (5)$$

$\boxed{25}$

---

3. $(3-2i)(7-5i) = 21+10i^2-14i-15i$ (5)

$= 11-29i \quad (i^2=-1$ නිසා$)$ (5)

$\therefore 11+29i = (3+2i)(7+5i)$ (5)

$11^2+29^2 = 11^2-(29i)^2$

$= (11-29i)(11+29i)$

$= (3-2i)(7-5i)\,(3+2i)(7+5i)$

$= (9-4i^2)(49-25i^2)$ (5)

$= (9+4)(49+25)$

$= 13\times 74$ (5)

$\boxed{25}$

---

4. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2x-\pi)\cos x}{2\cos^2 x-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\sin x}$$

$$= \lim_{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0} \frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

(5)

$$= \lim_{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0} \frac{-2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Big/\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\dfrac{2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} \quad (5)$$

[3 වන පිටුව බලන්න

$$= \lim_{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0} \frac{-2\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\left[\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^2 - \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{-2\left[\lim\limits_{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right] \quad 5}{2\left[\lim\limits_{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^2 - \lim\limits_{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0} \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

5

$$= \frac{-2\times 1}{2(1)^2-1} \quad 5$$

$$= -2$$

25

....

5. $$\frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) \quad 5$$

$$= \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\cdot\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad 5$$

එවිට $$I = \int \frac{1}{\sqrt{9x^2+4}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}}\,dx \quad 5$$

$$\therefore I = \frac{1}{3}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right)\right]+C$$; මෙහි C අභිමත නියතයකි.

5 + 5

25

....

6. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_T = \frac{T(2-3T)}{(1-T)(1-3T)}$

$T = \frac{1}{2}$ විට

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{1}{2}\left(2-\frac{3}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{3}{2}\right)} = -1$ 5

එවිට $(x, y) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ 5

ස්පර්ශකය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් (x, y) නම් ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$y-\frac{1}{8} = -1\left(x-\frac{1}{8}\right)$ 5

$4x+4y-1=0$

ස්පර්ශකය $t = T'$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයේදී වක්‍රය හා ඡේදනය වන්නේ යැයි ගනිමු.

එවිට $(x, y) = (T'(1-T')^2, T'^2(1-T'))$

$\Rightarrow \quad 4T'(1-T')^2 + 4T'^2(1-T') - 1 = 0$ 5

$4T'^2 - 4T' + 1 = 0$

$(2T'-1)^2 = 0$

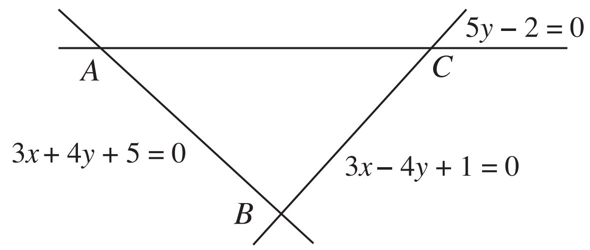
$\Rightarrow T' = \frac{1}{2}$; මෙය දී තිබෙන ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප පරාමිතිය වේ. 5

එබැවින් මෙම ස්පර්ශකය නැවත වක්‍රය හා හමු නොවේ.

එනම් වක්‍රය, $4x+4y-1=0$ ස්පර්ශකය අනුබද්ධව එකම පසක පිහිටයි.

$\boxed{25}$

7.



$A\hat{B}C$ යේ සමච්ඡේදක,

$\left|\frac{3x+4y+5}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \left|\frac{3x-4y+1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right|$ මගින් දෙනු ලැබේ. 10

එනම්, $3x+4y+5 = \pm(3x-4y+1)$

$8y+4 = 0$ සහ $6x+6 = 0$

$2y+1 = 0$ සහ $x+1 = 0$ 5

$2y+1=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව AC පාදයට සමාන්තර බැවින්, එය $A\hat{B}C$ යේ බාහිර සමච්ඡේදකය වේ. 5

$x+1=0$ සරල රේඛාව AC පාදයට ලම්බ වේ. එය $A\hat{B}C$ යේ අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය වේ. 5

$\boxed{25}$

8. $ax^2 + 2y^2 + bxy + x + 4y + 2c = 0$ මගින් වෘත්තයක් නිරූපණය වීම සඳහා,

$a = 2, b = 0$ සහ $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 - c > 0$ විය යුතු ය. 5

$\therefore a = 2, b = 0$ සහ $c < \frac{17}{16}$. 5

$\therefore c$ හි ධන නිඛිලමය අගය 1 වේ.

එවිට වෘත්තය $2x^2 + 2y^2 + x + 4y + 2 = 0$

එනම් $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + 1 = 0$

මෙහි කේන්ද්‍රය $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$ 5

$(x+p)^2 + y^2 = p^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2px = 0$

වෘත්ත දෙකෙහි පොදු ජ්‍යාය : $(\frac{1}{2} - 2p)x + 2y + 1 = 0$

මුලින් දී ඇති වෘත්තයෙහි පරිධිය සමච්ඡේදනය වන නිසා, එහි කේන්ද්‍රය පොදු ජ්‍යාය මත පිහිටිය යුතු ය. 5

$\therefore \left(\frac{1}{2} - 2p\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + 2(-1) + 1 = 0$

$\frac{1}{2}p - \frac{1}{8} - 2 + 1 = 0$

$p = \frac{9}{4}$ 5

25

---

9. $S_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0 \Rightarrow C_1 = (3, -4)$, $r_1 = \sqrt{9+16-9} = 4$ 5

$S_2 : x^2 + y^2 - r^2 = 0 \Rightarrow C_2 = (0, 0)$, $r_2 = r$

S_1 හා S_2 වෘත්ත දෙක ස්පර්ශවීම සඳහා $C_1C_2 = r_1 + r_2$ හෝ $C_1C_2 = |r_1 - r_2|$

$5 = 4 + r$ හෝ $5 = |r - 4|$

$r = 1$ 5 $\quad r - 4 = \pm 5$

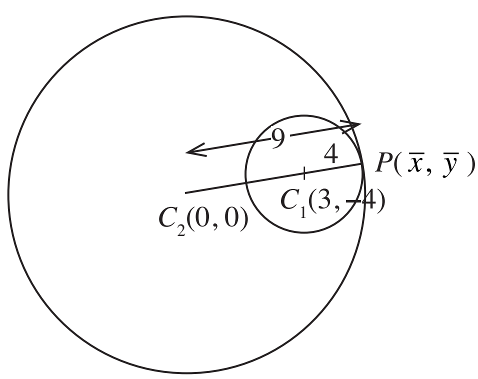
$r = 4 \pm 5$

$r > 0$ නිසා $r = 9$ 5

S_1 හා S_2 වෘත්ත අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වන විට,
$C_2\,C_1$ රේඛාව, ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය වන
P හිදී $C_2P : PC_1 = 9 : 4$
වන පරිදි බාහිරව බෙදේ. 5

$\therefore P \equiv \left[\frac{9\times 3 - 4\times 0}{9-4}, \frac{9\times(-4) - 4\times 0}{9-4}\right]$

$\equiv \left(\frac{27}{5}, -\frac{36}{5}\right)$ 5



25

[6 වන පිටුව බලන්න

10. cosine සූත්‍රයෙන්,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$16 = 25 + 36 - 60\cos C \quad (5)$$

$$\cos C = \frac{45}{60}$$

$$= \frac{3}{4}$$

sine සූත්‍රයෙන්,

$$\frac{6}{\sin B} = \frac{4}{\sin C} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{3}{2}\sin C \qquad \therefore \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{3}{2} \text{ වේ.}$$

$$= 2 \times \frac{3}{4} \times \sin C$$

$$= 2\cos C\sin C \quad (5)$$

$$= \sin 2C$$

$\therefore\ \hat{B} = 2\hat{C}$ හෝ $\hat{B} = \pi - 2\hat{C}$; ($0 < \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < \pi$ නිසා) (5)

$\hat{A} \neq \hat{C}$ නිසා, $\hat{B} \neq \pi - 2\hat{C}$ වේ. ; ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ නිසා) (5)

$\therefore\ \hat{B} = 2\hat{C}$ වේ.

$\boxed{25}$

B කොටස

11. (a) $\alpha + \beta = -b, \ \ \alpha\beta = c$ 5

$p + q \ = \ \alpha+\beta+\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \ = \ b^2 - b - 2c$ 5

$pq \ = \ \alpha^3+\beta^3+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2 \ = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2$

$= \ -b^3 + 3cb + c + c^2$ 5

$\therefore$ මූල p හා q වන වර්ගජ සමීකරණය,

$$x^2 - (b^2 - b - 2c)x - b^3 + 3cb + c + c^2 = 0$$ 5 + 5

$\boxed{25}$

මෙහි විවේචකය,

$\Delta_x \ = \ (b^2 - b - 2c)^2 + 4(b^3 - 3bc - c - c^2)$ 5

$= \ b^4 + b^2 + 4c^2 - 2b^3 + 4bc - 4b^2c + 4b^3 - 12bc - 4c - 4c^2$

$= \ b^4 + 2b^3 + b^2 - 4b^2c - 8bc - 4c$

$= \ b^2(b^2 + 2b + 1) - 4c(b^2 + 2b + 1)$

$= \ (b+1)^2(b^2 - 4c)$ 5

α හා β අතාත්ත්වික වන විට $b^2 - 4c < 0$ වේ. 5

$\therefore \ \Delta_x \leq 0$ වේ. 5

$\therefore \ b = -1$ නම් හා නම් ම පමණක් $\Delta_x = 0$ වේ. 5

එනම් $b = -1$ නම් හා නම් ම පමණක් p හා q තාත්ත්වික වේ.

මෙම අවස්ථාවේ දී $\Delta_x = 0$ බැවින් $p = q$ වේ. 5

එවිට $p + q \ = \ (-1)^2 - (-1) - 2c$ 5

$2p \ = \ 2 - 2c$

$p \ = \ 1 - c$

$\therefore p = q = \ 1 - c$

$\boxed{35}$

(b) $y = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ ලෙස ගනිමු. 5

$\Rightarrow \quad (y-1)x^2 + (y-4)x + (y-4) = 0$ 5

$y = 1$ විට $x = -1$ වේ. එවිට වර්ගජ සමීකරණයක් නොපවතී.

$$\Rightarrow \quad (y-1)\left[\left(x+\frac{y-4}{2(y-1)}\right)^2 + \frac{(y-4)}{(y-1)} - \left(\frac{y-4}{2(y-1)}\right)^2\right] = 0 \quad (y \neq 1)$$

$$\Rightarrow \quad (y-1)\left[\left(x+\frac{y-4}{2(y-1)}\right)^2 + \frac{4(y-1)(y-4)-(y-4)^2}{4(y-1)^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-1)\left[\left(x+\frac{y-4}{2(y-1)}\right)^2 + \frac{(y-4)(4y-4-y+4)}{4(y-1)^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-1)\left[\left(x+\frac{y-4}{2(y-1)}\right)^2 + \frac{3y(y-4)}{4(y-1)^2}\right] = 0$$ 5

[8 වන පිටුව බලන්න

සියලු තාත්ත්වික x සඳහා, $\dfrac{3y(y-4)}{4(y-1)^2} \le 0$

$\Rightarrow \quad 3y(y-4) \le 0$, 5 $(y-1)^2 > 0$ බැවින්,

$\Rightarrow \quad 0 \le y \le 4$ 5

$\Rightarrow \quad 0 \le \dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1} \le 4$

$\Rightarrow \quad y_{අවම} = 0$ සහ $y_{උපරිම} = 4$ 5

$x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ බැවින්, $y = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ හි ප්‍රස්තාරය සන්තතික වේ.

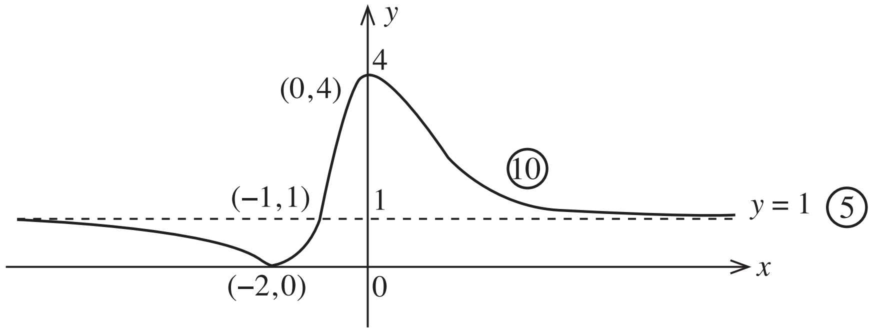
$(0, 4)$ උපරිමයකි. 5

$(-2, 0)$ අවමයකි. 5

$y = 1$ විට $x^2+x+1 = x^2+4x+4 \Rightarrow 3x+3=0 \Rightarrow x=-1$

$y = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x+1} = \dfrac{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$ සඳහා

$x \to \pm\infty$ විට $y \to 1$ 5



60

(c) x^2+kx+1, x^4-12x^2+8x+3 හි සාධකයක් වන විට,

$x^4-12x^2+8x+3 \equiv (x^2+kx+1)(x^2+\lambda x+3)$ වන පරිදි $\lambda \in \mathbb{Z}$ පවතී.

5

$\Rightarrow \quad k+\lambda = 0$ සහ $\lambda + 3k = 8$ 5

$\Rightarrow \quad k = 4$ 5

$\Rightarrow \quad \lambda = -4$

$x^4-12x^2+8x+3 = 0$

$(x^2+4x+1)(x^2-4x+3) = 0$ 5

$x^2+4x+1 = 0$ හෝ $x^2-4x+3=0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$ හෝ $(x-1)(x-3) = 0$

$= -2 \pm \sqrt{3}$ 5 හෝ $x = 1$ හෝ $x = 3$ 5

30

[9 වන පිටුව බලන්න

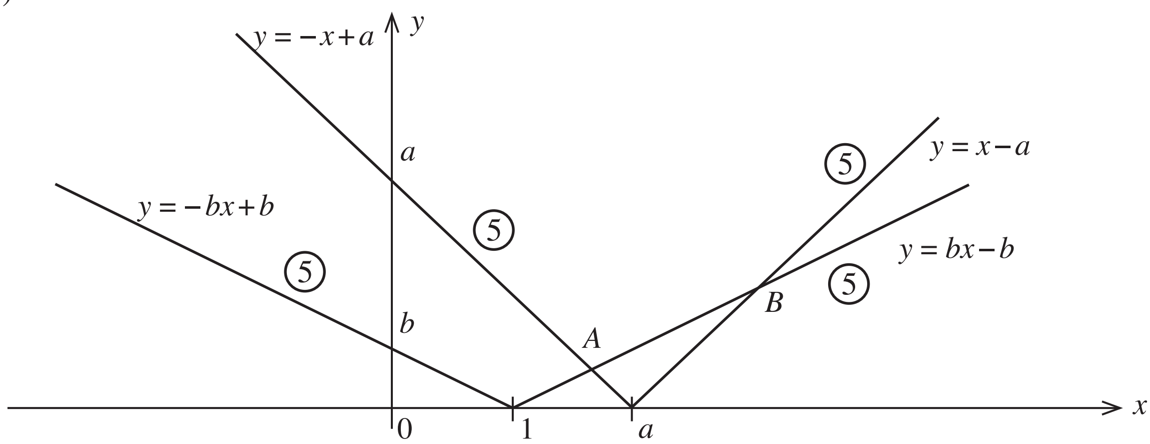
12. (a) එක් ළමයකුට අඩුම තරමින්, රුපියල් තුනක්වත් ලැබිය යුතු බැවින් ඒ සඳහා රුපියල් 15ක් වෙන් කළ යුතු වේ. එවිට ඉතිරි රුපියල් තුන ළමයින් පස්දෙනා අතර පහත දැක්වෙන ආකාරවලට බෙදිය හැකි ය. 5

	මුදල් බෙදීම						ආකාර ගණන	
(i)	3	0	0	0	0	5	$\frac{5!}{4!} = 5$	5
(ii)	2	1	0	0	0	5	$\frac{5!}{3!} = 20$	5
(iii)	1	1	1	0	0	5	$\frac{5!}{3!2!} = 10$	5

$\therefore$ මුළු ආකාර ගණන $= 5 + 20 + 10$ 5
$= 35$

40

(b)



$a > b > 0$

$b|x-1| > |x-a|$ හි විසඳුම් කුලකය $\{x \mid 3 < x < 7\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ බැවින්,

$A \equiv (3, y_A)\ ;\ B \equiv (7, y_B)$ විය යුතුය. 5

y_A සැලකීමෙන්, $-3 + a = 3b - b \Rightarrow a - 2b = 3$ ——— (1) 5

එලෙසම y_B සැලකීමෙන්, $7 - a = 7b - b \Rightarrow a + 6b = 7$ ——— (2) 5

(1) සහ (2) න්, $a = 4,\ b = \frac{1}{2}$ 5

40

(c) $u_r \equiv \frac{A}{r+1} + \frac{B}{r+2} + \frac{C}{r+3} \equiv \frac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ ලෙස ගනිමු. 5

එවිට $A(r+2)(r+3) + B(r+1)(r+3) + C(r+1)(r+2) \equiv 3r+1$ වේ.

r^2 හි සංගුණක සැලකීමෙන්, $A + B + C = 0$

r හි සංගුණක සැලකීමෙන්, $5A + 4B + 3C = 3$

නියත පද සැලකීමෙන්, $6A + 3B + 2C = 1$

10

ඉහත සමීකරණ විසඳීමෙන්, $A = -1, B = 5, C = -4$ 10

$\therefore u_r \equiv -\frac{1}{r+1} + \frac{5}{r+2} - \frac{4}{r+3}$

[10 වන පිටුව බලන්න

$$\equiv -\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+2}\right)+4\left(\frac{1}{r+2}-\frac{1}{r+3}\right)$$ 5

මෙය $\lambda[f(r)-f(r+1)] + \mu[f(r+1)-f(r+2)]$ ආකාර වේ.

මෙහි $\lambda = -1$, $\mu = 4$ සහ $f(r)=\left(\frac{1}{r+1}\right)$ වේ. 5
5

$$u_r \equiv \lambda[f(r)-f(r+1)] + \mu[f(r+1)-f(r+2)]$$

$$\therefore u_1 = \lambda[f(1)-f(2)] + \mu[f(2)-f(3)]$$

$$u_2 = \lambda[f(2)-f(3)] + \mu[f(3)-f(4)]$$ 5

$$\vdots$$

$$u_{n-1} = \lambda[f(n-1)-f(n)] + \mu[f(n)-f(n+1)]$$

$$u_n = \lambda[f(n)-f(n+1)] + \mu[f(n+1)-f(n+2)]$$ 5

එකතු කිරීමෙන්,

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \lambda[f(1)-f(n+1)] + \mu[f(2)-f(n+2)]$$

$$= -1\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right]+4\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right]$$ 5

$$= \frac{5}{6}+\frac{1}{n+2}-\frac{4}{n+3}$$

$$= \frac{5}{6}-\frac{3n+5}{(n+2)(n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} u_r = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{5}{6}+\frac{1}{n+2}-\frac{4}{n+3}\right]$$

$$= \frac{5}{6}$$ 5

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} u_r$ පරිමිත වන බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. 5

තවද සියලු $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r > 0$ වේ.

$\therefore u_1 \le S_n < S_\infty$ 5

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \le \frac{5}{6}-\frac{3n+5}{(n+2)(n+3)} < \frac{5}{6}$$

$\boxed{70}$

[11 වන පිටුව බලන්න

13. (a) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{P}-\lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \quad 5$$

$$\det(\mathbf{P}-\lambda\mathbf{I}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad 5$$

$$\Rightarrow (5+\lambda)(2+\lambda)-18 = 0 \quad 5$$

$$\Rightarrow \lambda^2+7\lambda-8 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+8) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ හෝ $\lambda = -8$ 5

$$\mathbf{PX} = \lambda\mathbf{X}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5x+3y \\ 6x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ වන විට, $\left.\begin{aligned} -5x+3y &= x \\ 6x-2y &= y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -6x+3y &= 0 \\ 6x-3y &= 0 \end{aligned}$ 5

ඉහත සමීකරණ දෙක එකිනෙකට තුල්‍ය බැවින්,
$x = t$ යැයි ගත්විට $y = 2t$ වේ. මෙහි t යනු තාත්ත්වික පරාමිතියකි.

$$\therefore X = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 5$$

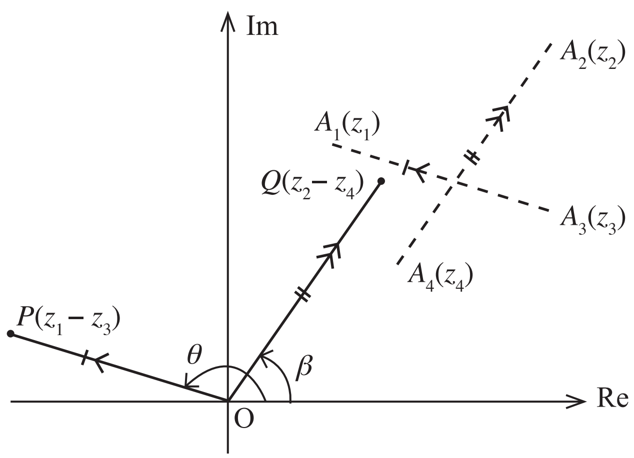
$\lambda = -8$ වන විට, $\left.\begin{aligned} -5x+3y &= -8x \\ 6x-2y &= -8y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 3x+3y &= 0 \\ 6x+6y &= 0 \end{aligned}$ 5

මෙම සමීකරණ දෙක ද එකිනෙකට තුල්‍ය බැවින්,
$x = T$ යැයි ගත්විට $y = -T$ වේ. මෙහි T යනු තාත්ත්වික පරාමිතියකි.

$$\therefore X = \begin{pmatrix} T \\ -T \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 5$$

$\boxed{40}$

(b)



P සහ Q යනු පිළිවෙළින් $OP \,//\, A_3A_1, OP = A_3A_1$ සහ $OQ \,//\, A_4A_2, OQ = A_4A_2$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි.

එවිට $z_P = z_1 - z_3$ සහ $z_Q = z_2 - z_4$ වේ. 10

$$\left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}\right| = \frac{|z_1 - z_3|}{|z_2 - z_4|} = \frac{OP}{OQ} = \frac{A_1A_3}{A_2A_4}$$ 10

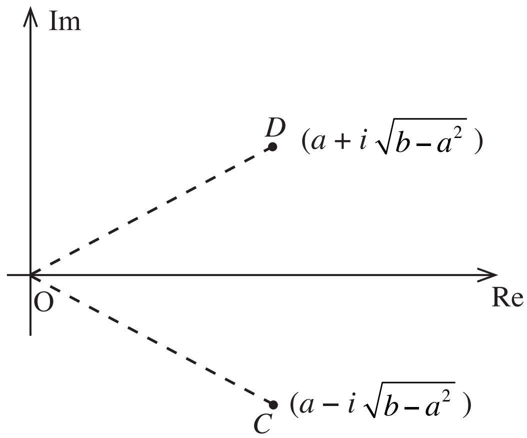
$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = \arg(z_1 - z_3) - \arg(z_2 - z_4) = \theta - \beta = P\hat{O}Q$$

$\beta > \theta$ විට $|\theta - \beta| = P\hat{O}Q$ වේ.

$P\hat{O}Q = A_1A_3$ සහ A_2A_4 අතර කෝණය වේ. 10

එබැවින්, $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}$ හුදෙක් අතාත්වික වීම සඳහා $A_1A_3 \perp A_2A_4$ විය යුතුය. 5

$\boxed{35}$



$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 1 \pm i$

$z^2 - 2az + b = 0 \quad \Rightarrow \quad z = a \pm i\sqrt{b - a^2}$

(i) $C\hat{O}D = \dfrac{\pi}{2}$ නම්,

$\dfrac{a + i\sqrt{b - a^2}}{a - i\sqrt{b - a^2}}$ හුදෙක් අතාත්වික වේ. 5

$$\frac{a + i\sqrt{b - a^2}}{a - i\sqrt{b - a^2}} = \frac{a^2 - (b - a^2) + 2ia\sqrt{b - a^2}}{a^2 + (b - a^2)}$$

හුදෙක් අතාත්ත්වික වීම සඳහා තාත්ත්වික කොටස $= 0 \Rightarrow 2a^2 = b$ 10

(ii) $OA = OB = OC = OD$

$\therefore \; z_A\bar{z}_A = z_D\bar{z}_D$ 5

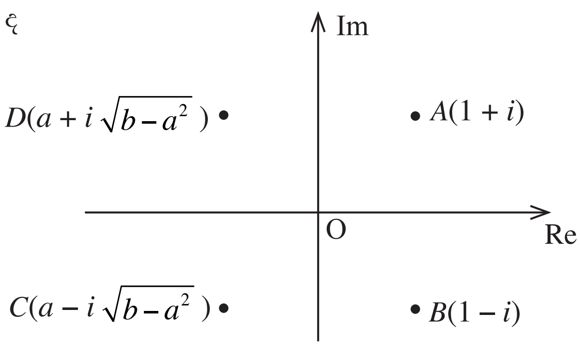
$\Rightarrow \; 2 = a^2 + b - a^2$ 10

$\Rightarrow \; b = 2$

(iii) $ABCD$ සමචතුරස්‍රයක් ද එහි කේන්ද්‍රය O ද වන විට, සමමිතිකත්වයෙන්, 5

$a = -1$ සහ $\sqrt{b - a^2} = 1$

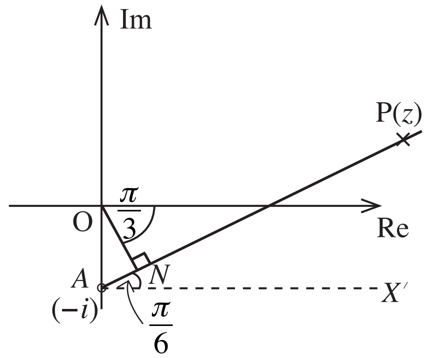
$\Rightarrow \; b = 2$ 10



$\boxed{45}$

[13 වන පිටුව බලන්න

(c) $\arg[(z+i)i] = \dfrac{2\pi}{3}$



$$\arg(z+i) + \arg i = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \arg(z+i) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \arg(z-(-i)) = \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

$$\therefore P\hat{A}X' = \frac{\pi}{6}\,;\, P \neq A \quad (5)$$

P හි පථය රූපයේ දැක්වෙන පරිදි අඩ සරල රේඛාවක් වේ.

$OP = |z|$ (5)

$$\therefore |z|_{\text{අඩුතම}} = ON = 1.\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5)$$

$$z_N = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i \quad (5)$$

$\boxed{30}$

---

14. (a) $f(x) = \dfrac{3-4x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(-4)-(3-4x)2x}{(x^2+1)^2} \ (10) = \frac{2(2x+1)(x-2)}{(x^2+1)^2}$$

$x = -\dfrac{1}{2}$ සහ $x = 2$ දී $f'(x) = 0$ (10) බැවින් හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ඇත.

සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා f ශ්‍රිතය සන්තතික වේ.

x	$-\infty < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f'(x)$	$\frac{(-)(-)}{(+)} > 0$	$\frac{(+)(-)}{(+)} < 0$	$\frac{(+)(+)}{(+)} > 0$

(10)

$x = -\dfrac{1}{2}$, $y = 4$ උපරිමයකි. (5)

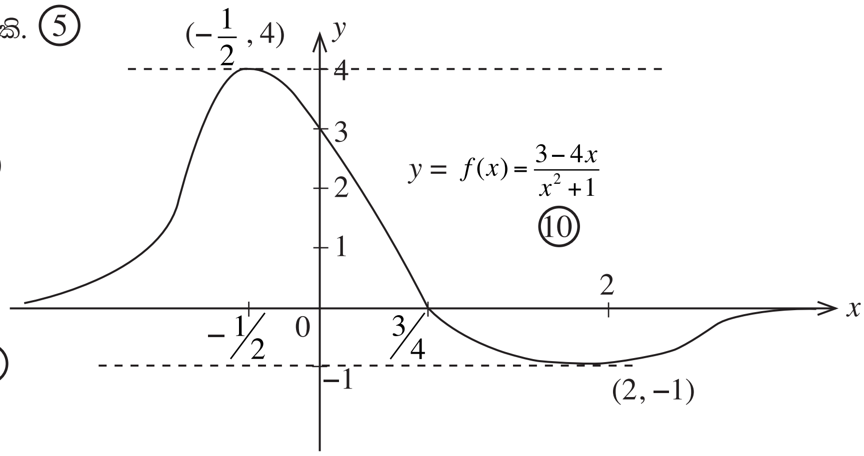
$x = 2, y = -1$ අවමයකි. (5)

$x = 0$ විට $y = 3$

$x = \dfrac{3}{4}$ විට $y = 0$ (5)

$$y = \frac{3/x^2 - 4/x}{1 + 1/x^2}$$

$x \to \pm\infty,\ y \to 0$ (5)

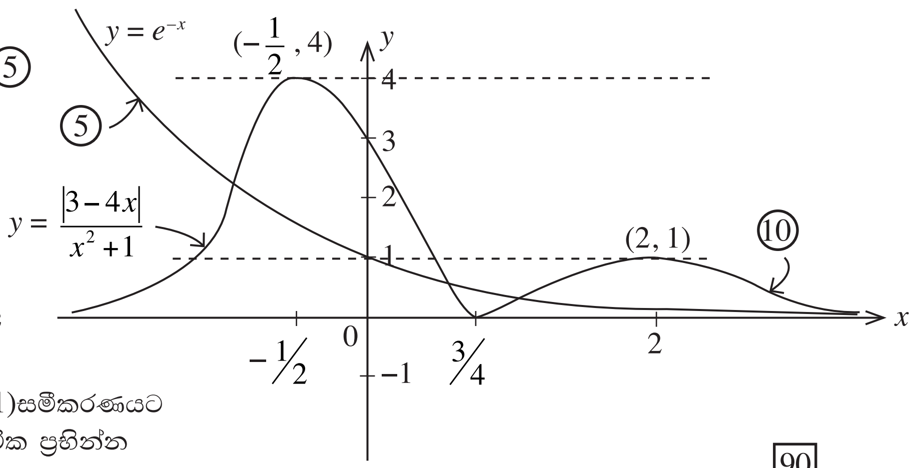


$|3-4x|e^{x}-x^{2}-1=0$ ———— (1)

$e^{-x} = \dfrac{|3-4x|}{x^{2}+1}$ 5

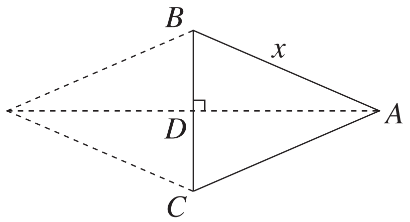
(1) සමීකරණයේ මූල වන්නේ, $y=e^{-x}$ වක්‍රය සහ $y=\dfrac{|3-4x|}{x^{2}+1}$ වක්‍රය ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යවල x - ඛණ්ඩාංකයි. 5

∴ ප්‍රස්තාරයට අනුව, (1)සමීකරණයට අඩුම වශයෙන් තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල තුනක් ඇත. 5



90

(b)



$AB=x$ වන විට, ජනිත ඝන වස්තුවේ පරිමාව V යැයි ගනිමු.
එවිට $BC=2s-2x$,

$BD = \dfrac{2s-2x}{2} = s-x$ 5

$AD = \sqrt{AB^{2}-BD^{2}} = \sqrt{x^{2}-(s-x)^{2}} = \sqrt{2sx-s^{2}}$

$= \sqrt{s(2x-s)}$ 5 ; $x > \dfrac{s}{2}$ 5

$V = \dfrac{1}{3}\pi AD^{2}.\,2BD$ 5

$= \dfrac{1}{3}\pi s(2x-s).\,2(s-x)$ 5

$= \dfrac{2\pi}{3}\, s(2x-s)(s-x)$

$\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{2}{3}\pi s[(2x-s)(-1)+(s-x)2]$ 5

$= \dfrac{2}{3}\pi s[-2x+s+2s-2x]$

$= \dfrac{2}{3}\pi s(3s-4x)$ 5

$x = \dfrac{3}{4}s$ විට $\dfrac{dV}{dx} = 0$ වේ. 5

$\dfrac{s}{2} < x < \dfrac{3s}{4}$ විට $\dfrac{dV}{dx} > 0$ වේ ; V වැඩිවේ.

$\dfrac{3s}{4} < x < s$ විට $\dfrac{dV}{dx} < 0$ වේ ; V අඩුවේ. 10

∴ $x = \dfrac{3}{4}s$ වන විට V උපරිම වේ. 5

∴ පරිමාව උපරිම වන පරිදි AB දිග $\dfrac{3}{4}s$ වේ. 5

60

[15 වන පිටුව බලන්න

15. (a) $\dfrac{x^2+3x+5}{(x-1)(x+2)} \equiv A+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$

$\Rightarrow x^2+3x+5 \equiv A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)$

x^2 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්, $A=1$ 5

$x=1$ විට $B=3$ 5

$x=-2$ විට $C=-1$ 5

$$\therefore \int_0^2 \frac{x^2+3x+5}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int_0^2 dx + 3\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx - \int_0^2 \frac{1}{x+2}\,dx \quad 5$$

$$= [x]_0^2 + 3\big[\ln|x-1|\big]_0^2 - \big[\ln|x+2|\big]_0^2 \quad 10$$

$$= 2+3\,[\ln 1-\ln 1]-[\ln 4-\ln 2]$$

$$= 2-\ln 2 \quad 5$$

$\boxed{35}$

(b) $$\int e^{2x}\sin 3x\ dx = \int \sin 3x\ \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) dx \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \int \frac{1}{2}e^{2x}3\cos 3x\ dx + C \quad 10$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x}(-3\sin 3x)dx\right] + C' \quad 10$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x\ dx + C' \quad 5$$

$$\Rightarrow \frac{13}{4}\int e^{2x}\sin 3x\ dx = \frac{1}{4}e^{2x}(2\sin 3x-3\cos 3x)+C' \quad 10$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\sin 3x\ dx = \frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x-3\cos 3x)+C$$; මෙහි C අභිමත නියතයකි. 5

$\boxed{45}$

(c) $$I = \int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$x = \sin\theta$

$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$

$x=1$ නම්, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$x=0$ නම්, $\theta=0$ 5

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta \quad 5$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta \text{ ——— (1)}$$

[16 වන පිටුව බලන්න

$\theta = \dfrac{\pi}{2} - t$ නම්,

$\dfrac{d\theta}{dt} = -1$ 5

$\theta = 0$ නම්, $t = \dfrac{\pi}{2}$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ නම්, $t = 0$ 5

$$\therefore \mathrm{I} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} (-dt)$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\, dt \qquad 5$$

t, θ මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්,

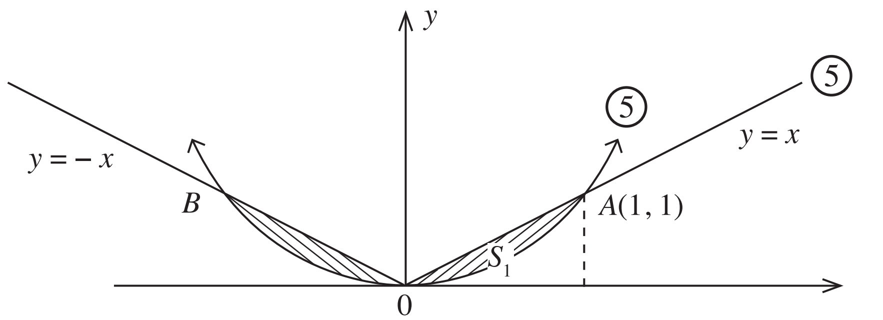
$$\mathrm{I} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\, d\theta \text{ ——— } (2) \qquad 5$$

$$(1) + (2)\ ; \quad 2\mathrm{I} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = [\theta]_0^{\pi/2} \qquad 5 + 5$$

$$\therefore \mathrm{I} = \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{40}$

(d) $S = \{(x, y) : x^2 \le y \le |x|\}$ ලෙස ගනිමු.



$y = x$ සහ $y = x^2$ විසඳීමෙන්

$A \equiv (1, 1)$ 5

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 - \int_0^1 x^2\, dx \qquad 5$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right) \qquad 5$$

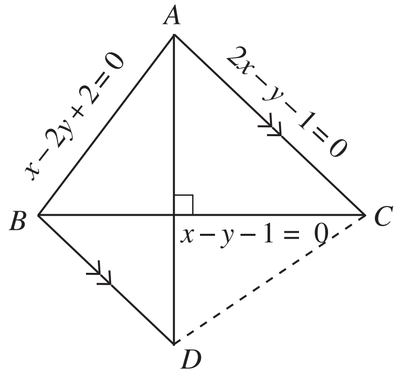
$$= \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

$\therefore$ ආවෘත වර්ගඵලය $2S_1 = \dfrac{1}{3}$ වර්ග ඒකක 5

$\boxed{30}$

[17 වන පිටුව බලන්න

16. (a) $A \equiv \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 5



$B \equiv (4, 3)$ 5

AD රේඛාවේ සමීකරණය,

$y - \frac{5}{3} = -1\left(x - \frac{4}{3}\right)$ 10

$y - \frac{5}{3} = -x + \frac{4}{3}$

$x + y - 3 = 0$ 5

$BD \,//\, AC$ නිසා, BD රේඛාවේ සමීකරණය $2x - y - k = 0$ ලෙස ගත හැකිය. මෙහි k නියතයකි. 5

එය B හරහා යන නිසා, $8 - 3 - k = 0$

$\therefore\ k = 5$ 5

$\therefore$ BD රේඛාවේ සමීකරණය $2x - y - 5 = 0$ 5

$C \equiv (0, -1)$ 5

$D \equiv \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 5

$\therefore$ CD අනුක්‍රමණය $= \dfrac{\frac{1}{3}+1}{\frac{8}{3}-0} = \frac{1}{2}$ 5

AB අනුක්‍රමණය $= \dfrac{3-\frac{5}{3}}{4-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$ 5

$\therefore\ AB \,//\, CD$ 5

තවද $BD \,//\, AC$ ද වන බැවින්, $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයකි. 5

එහි විකර්ණ ලම්බ වන බැවින්, $ABDC$ රොම්බසයකි. 5

$\boxed{75}$

(b) $|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$ 10

$x^2 + y^2 + 6x + 2fy = 0$ සහ $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ නම්,

$2.3.0 + 2f(-1) = 0 + (-3)$ 10

$\Rightarrow\ f = \frac{3}{2}$

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x + 2fy = 0$ සහ $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ වෘත්ත දෙක $P_1(x_1, y_1)$ සහ $P_2(x_2, y_2)$ ලක්ෂ්‍ය දෙකෙහිදී ඡේදනය වන්නේ යැයි ගනිමු.

$S_1 + \lambda S_2 = 0 \Rightarrow (1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + 6x + 2(f-\lambda)y - 3\lambda = 0$

$\therefore$ λ පරාමිතියක් වන විට,

මෙම සමීකරණය මගින් වෘත්තයක් නිරූපණය වේ. 5

$S_1 = 0$ වෘත්තය $P_1(x_1, y_1)$ හරහා යන නිසා, $x_1^2 + y_1^2 + 6x_1 + 2fy_1 = 0$ ——— (1)

$S_2 = 0$ වෘත්තය $P_1(x_1, y_1)$ හරහා යන නිසා, $x_1^2 + y_1^2 - 2y_1 - 3 = 0$ ——— (2)

(1) + λ(2) න්, $(1+\lambda)x_1^2 + (1+\lambda)y_1^2 + 6x_1 + 2(f-\lambda)y_1 - 3\lambda = 0$

එනම් $S_1 + \lambda S_2 = 0$ වෘත්තය $P_1(x_1, y_1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. 10

එලෙසම, $S_1 + \lambda S_2 = 0$ වෘත්තය $P_2(x_2, y_2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ද යන බව පෙන්විය හැකිය. 5

[18 වන පිටුව බලන්න

$\therefore$ $S_1 + \lambda S_2 = 0$ මගින් $S_1 = 0$ සහ $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක් නිරූපණය වේ. මෙහි λ පරාමිතියකි.

(i) $S_1 + \lambda S_2 \equiv (1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + 6x + 2(f-\lambda)y - 3\lambda = 0$. මෙහි $f = \frac{3}{2}$

මෙය $(-2, 2)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන විට, $(1+\lambda)4 + (1+\lambda)4 - 12 + 2(\frac{3}{2} - \lambda)(2) - 3\lambda = 0$ (10)

$\Rightarrow\ 8 - 12 + 6 + 8\lambda - 4\lambda - 3\lambda = 0$

$\Rightarrow\ 2 + \lambda = 0$

$\Rightarrow\ \lambda = -2$

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $\quad -x^2 - y^2 + 6x + 7y + 6 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x - 7y - 6 = 0$ (5)

(ii) පොදු ජ්‍යායේ සමීකරණය, $S_1 - S_2 = 0$

$6x + (2f + 2)y + 3 = 0$

$6x + 5y + 3 = 0$ (5)

$S_1 + \lambda S_2 = (1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + 6x + 2(f-\lambda)y - 3\lambda = 0$

කේන්ද්‍රය $\equiv \left[-\frac{3}{1+\lambda}, \frac{\lambda - f}{1+\lambda}\right]$ (5)

කුඩාම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය, පොදු ජ්‍යාය මත පිහිටන බැවින්,

$6\left(-\frac{3}{1+\lambda}\right) + 5\left(\frac{\lambda - f}{1+\lambda}\right) + 3 = 0$ මෙහි $f = \frac{3}{2}$ (5)

$-18 + 5\lambda - 5f + 3 + 3\lambda = 0$

$8\lambda = 18 - 3 + \frac{15}{2} = \frac{45}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{45}{16}$

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $\quad \frac{61}{16}x^2 + \frac{61}{16}y^2 + 6x + 2\left(\frac{3}{2} - \frac{45}{16}\right)y - \frac{135}{16} = 0$

$61x^2 + 61y^2 + 96x - 42y - 135 = 0$ (5)

75

---

17. (a) $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$

$1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \frac{3}{2}$ (10)

$A + B + C = \pi$ නිසා, $\quad 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$

$2\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right] = \frac{1}{2}$ (5)

$\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{4\sin\frac{A}{2}}$

$\Rightarrow \cos\frac{B-C}{2} \quad = \quad \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{4\sin\frac{A}{2}}$

[19 වන පිටුව බලන්න

$$= \frac{4\sin^2\frac{A}{2}+1}{4\sin\frac{A}{2}} \quad (5)$$

$$= \frac{\left(1-2\sin\frac{A}{2}\right)^2+4\sin\frac{A}{2}}{4\sin\frac{A}{2}} \quad (5)$$

$$= \frac{\left(1-2\sin\frac{A}{2}\right)^2}{4\sin\frac{A}{2}}+1$$

$\cos\frac{B-C}{2} \leq 1$ නිසා $\frac{\left(1-2\sin\frac{A}{2}\right)^2}{4\sin\frac{A}{2}}+1 \leq 1$ (5)

$\Rightarrow \frac{\left(1-2\sin\frac{A}{2}\right)^2}{\sin\frac{A}{2}} \leq 0$ (5)

$0<A<\pi$ නිසා $\sin\frac{A}{2}>0$ වේ. $\therefore\ 1-2\sin\frac{A}{2}=0$ විය යුතුය.

එවිට $\cos\frac{B-C}{2}=1$ සහ $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ (5)

$\Rightarrow B=C$ සහ $A=\frac{\pi}{3}$ (5) ; $0<A<\pi$ නිසා,

$\Rightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow ABC$ ත්‍රිකෝණය සමපාද වේ.

$\boxed{45}$

(b) $f(\theta) \equiv 3\cos^2\theta+10\sin\theta\cos\theta+27\sin^2\theta$

$\equiv \frac{3}{2}[1+\cos2\theta]+5\sin2\theta+\frac{27}{2}[1-\cos2\theta]$ (5)

$\equiv 15-12\cos2\theta+5\sin2\theta$

$\equiv 15-13\left[\frac{12}{13}\cos2\theta-\frac{5}{13}\sin2\theta\right]$ (5)

$\equiv 15-13[\cos2\theta\cos\alpha-\sin2\theta\sin\alpha]$ (5) මෙහි $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ සහ $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ (5)

වන පරිදි $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$\equiv 15-13\cos(2\theta+\alpha)$

$\therefore\ f(\theta)=a+b\cos(2\theta+\alpha)$ ආකාරය වේ.

මෙහි $a=15,\ b=-13$ (5), $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$ (5) වේ. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$f(\theta)\equiv 15-13\cos(2\theta+\alpha)$; මෙහි $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$

[20 වන පිටුව බලන්න

සියලු θ සඳහා $f(\theta)$ සන්තතික වේ.

$\theta = 0$ වන විට $f(0) = 15 - 13\cos\alpha = 15 - 12 = 3$

$\theta = \pi$ වන විට $f(\pi) = 15 - 13\cos(2\pi + \alpha) = 15 - 13\cos\alpha = 3$

$-1 \le \cos(2\theta + \alpha) \le 1 \quad \Rightarrow \quad -13 \le 13\cos(2\theta + \alpha) \le 13 \quad \Rightarrow \quad -13 \le -13\cos(2\theta + \alpha) \le 13$

5 $\quad \Rightarrow \quad 2 \le 15 - 13\cos(2\theta + \alpha) \le 28$

$\Rightarrow \quad 2 \le f(\theta) \le 28$ 5

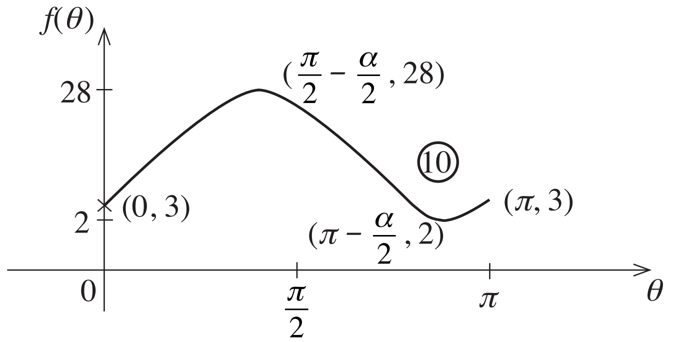
අවම ලක්ෂ්‍යයේදී $f(\theta) = 2$. එවිට $\cos(2\theta + \alpha) = 1 \Rightarrow 2\theta + \alpha = 2n\pi$; මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ 5

$\theta = n\pi - \dfrac{\alpha}{2} = \pi - \dfrac{\alpha}{2}$, $\theta \in [0, \pi]$ නිසා 5

උපරිම ලක්ෂ්‍යයේදී $f(\theta) = 28$. එවිට $\cos(2\theta + \alpha) = -1 \Rightarrow 2\theta + \alpha = 2n\pi \pm \pi$, $n \in \mathbb{Z}$ 5

$\theta = n\pi \pm \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$, $\theta \in [0, \pi]$ නිසා 5

$f(\theta) \ne 0$ වේ.



$f(\theta) - k = 0$ සමීකරණයට

(i) එක් විසඳුමක් පමණක් ඇත්තේ, $k = 2$ වන විට හා $k = 28$ වන විට ය. 5

(ii) විසඳුම් දෙකක් ඇත්තේ, $2 < k < 3$ වන විට හා $3 < k < 28$ වන විට ය. 5

(iii) විසඳුම් තුනක් ඇත්තේ, $k = 3$ වන විට ය. 5

(iv) විසඳුම් නොමැත්තේ, $k < 2$ වන විට හා $k > 28$ වන විට ය. 5

$\boxed{90}$

(c) $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \sin^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

5

$\alpha = \sin^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ද $\beta = \sin^{-1} x$ ද යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + \beta$

$\Rightarrow \cos\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right)$

$= -\sin\beta$ 5

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = -x$

$\Rightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 5

$\alpha = \sin^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} \qquad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

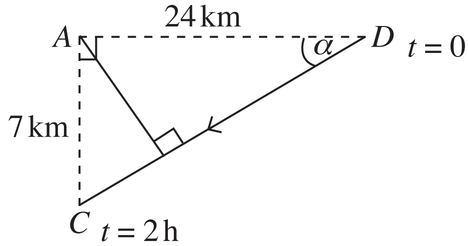
$\cos\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{2}{3}}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

$\boxed{15}$

A කොටස

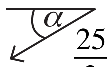
1. නැවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවේ පෙත :



$DC = \sqrt{24^2 + 7^2}$ km $= 25$ km

$\tan\alpha = \dfrac{7}{24}$ (5)

S - නැව, B - බෝට්ටුව, E - පොළව

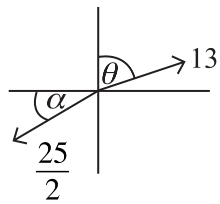
(i) $V_{B,S} =$  $\dfrac{25}{2}$ km h^{-1} (5)

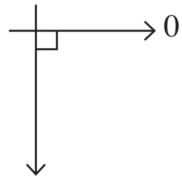
නැව හා බෝට්ටුව අතර කෙටිම දුර $= 24\sin\alpha$ km

$= 24 \cdot \dfrac{7}{25}$ km

$= \dfrac{168}{25}$ km (5)

(ii) $V_{B,E} = V_{B,S} + V_{S,E}$

$=$  (5) $\quad \tan\theta = \dfrac{12}{5}$

$=$ 

$13\sin\theta - \dfrac{25}{2}\cos\alpha$

$= 13 \cdot \dfrac{12}{13} - \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{24}{25}$

$= 12 - 12$

$= 0$

$\dfrac{25}{2}\sin\alpha - 13\cos\theta$

$= \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{7}{25} - 13 \cdot \dfrac{5}{13}$

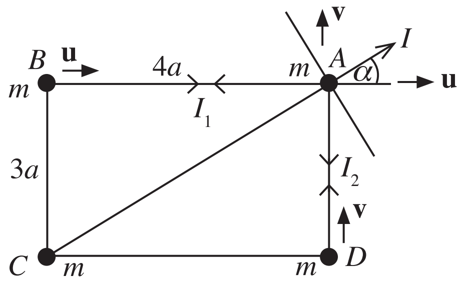
$= \dfrac{7}{2} - 5$

$= -\dfrac{3}{2}$

$\therefore V_{B,E} = \uparrow \dfrac{3}{2}$ km h^{-1} (උතුරට) (5)

$\boxed{25}$

2. $AB \perp BC$ සහ $AD \perp DC$ නිසා,
A ට යෙදෙන ආවේගය අනුව AB සහ AD තන්තු දිගේ
I_1 හා I_2 ආවේග ඇති වුවත් BC සහ DC තන්තු දිගේ
ආවේග ඇති නොවේ. (5)
තන්තු අවිතන්‍ය බැවින්,
BA දිශාවට A හා B හි අංශුවල ප්‍රවේග $\mathbf{u}$ ද
DA දිශාවට A හා D හි අංශුවල ප්‍රවේග $\mathbf{v}$ ද යැයි ගනිමු. (5)



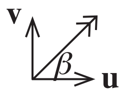
පද්ධතියටම, $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට $\mathbf{I} = \Delta(m\mathbf{v})$ යෙදීමෙන්, $I\cos\alpha = 2m\mathrm{u}$
පද්ධතියටම, $\overrightarrow{DA}$ දිශාවට $\mathbf{I} = \Delta(m\mathbf{v})$ යෙදීමෙන්, $I\sin\alpha = 2m\mathrm{v}$ (5)

$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ සහ $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ වේ.

$$\therefore u = \frac{4}{5}I \cdot \frac{1}{2m} = \frac{2I}{5m}$$

$$v = \frac{3}{5}I \cdot \frac{1}{2m} = \frac{3I}{10m} \quad (5)$$

$\therefore A$ හි ප්‍රවේගය $= \dfrac{I}{10m}\sqrt{4^2+3^2} = \dfrac{I}{2m}$



$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha$$

B හි ප්‍රවේගය $= BA$ දිශාවට $\dfrac{2I}{5m}$

C හි ප්‍රවේගය $= 0$

D හි ප්‍රවේගය $= DA$ දිශාවට $\dfrac{3I}{10m}$ (5)

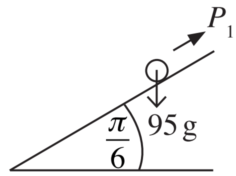
$\boxed{25}$

---

3. තිරස් චලිතය සඳහා, $Pv = H$ යෙදීමෙන්, $H = 3P$ ——— (1)
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්, $P - k \cdot 3^2 = 0$ ——— (2) (5)

$\Rightarrow H = 27k$ ——— (3)

ආනත තලය දිගේ ඉහළට චලිතය සඳහා,
$Pv = H$ යෙදීමෙන්, $H = 2P_1$ ——— (4)

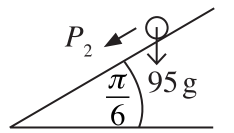


$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්, $P_1 - 95\,\mathrm{g}\sin\dfrac{\pi}{6} - k \cdot 2^2 = 0$ ——— (5) (5)

$\Rightarrow \dfrac{H}{2} = 475 + 4k$ ——— (6)

(3) සහ (6) න්, $19k = 950 \Rightarrow k = 50$
$H = 1350\,\mathrm{W} = 1.35\,\mathrm{kW}$ (5)

ආනත තලය දිගේ පහළට චලිතය සඳහා,



$Pv = H$ යෙදීමෙන්, $H = 4P_2$

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්, $P_2 + 95\,\mathrm{g}\sin\dfrac{\pi}{6} - 50 \cdot 4^2 = 95a$ (5)

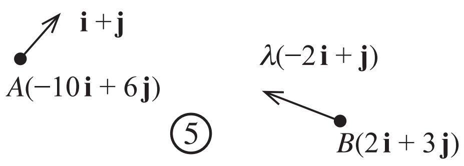
$$\frac{1350}{4} + 475 - 800 = 95a$$

$$a = \frac{1}{2\times 95}(675 - 650)$$

$$= \frac{25}{2\times 95} = \frac{5}{38}\,\mathrm{m\,s^{-2}} \quad (5)$$

$\boxed{25}$

4. $t = 0$ විට



5

$t = T$ වන විට අංශු දෙක ගැටේ නම්,
P හි විස්ථාපනය $= (\mathbf{i}+\mathbf{j})T$
Q හි විස්ථාපනය $= (-2\mathbf{i}+\mathbf{j})\lambda T$
ගැටෙන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම සැලකීමෙන්,
$-10\mathbf{i}+6\mathbf{j}+(\mathbf{i}+\mathbf{j})T \equiv 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+(-2\mathbf{i}+\mathbf{j})\lambda T$ 5 5

$\Rightarrow \quad (-10+T-2+2\lambda T)\mathbf{i} = (3+\lambda T-6-T)\mathbf{j}$

$\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$ හා $\mathbf{i}, \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ නිසා,

$2\lambda T + T = 12$ සහ $\lambda T - T = 3$

$\Rightarrow 3T = 6$

$\Rightarrow T = 2 \qquad \therefore 2\lambda = 5$

$\lambda = \dfrac{5}{2}$ 5

$\therefore \mathbf{v} = \dfrac{5}{2}(-2\mathbf{i}+\mathbf{j}) \Rightarrow |\mathbf{v}| = \dfrac{5}{2}\sqrt{(-2)^2+1^2} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ 5

$\boxed{25}$

5. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}+2\mathbf{b}, \ \overrightarrow{OB} = 3\mathbf{a}-\mathbf{b}$

$OA \perp OB \qquad \Rightarrow \overrightarrow{OA} \,.\, \overrightarrow{OB} = 0$ 5

$\Rightarrow (\mathbf{a}+2\mathbf{b}).(3\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 0$

$\Rightarrow 3|\mathbf{a}|^2 + 5\,\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} - 2|\mathbf{b}|^2 = 0$, 5 $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = \mathbf{b}\,.\,\mathbf{a}$ නිසා,

$\Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \dfrac{2}{5}|\mathbf{b}|^2 - \dfrac{3}{5}|\mathbf{a}|^2$ 5

$|\mathbf{a}| = 2$ සහ $|\mathbf{b}| = 1$ නම්, $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{12}{5} = -2$

$|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = -2$ 5 මෙහි θ යනු $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ අතර කෝණයයි.
$0 \le \theta \le \pi$

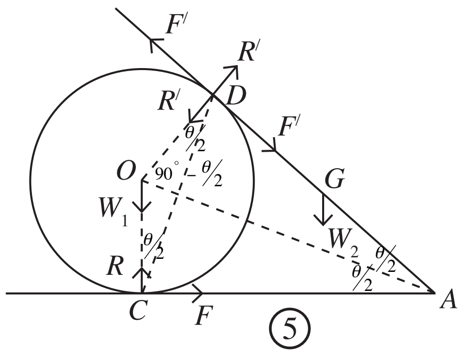
$2\cos\theta = -2$

$\cos\theta = -1$

$\theta = \pi$ 5

$\boxed{25}$

6. බල තුන ඒක ලක්ෂ්‍ය වීම. 5



5

සිලින්ඩරයේ බර සහ රළු තිරස් තලය මගින් සිලින්ඩරය මත යෙදෙන බලය C ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බැවින්, D හිදී දණ්ඩ මගින් සිලින්ඩරය මත යෙදෙන බලය ද C හරහා යා යුතුය. 5

එවිට, $O\hat{C}D = O\hat{D}C = \dfrac{\theta}{2}$

සිලින්ඩරයේ සමතුලිතතාව සඳහා, $\left|\dfrac{F}{R}\right| \le \mu$ වේ. 5

$\therefore \ \tan\dfrac{\theta}{2} \le \tan\lambda$

$\Rightarrow \quad \lambda \ge \dfrac{\theta}{2}, \ (0 < \lambda, \ \theta < \dfrac{\pi}{2}$ බැවින්)

5

$\boxed{25}$

[4 වන පිටුව බලන්න

7. A, B, C ළමයින් තිදෙනා ගැටලුව නිවැරදි ව, ස්වායත්තව විසඳීමේ සිද්ධි පිළිවෙළින් A, B, C යැයි ගනිමු.
එවිට $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ සහ $P(C) = \frac{1}{3}$ වේ.

X : ළමයින් දෙදෙනකු පමණක් ගැටලුව නිවැරදිව ස්වායත්තව විසඳීම ලෙස ගනිමු.

එවිට, $X \quad = \quad (A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$

$P(X) \quad = \quad P\,(A \cap B \cap C') + P\,(A \cap B' \cap C) + P\,(A' \cap B \cap C)$ (ප්‍රත්‍යක්ෂය) 5

$= \quad P(A)\, P(B)\, P(C') + P(A)\, P(B')\, P(C) + P(A')\, P(B)\, P(C)$ 5

(A, B, C එකිනෙකින් ස්වායත්ත බැවින්)

$= \quad \frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,(1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{6}\,(1 - \frac{1}{2})\frac{1}{3} + (1 - \frac{1}{6})\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$ 10

$= \quad \frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$

$= \quad \frac{8}{36}$ 5

$= \quad \frac{2}{9}$

25

....

8. R : රෝස පැහැති මල් සහිත පැළයක් ලැබීම

$P(R) = \frac{1}{6}$ සහ $P(R') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ 5

n : වැපිරිය යුතු ඇට ගණන

X : යටත් පිරිසයින් රෝස පැහැති මල් සහිත එක් පැළයක් ලැබීම

$P(X) \; = 1 - P$(රෝස පැහැති මල් සහිත එක් පැළයක්වත් නොලැබීම)

$= 1 - P\,(R' \cap R' \ldots \cap R')$ 5

$= 1 - \{P\,(R')\}^n > 0.98$ 5

$0.02 > \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$n > \dfrac{\ln(0.02)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 21.46$ 5

$\therefore\; n_{\text{අඩුතම}} = 22$ 5

25

9.

x	-2	-1	0	1	2
f	4	1	3	1	1
$f.x$	-8	-1	0	1	2
$f.x^2$	16	1	0	1	4

5

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{-6}{10} = -0.6 \quad 5$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{x}^2 = \frac{22}{10} - 0.36 = 1.84 \quad 5$$

$$\therefore \sigma_x = \sqrt{1.84}$$

$y = 2000 - 4x$ ලෙස ගනිමු.

එවිට, $\bar{y} = 2000 - 4\bar{x}$

$= 2000 + 2.4$

$= 2002.4$ 5

$$\sigma_y^2 = 4^2 \cdot \sigma_x^2$$

$$= 16 \times 1.84$$

$$\therefore \sigma_y = 4\sqrt{1.84} \quad 5$$

25

---

10. $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{20} = 40$

$\therefore$ මුළු ලකුණුවල එකතුව $= 20 \times 40 = 800$

අඩුම ලකුණු හයෙහි එකතුව $= 6 \times 25 = 150$ 5

වැඩිම ලකුණු හයෙහි එකතුව $= 440$

$\therefore$ ඉතිරි 8 දෙනාගේ ලකුණුවල එකතුව

$= 800 - 590 = 210$ 5

(i) $\therefore$ ඉතිරි 8 දෙනාගේ ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය

$= \dfrac{210}{8} = 26.25$ 5

(ii) තෙවන චතුර්ථකය $= Q_3$

$\dfrac{3}{4}(n+1) = \dfrac{3}{4} \times 21 = 15\dfrac{3}{4}$

15 වන ලකුණ $= 70$ 5

16 වන ලකුණ $= 71$

$\therefore Q_3 = 70 + \dfrac{3}{4}(71 - 70)$

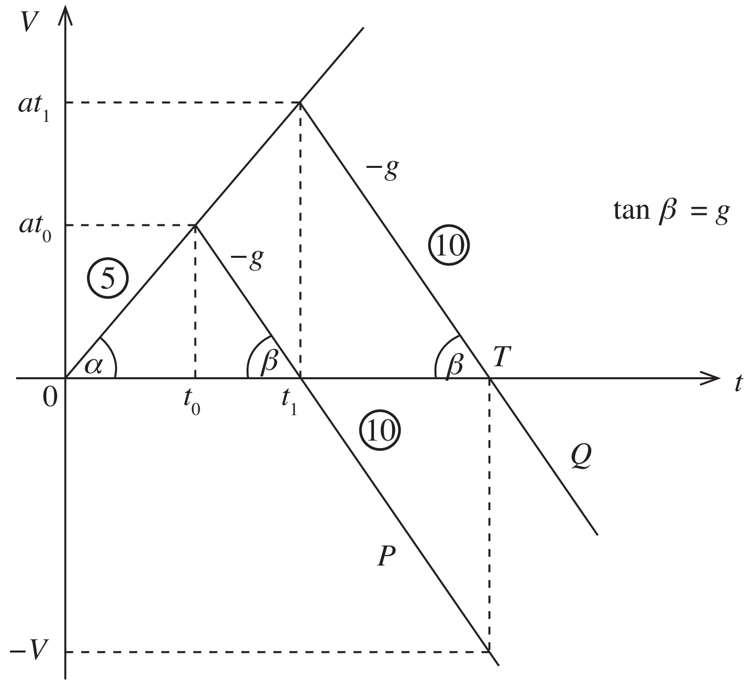
$= 70.75$ 5

25

[6 වන පිටුව බලන්න

B කොටස

11. (a)



25

P අංශුවේ චලිතයට,

$$\tan\beta = \frac{at_0}{t_1 - t_0} \quad 5 \qquad \Rightarrow \quad 5 \qquad g = \frac{at_0}{t_1 - t_0}$$

$$t_1 - t_0 = \frac{at_0}{g}$$

$$t_1 = \frac{at_0}{g} + t_0$$

$$t_1 = \frac{t_0}{g}(a + g) \quad 5$$

Q ක්ෂණික නිසලතාවට එළඹෙන කාලය T නම්,

$$\tan\beta = \frac{at_1}{T - t_1} \qquad \Rightarrow \qquad g = \frac{at_1}{T - t_1} \quad \Rightarrow T - t_1 = \frac{at_1}{g} \quad 5$$

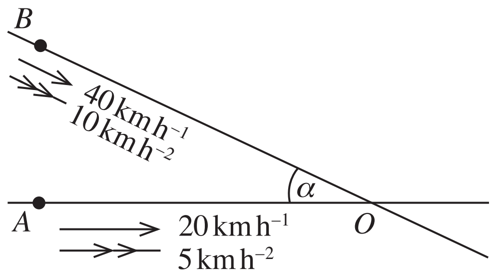
$$\tan\beta = \frac{V}{T - t_1}$$

$$V = g(T - t_1)$$

$$= \cancel{g}\frac{at_1}{\cancel{g}} = at_0\left(\frac{a}{g} + 1\right) \quad 5$$

25

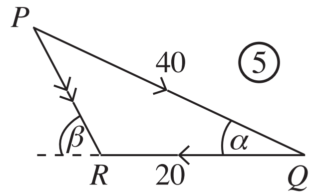
(b)



$\mathrm{V}(Y, X) \;=\; \mathrm{V}(Y, E) + \mathrm{V}(E, X)$

$\;=\; \alpha \; 40\,\text{km h}^{-1} + \leftarrow 20\,\text{km h}^{-1}$ 5

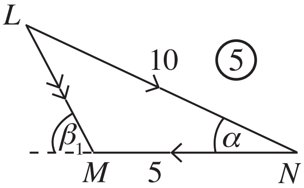
$\;=\; \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$



සහ $a(Y, X) \;=\; a(Y, E) + a(E, X)$

$\;=\; \alpha \; 10\,\text{km h}^{-2} + \leftarrow 5\,\text{km h}^{-2}$ 5

$\;=\; \overrightarrow{LN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{LM}$



(i) $\tan\beta = \dfrac{40\sin\alpha}{40\cos\alpha - 20}$ 5

$= \dfrac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1}$

(ii) $\tan\beta_1 = \dfrac{10\sin\alpha}{10\cos\alpha - 5} = \dfrac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1}$ 5

(i) හා (ii) න්, $\tan\beta = \tan\beta_1$

$\beta = \beta_1 \;\; (0 < \beta, \beta_1 < \pi)$ 5

$\Rightarrow \mathrm{V}(Y, X) \;/\!\!/\; a(Y, X)$ 5

$\therefore$ X ට සාපේක්ෂව Y හි ගමන් පෙත සරල රේඛාවකි.

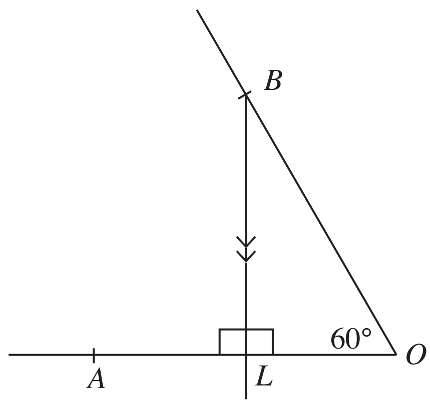
$\boxed{40}$

$\alpha = 60^\circ$ නම්,

$\tan\beta$, $\tan\beta_1$ අර්ථ නොදැක්වේ.

$\therefore \beta = \beta_1 = 90^\circ$ වේ. 5

$\therefore$ X ට සාපේක්ෂව Y හි ගමන් පෙත AO ට ලම්බ වේ.



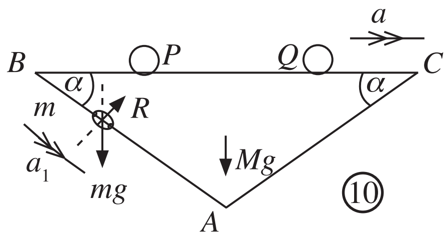
X සහ Y අතර කෙටිතම දුර $= AL = 10 - 10\cos 60^\circ$

$= 5\,\text{km}$ 5

$\boxed{10}$

[8 වන පිටුව බලන්න

(c)



10

$a\,(M, E) \;=\; \twoheadrightarrow a\,, \quad a\,(m, E) \;=\;$ α $\to a$, $\searrow a_1$ 5

$\mathbf{F} \;=\; m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්,

$m :$ α ; $mg\sin\alpha \;=\; m\,(a_1 + a\cos\alpha)$ ——— (1) 5

$M, m \longrightarrow;\quad 0 \;=\; Ma + m\,(a + a_1\cos\alpha)$

$0 \;=\; (M+m)\,a + m\,a_1\cos\alpha$ ——— (2) 10

(1) හා (2) න් ;

$0 \;=\; (M+m)\,a + m\,(g\sin\alpha - a\cos\alpha)\cos\alpha$ 5

$-\,mg\sin\alpha\cos\alpha \;=\; (M + m - m\cos^2\alpha)\,a$

$$\therefore\, a \;=\; -\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha} \;=\; -\frac{mg\sin 2\alpha}{2(M + m\sin^2\alpha)}$$

5

$m :$ α R ; $R - mg\cos\alpha \;=\; ma\sin\alpha$ 5

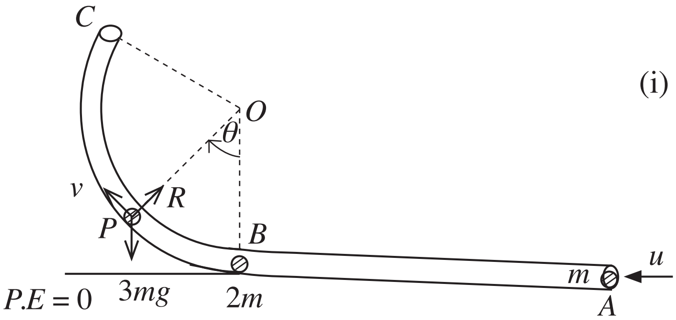
$$R \;=\; mg\cos\alpha - \frac{m^2 g\sin^2\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

$$=\; \frac{mg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\,\{M + \cancel{m\sin^2\alpha} - \cancel{m\sin^2\alpha}\}$$ 5

$$=\; \frac{Mmg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

$\boxed{50}$

12. (a)



(i)

රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිතිය යෙදීමෙන් ;

$3mv_1 \;=\; mu$ 5

$v_1 \;=\; \dfrac{u}{3}$ 5

$\boxed{10}$

(ii) ශක්ති සංස්ථිතිය යෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2}(3m)v^2 + 3mg(a - a\cos\theta) = \frac{1}{2}(3m)\frac{u^2}{9} \qquad 15$$

$$v^2 = \frac{u^2}{9} - 2ga(1-\cos\theta) \qquad 5$$

F = m**a** යෙදීමෙන්,

$$\overrightarrow{PO};\ R - 3mg\cos\theta = 3m\left(\frac{v^2}{a}\right) \qquad 10$$

$$R = \frac{3m}{a}\left\{\frac{u^2}{9} - 2ga + 3ga\cos\theta\right\} \qquad 5$$

$\boxed{35}$

(iii) $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ වන විට ; $v^2 = \dfrac{u^2}{9} - 2ga\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{u^2}{9} - 3ga$ 5

5 $\dfrac{u^2}{9} - 3ga > 0$ නම් අංශුව C හිදී ඉවත් වේ. එවිට $u > 3\sqrt{3ga}$ විය යුතුය.

$\boxed{10}$

(iv) C සිට A දක්වා චලිතය සඳහා, $s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$$\rightarrow \sqrt{3}\,a + \frac{\sqrt{3}a}{2} = v\left(\frac{1}{2}\right)t \quad \Rightarrow 3\sqrt{3}\,a = vt \text{ —— (1)} \qquad 5$$

$$\uparrow -\frac{3a}{2} = v\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}gt^2 \text{ —— (2)} \qquad 5$$

(1) සහ (2) න්,

$$-\frac{3a}{2} = v\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}a}{v} - \frac{1}{2}g\frac{27}{v^2}a^2 \qquad 5$$

$$\frac{1}{2}ga\frac{27}{v^2} = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}$$

$$27ga = 12v^2$$

$$\frac{9}{4}ga = \frac{u^2}{9} - 3ga$$

$$\frac{u^2}{9} = \frac{9}{4}ga + 3ga \qquad 5$$

$$\therefore\ u = \frac{3}{2}\sqrt{21ag}$$

$\boxed{20}$

(b) රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිතිය යෙදීමෙන්,

$$mv_1 + Mv_2 = mu \text{ —— (i)} \qquad 10$$

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය යෙදීමෙන්,

$$v_1 - v_2 = -eu \text{ —— (ii)} \qquad 10$$

(i) සහ (ii) න් $\quad v_1 = \dfrac{u(m-eM)}{(m+M)}$ සහ $\quad v_2 = \dfrac{mu(1+e)}{(m+M)}$ 10

[10 වන පිටුව බලන්න

$$\Delta E = \sum \frac{1}{2} I.(U+V) \text{ යෙදීමෙන්,} \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}(I)(v_2) + \frac{1}{2}(-I)(u+v_1) = -\frac{I}{2}(u+v_1-v_2) = -\frac{I}{2}(u-eu) \quad 10$$

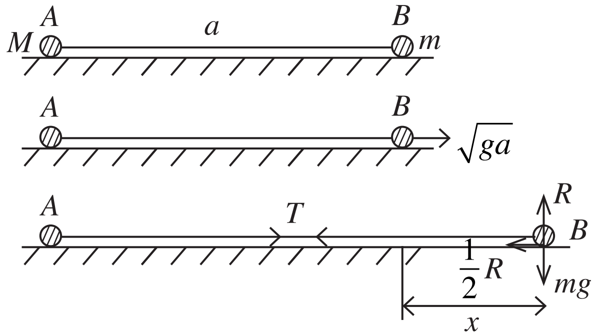
$$= -\frac{I}{2}(1-e)u \quad 5 \quad ; \text{ මෙහි } I = Mv_2 = \frac{Mmu(1+e)}{(M+m)} \quad 5$$

$$\frac{1}{2}\frac{Mmu^2(1+e)(1-e)}{(M+m)} = \frac{1}{4}mu^2 \quad 10$$

$$M(1-2e^2) = m \quad 5 \quad \Rightarrow \quad 1-2e^2 > 0 \quad 5 \quad \Rightarrow \quad e < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{75}$

13.



B අංශුවට $\uparrow$ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්, $R = mg$

B අංශුවට $\longrightarrow$ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්, $-\frac{1}{2}R - T = m\ddot{x}$ 10

තන්තුවේ ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $2mg$ නිසා, $T = 2mg\frac{x}{a}$ 10

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}mg - \frac{2mgx}{a} = m\ddot{x} \quad 10$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x+\frac{a}{4}\right) \text{ ——— } (1)$$

$\therefore$ අංශුවේ චලිතය සරල අනුවර්තී වන අතර දෝලන කේන්ද්‍රය $x = -\frac{a}{4}$ මගින් දෙනු ලැබේ. 5

$x + \frac{a}{4} = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ——— (2) ලෙස ගත් විට,

$t = 0$ දී $x = 0$ බැවින්, $\alpha = \frac{a}{4}$ 5

t විෂයයෙන් අවකලනයෙන්, $\dot{x} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$ ——— (3)

$t = 0$ දී $\dot{x} = \sqrt{ga}$ බැවින්, $\sqrt{ga} = \beta\omega \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{ga}}{\omega}$ 5

t විෂයයෙන් නැවත අවකලනයෙන්,
$$\ddot{x} = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t$$
$$= -\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)$$
$$= -\omega^2\left(x + \frac{a}{4}\right) \quad 5$$

$\boxed{50}$

[11 වන පිටුව බලන්න

(1) න්, $\omega^2 = \dfrac{2g}{a} \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\dfrac{2g}{a}}$ 5

$\therefore\ \alpha = \dfrac{a}{4}$ සහ $\beta = \sqrt{ga}\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 5

$\boxed{10}$

උපරිම විතතියේ දී $\dot{x} = 0$ බැවින්, 10

(3) න්, $\alpha \sin \omega t = \beta \cos \omega t$

$$\Rightarrow \tan \omega t = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{a/\sqrt{2}}{a/4} = 2\sqrt{2}$$ 5

(2) න්, $x + \dfrac{a}{4} = \dfrac{a}{4}\,\dfrac{1}{3} + \dfrac{a}{\sqrt{2}}\,\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$$= \frac{a}{12}(1+8)$$

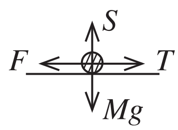
$$= \frac{3a}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a}{2}$$ 5

$\therefore$ උපරිම විතතිය $\dfrac{a}{2}$ වේ.

$\boxed{20}$

උපරිම ආතතිය $= \dfrac{2mg}{a}\,\dfrac{a}{2} = mg$ 5



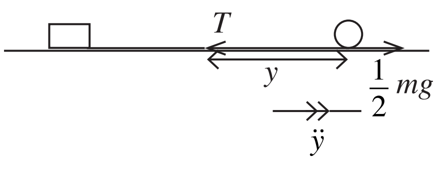
A අංශුවෙහි සමතුලිතතාව සඳහා,

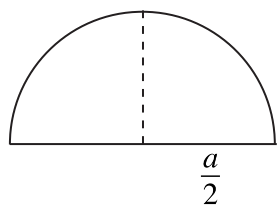
$S = Mg$ හා $T = F$

$\dfrac{F}{S} \le \dfrac{1}{2}$ 10 බැවින්, $\dfrac{mg}{Mg} \le \dfrac{1}{2}$ 5

$\therefore\ M \ge 2m$

$\boxed{20}$





$$-T + \frac{1}{2}mg = m\ddot{y}$$ 5

$$-\frac{2mg}{a}y + \frac{mg}{2} = m\ddot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{2g}{a}\left(y - \frac{a}{4}\right)$$ 5

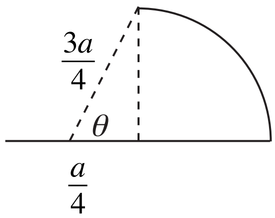
$\boxed{10}$

දෝලන කේන්ද්‍රය $= \dfrac{a}{4}$ (5)

කෝණික ප්‍රවේගය $= \sqrt{\dfrac{2g}{a}}$ (5)

සරල අනුවර්තී චලිතයට අනුරූප වෘත්තාකාර චලිතය සැලකීමෙන්

ආපසු ඒමට ගතවන කාලය $= \pi\sqrt{\dfrac{a}{2g}}$ (5)



යාමට ගතවන කාලය

$$= \frac{\theta}{\omega} = \sqrt{\frac{a}{2g}}\cos^{-1}\frac{1}{3} \quad (5)$$

$\therefore$ ගතවන මුළු කාලය $= \sqrt{\dfrac{a}{2g}}\cos^{-1}\dfrac{1}{3} + \pi\sqrt{\dfrac{a}{2g}}$

$$= \left[\pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{a}{2g}} \quad (5)$$

ආපසු චලිතය සඳහා $\dot{y} = \dfrac{a}{4}\left(-\sqrt{\dfrac{2g}{a}}\right)\sin\sqrt{\dfrac{2g}{a}}\,t$ (5)

$t = \pi\sqrt{\dfrac{a}{2g}}$ විට

$\sqrt{\dfrac{2g}{a}}\,t = \pi$

$\therefore \quad \dot{y} = 0$ (5)

$\therefore$ B අංශුව ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණ නියත වශයෙන්ම නිශ්චලතාවට පත්වේ. (5)

$\boxed{40}$

වෙනත් ක්‍රමයක් :

B අංශුවේ චලිතය :

B අංශුව උපරිම විතතියට යාමට කාලය t_0 ලෙස ගනිමු.

$\tan\omega t = 2\sqrt{2}$ නම් $\cos\omega t = \dfrac{1}{3}$ වේ. (5)

$\therefore \cos\omega t_0 = \dfrac{1}{3}$

$\omega t_0 = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$t_0 = \dfrac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \sqrt{\dfrac{a}{2g}}\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ (5)

B අංශුවේ ආපසු චලිතය සඳහා

ආරම්භක ස්ථානයට ඒමට කාලය t_1 නම්,

එවිට $y = 0$ වේ. (5)

$$\therefore \cos\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t_1 = -1$$

$$\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t_1 = \pi \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{a}{2g}}\,\pi \qquad (5)$$

$\therefore$ B අංශුව ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණීමට කාලය

$$= t_0 + t_1$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right] \qquad (5)$$

$t_1 = \sqrt{\frac{a}{2g}}\,\pi$ කාලයකට පසු ප්‍රවේගය $\dot{y}$ නම්,

$$\dot{y} = -\frac{a}{4}\sqrt{\frac{2g}{a}}\sin\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t_1 \qquad (5)$$

$$= -\frac{a}{4}\sqrt{\frac{2g}{a}}\sin\sqrt{\frac{2g}{a}}\sqrt{\frac{a}{2g}}\,\pi$$

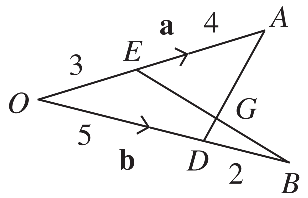
$$= 0 \qquad (5)$$

$\therefore$ B අංශුව ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණ නියත වශයෙන්ම නිශ්චලතාවට පත්වේ. (5)

$\boxed{40}$

---

14. (a)



$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG}$$
$$= \overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{BE}$$
$$= \overrightarrow{OB} + \lambda[\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE}]$$
$$= \overrightarrow{OB} + \lambda(-\overrightarrow{OB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OA})$$
$$= \mathbf{b} + \lambda(\frac{3}{7}\mathbf{a} - \mathbf{b}) \text{ ——— (1)} \qquad (15)$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \mu[\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}]$$
$$= \overrightarrow{OA} + \mu(-\overrightarrow{OA} + \frac{5}{7}\overrightarrow{OB})$$
$$= \mathbf{a} + \mu(\frac{5}{7}\mathbf{b} - \mathbf{a}) \text{ ——— (2)} \qquad (15)$$

(1) සහ (2) න්,

$$\mathbf{b} + \lambda(\frac{3}{7}\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mu(\frac{5}{7}\mathbf{b} - \mathbf{a}) \qquad (5)$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ස්වායත්ත දෛශික නිසා,

$$\frac{3\lambda}{7} = 1 - \mu \text{ ——— (3)} \qquad (5)$$

$$1 - \lambda = \frac{5\mu}{7} \text{ ——— (4)} \qquad (5)$$

$(3) + \frac{3}{7}\times(4)$

$$\frac{3}{7} = 1 - \mu + \frac{15}{49}\mu$$

$$\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{7}_{\,1}} = \frac{17}{7}\,\frac{\cancel{34}}{\cancel{49}}\mu$$

[14 වන පිටුව බලන්න

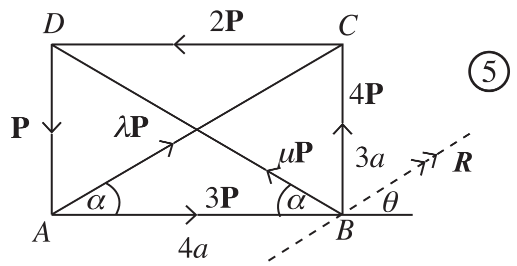
$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{14}{17} \qquad (5)$$

$$\overrightarrow{OG} = \mathbf{a} + \frac{14}{17}\left(\frac{5}{7}\mathbf{b} - \mathbf{a}\right) = \mathbf{a} + \frac{10}{17}\mathbf{b} - \frac{14}{17}\mathbf{a}$$

$$= \frac{3}{17}\mathbf{a} + \frac{10}{17}\mathbf{b} = \frac{1}{17}(3\mathbf{a} + 10\mathbf{b}) \qquad (10)$$

$\boxed{60}$

(b)



(5)

(i) බල යුග්මයකට තුල්‍ය විට $\boldsymbol{R} = 0$ වේ. (5)

$\longrightarrow \boldsymbol{X} = 0, \quad \uparrow \boldsymbol{Y} = 0$ විය යුතුයි.

$$\longrightarrow X: \quad 3P + \lambda P\cos\alpha - \mu P\cos\alpha - 2P = 0 \qquad (5)$$

$$3P + \lambda P\frac{4}{5} - \mu P\frac{4}{5} - 2P = 0$$

$$5\cancel{P} + 4\lambda\cancel{P} - 4\mu\cancel{P} = 0$$

$$5 = 4\mu - 4\lambda \;\text{———}\; (1) \qquad (5)$$

$$\uparrow Y: \quad 4P - P + \lambda P\sin\alpha + \mu P\sin\alpha = 3P + \lambda P\frac{3}{5} + \mu P\frac{3}{5} = 0 \qquad (5)$$

$$\lambda + \mu = -5 \;\text{———}\; (2) \qquad (5)$$

$(1) + (2) \times 4$

$$8\mu = -15 \Rightarrow \mu = -\frac{15}{8} \qquad (5)$$

$$\lambda = -5 - \mu = -5 + \frac{15}{8} = -\frac{25}{8} \qquad (5)$$

$\boxed{40}$

(ii) $\curvearrowleft B = 0$ විය යුතුය. (5)

$$2\cancel{P} \times 3\cancel{a} + \cancel{P} \times 4\cancel{a} - \lambda\cancel{P} \times 4\cancel{a}\sin\alpha = 0$$

$$6 + 4 - \lambda \times 4 \times \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\cancel{50}\,25}{\cancel{12}\,6} = \frac{25}{6} \qquad (5)$$

$$\longrightarrow R\cos\theta = P + (\lambda - \mu)P\cos\alpha \;\text{———}\; (1) \qquad (5)$$

$$\uparrow R\sin\theta = 3P + (\lambda + \mu)P\sin\alpha \;\text{———}\; (2) \qquad (5)$$

$$(2)/(1) \text{ න්}, \quad \tan\theta = \frac{3P + (\lambda+\mu)P \times \frac{3}{5}}{P + (\lambda - \mu)P \times \frac{4}{5}} \qquad (5)$$

R, AC ට සමාන්තර නිසා, $\tan\theta = \tan\alpha$

$$\theta = \alpha \qquad (5)$$

[15 වන පිටුව බලන්න

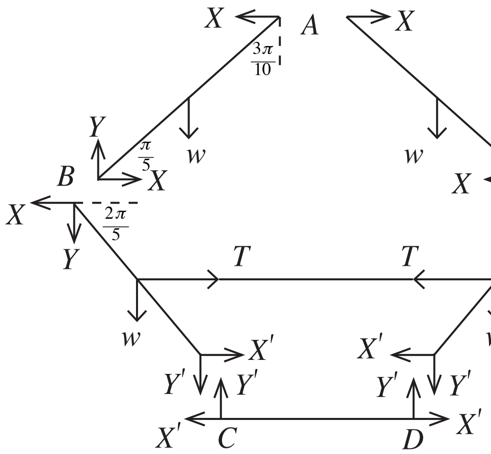
$$\frac{3}{4} \; (5) \quad = \quad \frac{3+\left(\frac{25}{6}+\mu\right)\times\frac{3}{5}}{1+(\frac{25}{6}-\mu)\times\frac{4}{5}} \quad = \quad \frac{3+\frac{5}{2}+\frac{3\mu}{5}}{1+\frac{5\times 2}{3}-\frac{4\mu}{5}}$$

$$13-\frac{12\mu}{5} \quad = \quad 22+\frac{12\mu}{5} \;\Rightarrow\; 9 = -\frac{24\mu}{5} \;\Rightarrow\; \mu = -\frac{45}{24} \quad (5)$$

සමතුලිතතාවය සඳහා $R=0$ සහ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් වටා ඝූර්ණය ශූන්‍ය විය යුතුය. (10)
(i) සහ (ii) කොටස් අනුව එකී සමීකරණ එකවර සපුරාලන පරිදි λ, μ සෙවිය නොහැක.

$\boxed{50}$

15. (a)



(10)

දණ්ඩක දිග $2a$ යැයි ගනිමු. A හරහා යන සිරස් රේඛාව වටා පද්ධතිය සමමිතික වේ.

$\therefore$ A හිදී $Y=0$ වේ. (5)

AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවට,

$$B \curvearrowleft \quad X\times 2a\sin\frac{\pi}{5} - w\times a\cos\frac{\pi}{5} = 0 \quad (10)$$

$$X = \frac{w}{2}\cot\frac{\pi}{5} \quad (5)$$

AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවයට $\uparrow$

$$\uparrow \quad Y = w \quad (5)$$

BC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවයට,

$$C \curvearrowleft \quad X\times 2a\sin\frac{2\pi}{5} + Y\times 2a\cos\frac{2\pi}{5} + w\times a\cos\frac{2\pi}{5} - T\times a\sin\frac{2\pi}{5} = 0 \quad (10)$$

$$T = 2X + Y\,2\cot\frac{2\pi}{5} + w\cot\frac{2\pi}{5}$$

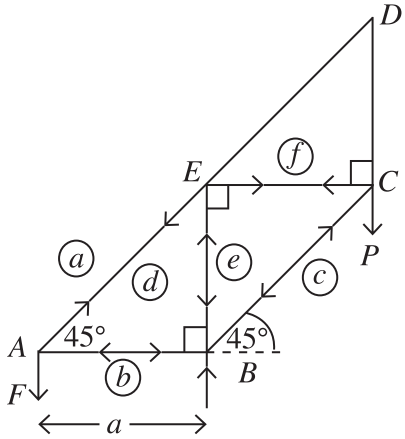
$$= \cancel{2}\,\frac{w}{\cancel{2}}\cot\frac{\pi}{5} + 2w\cot\frac{2\pi}{5} + w\cot\frac{2\pi}{5} \quad (5)$$

$$= w\left(\cot\frac{\pi}{5} + 3\cot\frac{2\pi}{5}\right) \quad (10)$$

$\boxed{60}$

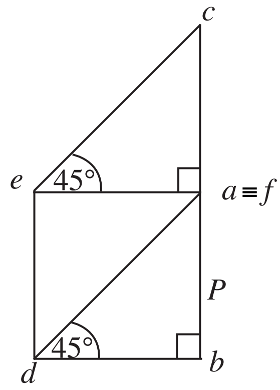
[16 වන පිටුව බලන්න

(b)



$\overset{\curvearrowleft}{B}$; $\quad F \times a - P \times a = 0$

$$F = P\,\text{N}$$ 10



30

$a \equiv f$

a හා f එකම ලක්ෂ්‍යය වේ. 5

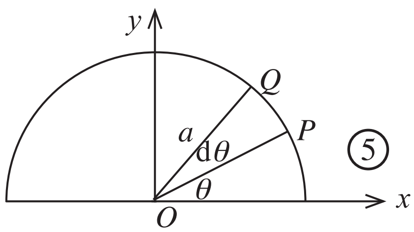
දණ්ඩ	විශාලත්වය	ප්‍රත්‍යාබලය
AB	P N	තෙරපුම
BC	$\sqrt{2}\,P$ N	තෙරපුම
CD	0	–
DE	0	–
AE	$\sqrt{2}\,P$ N	ආතතිය
BE	P N	තෙරපුම
EC	P N	ආතතිය

35

ආධාරකය මත ප්‍රතික්‍රියාව $\boldsymbol{R} = 2P$ N 10

$\boxed{90}$

16.



5

Oy වටා සමමිතික නිසා ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය Oy මත වේ. 5
ඒකක දිගක ස්කන්ධය ρ යැයි ගනිමු. කම්බි රාමුවේ අරය a වේ.

PQ අංශු මාත්‍රයේ ස්කන්ධය $= \rho\, a\, \mathrm{d}\theta$

PQ අංශු මාත්‍රයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට Ox සිට දුර $y = a\sin\theta$

O සිට වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\bar{y}$ නම්,

$$\bar{y} = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

[17 වන පිටුව බලන්න

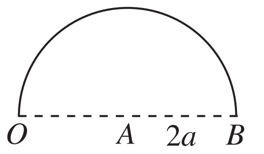
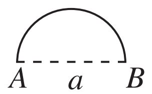
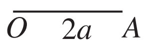
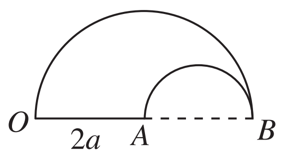
$$= \frac{\int_0^{\pi} \rho a \sin\theta a \ \mathrm{d}\theta}{\int_0^{\pi} \rho a \ \mathrm{d}\theta} \quad 10 \quad = \frac{a^2\rho\int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta}{a\rho\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta}$$

$$= \frac{a^2\rho\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}{a\rho\left[\theta\right]_0^{\pi}} = \frac{a\left[-\cos\pi + \cos 0\right]}{\pi} \quad 10$$

$$= \frac{2a}{\pi}$$

$\boxed{30}$

ඒකක දිගක ස්කන්ධය ρ යැයි ගනිමු.

වස්තුව	ස්කන්ධය	***x*** අක්ෂයේ සිට දුර	***y*** අක්ෂයේ සිට දුර
	$2\pi a\rho$	$\frac{4a}{\pi}$	$2a$
	$\pi a\rho$	$\frac{2a}{\pi}$	$3a$
	$2a\rho$	0	a
	$3\pi a\rho + 2a\rho$	$\bar{y}$	$\bar{x}$

30

$$\bar{x} = \frac{2a \times 2\pi a\rho + 3a \times \pi a\rho + 2a\rho \times a}{3\pi a\rho + 2a\rho} \quad 10$$

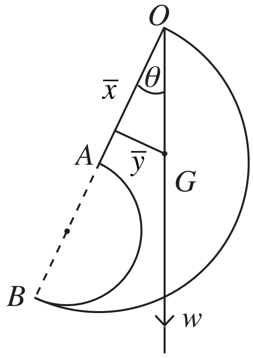
$$= \frac{4\pi a + 3\pi a + 2a}{3\pi + 2} = \frac{7\pi a + 2a}{3\pi + 2} \quad 5$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{4a}{\pi} \times 2\pi a\rho + \frac{2a}{\pi} \times \pi a\rho}{3\pi a\rho + 2a\rho} \quad 10 \quad = \frac{10a}{3\pi + 2} \quad 5$$

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \left[\frac{(7\pi + 2)a}{3\pi + 2}, \frac{10a}{3\pi + 2}\right]$$

$\boxed{60}$

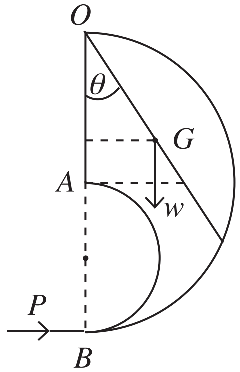
[18 වන පිටුව බලන්න



5

$$\tan\theta = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\frac{10a}{3\pi+2}}{\frac{(7\pi+2)a}{3\pi+2}} \; 10 = \frac{10}{7\pi+2} \; 5$$

$\boxed{20}$



5

O වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

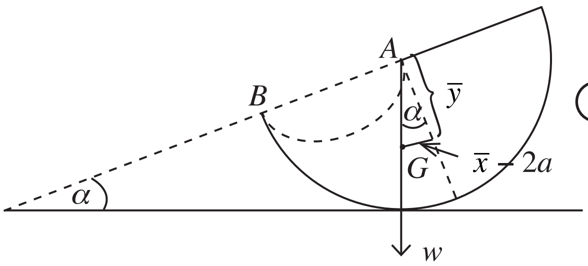
$\overset{\curvearrowleft}{O}$;

$$P \times 4a = w \times \bar{y} \quad 10$$

$$P = \frac{w}{4a} \times \frac{10a}{3\pi+2}$$

$$= \frac{5w}{2(3\pi+2)} \quad 5$$ ඒකක

$\boxed{20}$



5

$$\tan\alpha = \frac{\bar{x}-2a}{\bar{y}}$$

$$= \frac{\frac{(7\pi+2)a}{3\pi+2} - 2a}{\frac{10a}{3\pi+2}} \quad 10$$

$$= \frac{(7\pi+2)\cancel{a} - 2\cancel{a}(3\pi+2)}{10\cancel{a}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\pi-2}{10}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\pi-2}{10}\right) \quad 5$$

$\boxed{20}$

17. (a) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$; $P(B)>0$ 5

$\boxed{5}$

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P[(A_1\cap A_2)\cap A_3]$$

$= P(X\cap A_3)$; මෙහි $X = A_1\cap A_2$ වේ.

$= P(X).P(A_3|X)$ 5

$P(X) = P(A_1\cap A_2)$

$= P(A_1).P(A_2|A_1)$ 5

$\therefore\ P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1).\,P(A_2|A_1).\,P(A_3|A_1\cap A_2)$

$\boxed{10}$

A : තෝරාගත් සාමාජිකයා වැඩිහිටියකු වීම
C : තෝරාගත් සාමාජිකයා ළමයකු වීම
F : තෝරාගත් සාමාජිකයා ගැහැනු අයකු වීම
M : තෝරාගත් සාමාජිකයා පිරිමි අයකු වීම
S : තෝරාගත් සාමාජිකයා පිහිනුම් තටාකය භාවිත කරන්නකු වීම

$P(A) = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $P(C) = \frac{1}{4}$

$P(M|A) = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $P(F|A) = \frac{1}{4}$

$P(M|C) = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $P(F|C) = \frac{2}{5}$

$P(S|A\cap M) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(S|A\cap F) = \frac{1}{3}$

$P(S|C\cap M) = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $P(S|C\cap F) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(S|C) = \frac{4}{5}$ 10

(i) $P(S) = P(A\cap M\cap S) + P(A\cap F\cap S) + P(C\cap S)$ 5

$= P(A)\,P(M|A)\,P(S|A\cap M) + P(A)\,P(F|A)\,P(S|A\cap F) + P(C)\,P(S|C)$ 5

$= \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\times\frac{4}{5}$ 5

$= \frac{9}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{5} = \frac{87}{160}$ 5

$\boxed{30}$

(ii) $P(M|S) = \dfrac{P(M\cap S)}{P(S)}$

$P(M\cap S) = P(A\cap M\cap S) + P(C\cap M\cap S)$ 5

$= \frac{9}{32} + \frac{1}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}$

$= \frac{321}{800}$ 5

$\therefore P(M|S) = \dfrac{P(M\cap S)}{P(S)} = \dfrac{\cancel{321}^{\,107}}{\cancel{800}_{\,5}} \times \dfrac{\cancel{160}}{\cancel{87}_{\,29}} = \dfrac{107}{145}$

$\boxed{10}$

(iii) $P(C \cap M | S') = \dfrac{P(C \cap M \cap S')}{P(S')}$

$P(C \cap M \cap S') = P(C) \times P(M|C) \times P(S'|M \cap C)$

$= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{100}$ 5

$\therefore$ අවශ්‍ය සම්භාවිතාව $= 1 - P(C \cap M | S')$ 5

$= 1 - \dfrac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{87}{160}}$ 5 $= 1 - \dfrac{3 \times 16\cancel{0}}{10\cancel{0} \times 73}$

$= \dfrac{682}{730}$ 5

$\boxed{20}$

(b) $u_i = \dfrac{x_i - A}{10}$

පන්ති ලකුණ	f_i	u_i	$f_i u_i$	$f_i u_i^2$
24.5	1	-3	-3	9
34.5	9	-2	-18	36
44.5	35	-1	-35	35
54.5	40	0	0	0
64.5	12	1	12	12
74.5	3	2	6	12
			-38	104
			5	5

(i) $A = 54.5$

$\bar{x} = A + C \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = 54.5 + 10\left(\dfrac{-38}{100}\right)$ 5

$= 54.5 - 3.8$

$= 50.7$ 5

මාත පන්තිය $49.5 - 59.5$

$M_0 = 49.5 + \left(\dfrac{40-35}{(40-35)+(40-12)}\right) \times 10$ 5

$= 49.5 + \dfrac{5}{33} \times 10$

$= 51.02$ 5

$S.D = \sigma = C\sqrt{\dfrac{\sum f_i u_i^2}{\sum f_i} - \left(\dfrac{f_i u_i}{\sum f_i}\right)^2} = 10\sqrt{\dfrac{104}{100} - \left(\dfrac{-38}{100}\right)^2}$ 5

$= 10\sqrt{(1.04 - 0.38^2)}$

$= 9.46$ 5

$\boxed{40}$

(ii) x_i ලකුණට අනුරූප සත්‍ය ලකුණ $(x_i - 3)$

සත්‍ය මධ්‍යන්‍යය $= \bar{x} - 3 = 50.7 - 3.00$

$= 47.7$ 5

සත්‍ය මාතය $M'_0 = m_0 - 3 = 48.02$

විචලතාව වෙනස් නොවන බැවින්,

සම්මත අපගමනය වෙනස් නොවේ. 5

සම්මත අපගමනය $= 9.46$ 5

15

(iii) $\bar{x} = \dfrac{100 \times 47.7 \times 50 \times 55}{150} = 50.13$ 5

$$\sigma^2 = \frac{1}{n_1 + n_2}\{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2\}$$ 5

$$= \frac{1}{150}\{100 \times 9.46^2 + 50 \times 2.5^2 + \frac{50 \times 100}{150}(7.3)^2\}$$ 5

$$= 73.59$$

$$\sigma = \sqrt{73.59} = 8.58$$ 5

20