

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2016
සංයුක්ත ගණිතය - I පත්‍රය
පිළිතුරු සඳහා මග පෙන්වීම

A කොටස

1. $f(n) = 4^n + 15n - 1$; $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු.

$$n = 1 \text{ විට } f(1) = 4 + 15 - 1 = 18 = 9 \times 2$$

$\therefore f(1)$, 9 න් බෙදේ.

$\therefore n = 1$ ට ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ. (5)

$n = p$, $p \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රකාශනය 9 න් බෙදේ යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $f(p) = 4^p + 15p - 1 = 9k$; $k \in \mathbb{Z}^+$ වේ. (5)

$$f(p+1) = 4^{p+1} + 15(p+1) - 1$$

$$= 4 \cdot 4^p + 15p + 15 - 1$$

$$= 4 [9k - 15p + 1] + 15p + 15 - 1 \quad (5)$$

$$= 4 \times 9k - 45p + 18$$

$$= 9 [4k - 5p + 2]$$

$$= 9 \lambda; \lambda = 4k - 5p + 2 \in \mathbb{Z}^+$$

$\therefore f(p+1)$, 9 න් බෙදේ.

$\therefore n = p+1$ වන විට ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ. (5)

\therefore ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයෙන්, සියලු ධන නිඛිල n සඳහා දී ඇති ප්‍රකාශනය 9 න් බෙදේ. (5)

25

2. $(\sqrt{2} + 7^{\frac{1}{5}})^{10} = \sum_{r=0}^{10} {}^{10}C_r \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10-r} \left(7^{\frac{1}{5}}\right)^r$

$$T_r = {}^{10}C_{r-1} \left(2\right)^{\frac{11-r}{2}} \left(7\right)^{\frac{r-1}{5}}; \text{ මෙහි } 1 \leq r \leq 11 \text{ වේ. (5)}$$

2 හා 7 ප්‍රථමක බැවින්, පරිමේය පද සඳහා $11 - r = 2p$ සහ $r - 1 = 5q$ විය යුතුය. $p, q \in \mathbb{Z}^+$ (5)

එනම් $r \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{1, 6, 11\}$ (5)

$\therefore r = 1$ හෝ 11 වේ. (5)

$$\text{පරිමේය පදවල ඓක්‍යය} = {}^{10}C_0 2^5 + {}^{10}C_{10} 7^2$$

$$= 32 + 49 = 81 \quad (5)$$

25

3. කිසිම සීමාවකින් තොරව 5 දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායමක් තෝරාගත හැකි ආකාර ගණන

$$= {}^{14}C_5$$

$$= 2002 \quad (5)$$

පිරිමි ළමයි 5 දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායම් ගණන

$$= {}^8C_5$$

$$= 56 \quad (5)$$

ගැහැණු ළමයි 5 දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායම් ගණන

$$= {}^6C_5$$

$$= 6 \quad (5)$$

∴ දෙවර්ගමය නියෝජනය වන පරිදි 5 දෙනෙකුගෙන් සමන්විත කණ්ඩායමක් තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන

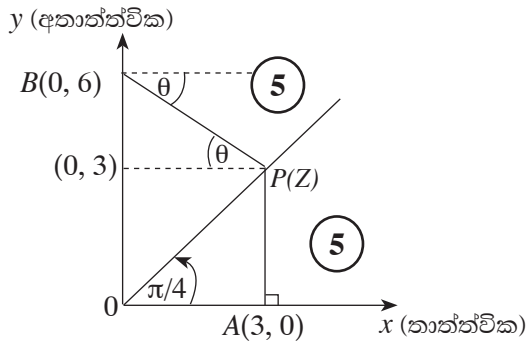
$$= {}^{14}C_5 - ({}^8C_5 + {}^6C_5)$$

$$= 2002 - 56 - 6 \quad (5)$$

$$= 1940 \quad (5)$$

25

4.



$\text{Arg } Z = \frac{\pi}{4}$ සහ $\text{Arg } (Z - 3) = \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි වූ $Z = Z_0$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය රූපයේ පරිදි P වේ. (5) රූපයට අනුව $\theta = \frac{\pi}{4}$ වේ. (5)

එම නිසා $\text{Arg } (Z_0 - 6i) = \frac{7\pi}{4}$ වේ. (5)

25

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+kx)^2 - (1-kx)^2}{\sqrt{1+k^2x} - \sqrt{1-k^2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2kx+k^2x^2 - 1+2kx-k^2x^2}{(1+k^2x) - (1-k^2x)} \times (\sqrt{1+k^2x} + \sqrt{1-k^2x}) \quad (10)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4kx}{2k^2x} (\sqrt{1+k^2x} + \sqrt{1-k^2x}) ; k, x \neq 0$$

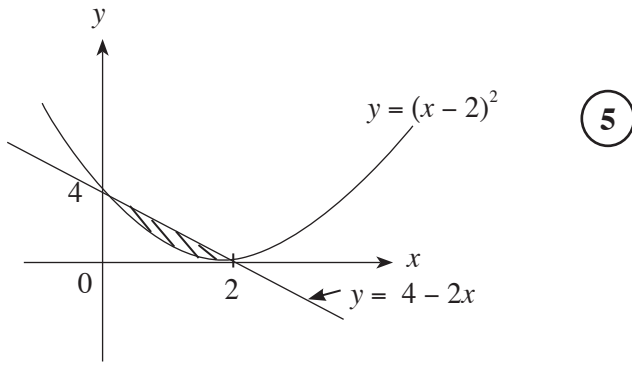
$$= \frac{2}{k} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+k^2x} + \sqrt{1-k^2x}) = \left(\frac{2}{k}\right) \times 2 = \frac{4}{k} \quad (5)$$

$$\frac{4}{k} = 1 \quad (5)$$

$$\therefore k = 4 \quad (5)$$

25

6.



$$\begin{aligned}
 \text{වර්ගඵලය} &= \int_0^2 \{ (4-2x) - (x-2)^2 \} dx && \textcircled{5} \\
 &= \int_0^2 (4-2x) dx - \int_0^2 (x-2)^2 dx \\
 &= \left[4x - \frac{2x^2}{2} \right]_0^2 - \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_0^2 && \textcircled{5} \\
 &= (8-4) - \left[0 + \frac{8}{3} \right] && \textcircled{5} \\
 &= 4 - \frac{8}{3} \\
 &= \frac{4}{3} && \textcircled{5}
 \end{aligned}$$

25

7. t විෂයයෙන් අවකලනයෙන්,

$$\frac{dx}{dt} = 2t \qquad \frac{dy}{dt} = 3at^2 - 2t \qquad \textcircled{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (3at^2 - 2t) \cdot \frac{1}{2t} = \frac{3at - 2}{2} ; t \neq 0 \qquad \textcircled{5}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=1} = \frac{3a - 2}{2}, \qquad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=-1} = \frac{-3a - 2}{2} \qquad \textcircled{5}$$

ස්පර්ශක එකිනෙකට \perp නිසා,

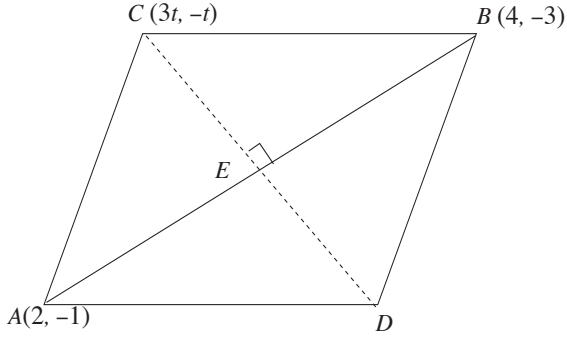
$$\left(\frac{3a - 2}{2} \right) \left(\frac{-3a - 2}{2} \right) = -1 \qquad \textcircled{5}$$

$$9a^2 - 4 = 4 \Rightarrow a^2 = 8/9$$

$$a > 0 \text{ නිසා } a = \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \textcircled{5}$$

25

8.



$$E = (3, -2)$$

AB, CE ට ලම්බක බැවින්

$$m_{AB} \cdot m_{CE} = -1 \text{ වේ.}$$

$$-1 \left(\frac{-2+t}{3-3t} \right) = -1 \quad (5)$$

$$\Rightarrow t = \frac{5}{4} \quad (5)$$

$$\therefore C = \left(\frac{15}{4}, -\frac{5}{4} \right) \quad (5)$$

$D = (\bar{x}, \bar{y})$ ලෙස ගනිමු.

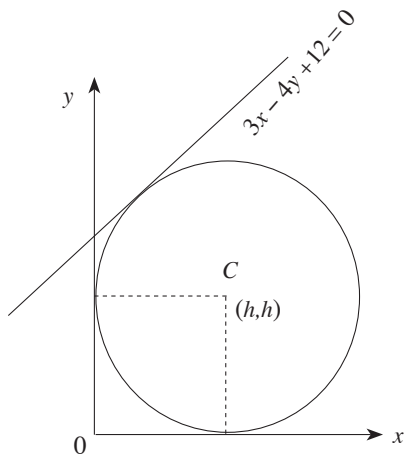
$$\bar{x} = 2 \times 3 - 3t = 6 - 3 \times \frac{5}{4} = \frac{9}{4} \quad (5)$$

$$\bar{y} = 2 \times -2 + t = -4 + \frac{5}{4} = -\frac{11}{4}$$

$$\therefore D = \left(\frac{9}{4}, -\frac{11}{4} \right) \quad (5)$$

25

9.



අවශ්‍ය වෘත්තය $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ යැයි ගනිමු.

වෘත්තය x හා y අක්ෂ ස්පර්ශ කරන බැවින්, $C = (h,h)$ වේ.

5

තවද $3x - 4y + 12 = 0$ රේඛාව වෘත්තය ස්පර්ශ කරන බැවින්

$$\frac{|3h - 4h + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = |h|$$

5

$$|-h + 12| = 5|h|$$

5

$$\Leftrightarrow (-h + 12) = \pm 5h$$

5

$\therefore h = -3$ හෝ $h = 2$ වේ.

\therefore වෘත්තවල සමීකරණ

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

$$(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$$

5

25

10. $\cot \alpha - \tan \alpha$

$$= \frac{1}{\tan \alpha} - \tan \alpha$$

$$= \frac{1 - \tan^2 \alpha}{\tan \alpha}$$

$$= \frac{2(1 - \tan^2 \alpha)}{2 \tan \alpha} = \frac{2}{\tan 2\alpha}$$

$$= 2 \cot 2\alpha$$

5

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

$$\therefore \cot 2\alpha - \tan 2\alpha = 2 \cot 4\alpha \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

5

$$\cot 4\alpha - \tan 4\alpha = 2 \cot 8\alpha \quad \text{-----} \quad \textcircled{3}$$

5

$$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2} + 4 \times \textcircled{3} \quad \text{මගින්,}$$

$$\cot \alpha - \tan \alpha - 2 \tan 2\alpha - 4 \tan 4\alpha = 8 \cot 8\alpha$$

10

$$\cot \alpha = \tan \alpha + 2 \tan 2\alpha + 4 \tan 4\alpha + 8 \cot 8\alpha$$

25

11. (a) $ax^2 + bx + c = 0$

$$a \left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right] = 0$$

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = 0$$

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} \right] = 0 \quad (10)$$

සමපාත මූල තිබීම සඳහා $b^2 - 4ac = 0$ විය යුතුයි. (10)

$$\frac{a}{x+c} + \frac{b}{x-c} = \frac{k}{2x}$$

$$\frac{a(x-c) + b(x+c)}{x^2 - c^2} = \frac{k}{2x}$$

$$x^2[k - 2a - 2b] - 2(bc - ac)x - kc^2 = 0 \quad (10)$$

සමපාත මූල තිබීමට නම්

$$4(bc - ac)^2 - 4(k - 2a - 2b)(-kc^2) = 0 \text{ විය යුතුයි.} \quad (10)$$

$$\text{එනම් } k^2 - 2(a+b)k + (b-a)^2 = 0 \quad (5)$$

මෙහි මූල k_1 හා k_2 නම්,

$$k_1 + k_2 = 2(a+b) \quad (5) \quad k_1 k_2 = (b-a)^2 \quad (5)$$

$$(k_1 - k_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 - 4k_1 k_2 \quad (10)$$

$$= 4(a+b)^2 - 4(b-a)^2$$

$$= 16ab$$

$$\therefore |k_1 - k_2| = 4\sqrt{ab} \quad (10)$$

20

55

(b) $f(x) = (\lambda + 1)x^2 + (6 - 3\lambda)x + (20 - 12\lambda)$

(i) $\lambda = -1$ විට $f(x)$ ඒකජ වේ. (5)

(ii) මූල දෙක α සහ $-\alpha$ ලෙස ගනිමු. (5)

$$\text{එවිට } \alpha + (-\alpha) = -\frac{(6 - 3\lambda)}{(\lambda + 1)} \quad (5)$$

$$\therefore 0 = 6 - 3\lambda \Rightarrow \lambda = 2. \quad (5)$$

(iii) $f(x) = h - b(x - a)^2 = h - b(x^2 - 2ax + a^2) = -bx^2 + 2abx + (h - ba^2)$

$f(x) = (\lambda + 1)x^2 + (6 - 3\lambda)x + (20 - 12\lambda)$ (5)

සංගුණක සැසඳීමෙන්, $-b = \lambda + 1 \Rightarrow b = -(\lambda + 1)$ (1) (5)

$2ab = 6 - 3\lambda \Rightarrow a = -\frac{3(2 - \lambda)}{2(\lambda + 1)}$ (2) (5)

$h - ba^2 = 20 - 12\lambda \Rightarrow h = 4(5 - 3\lambda) - \frac{9(2 - \lambda)^2}{4(\lambda + 1)}$ (3) (10)

$x = 2$ වන විට $f(x)$ උපරිමයක් වන බැවින් $a = 2$ වේ. (5)

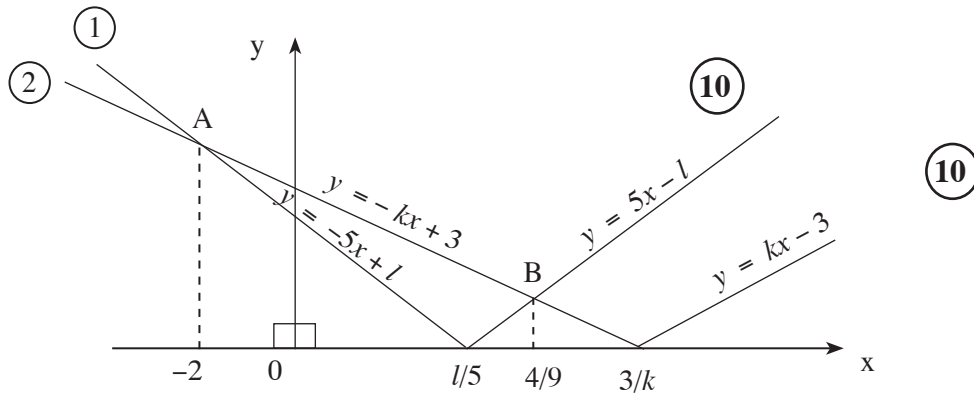
(2) $\Rightarrow 4(\lambda + 1) = -(6 - 3\lambda) \Rightarrow 4\lambda + 4 = -6 + 3\lambda \Rightarrow \lambda = -10$ (5)

$h = 4(5 + 30) - \frac{9(2 + 10)^2}{4(-10 + 1)}$ (10)

$f(x)$ හි උපරිම අගය = 176 (10)

75

12. (a) $|l - 5x| < |kx - 3|$ හි විසඳුම් කුලකය $\{x \mid -2 < x < 4/9\}$ බැවින් ප්‍රස්ථාර දෙක පහතින් දැක්වෙන පරිදි පිහිටයි.



(1) $y = |l - 5x|$

(2) $y = |kx - 3|$

A ලක්ෂ්‍යය සඳහා $l + 10 = 2k + 3$ (5)
 $l - 2k = -7$ (i) (5)

B ලක්ෂ්‍යය සඳහා $-l + 5 \cdot \frac{4}{9} = -k \cdot \frac{4}{9} + 3$ (5)
 $-9l + 4k = 7$ (ii) (5)

(i) සහ (ii) මගින් $l = 1$, (5) $k = 4$ (5)

50

$$(b) \quad S_n = \frac{3n}{2n+1} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2} \quad (5)$$

පරිමිත වේ. (5)

∴ එම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. (5)

$$U_r = S_r - S_{r-1} \quad (5)$$

$$= \frac{3r}{2r+1} - \frac{3(r-1)}{2r-1} \quad (5)$$

$$U_r = \frac{3}{4r^2-1} \quad (5)$$

$$S'_n = \sum_{r=1}^n r^2 \frac{3}{4r^2-1} \quad \text{ලෙස ගනිමු.} \quad (5)$$

$$= \sum_{r=1}^n \frac{\frac{3}{4}(4r^2-1) + \frac{3}{4}}{(4r^2-1)} \quad (5)$$

$$= \sum_{r=1}^n \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^n \frac{3}{4r^2-1} \quad (10)$$

$$= \frac{3n}{4} + \frac{1}{4} S_n \quad (5)$$

(5)

$$= \frac{3n}{4} + \frac{1}{4} \frac{3n}{(2n+1)} \quad (5)$$

$$= \frac{3n}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2n+1} \right\} \quad (5)$$

$$= \frac{3n(n+1)}{2(2n+1)} \quad (5)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n r^2 U_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2n+1} \right\} \quad (5)$$

$$= \infty \quad (5)$$

පරිමිත නොවේ. (5)

∴ එම ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවේ. (5)

13. (a) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & p \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2p$ (5)

A^{-1} පැවතීමට $\det A \neq 0$.

එනම්, $p \neq 9/2$ විය යුතුය. (5)

$$A^{-1} = \frac{1}{(2p-9)} \begin{bmatrix} -3 & -p \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$A^{-1} = A$$

$$\frac{1}{(2p-9)} \begin{bmatrix} -3 & -p \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & p \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

අනුරූප අවයවයන් සැසඳීමෙන්,

$$-\frac{3}{2p-9} = 3 \quad \frac{-p}{2p-9} = p \quad (5)$$

$$\frac{2}{2p-9} = -2, \quad \frac{3}{2p-9} = -3 \quad (5)$$

$$(5)$$

$$(5)$$

$$\Rightarrow 2p-9 = -1 \text{ and } p[1+2p-9] = 0$$

$p \neq 0$ බැවින් $p = 4$ විය යුතුය. (5)

එවිට, $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = A$$

$$\Rightarrow AA^{-1} = A \cdot A = A^2 \quad (5)$$

$$\therefore I = A^2$$

$$\Rightarrow 0 = A^2 - I$$

$$\Rightarrow 0 = (A - I)(A + I); I^2 = I \quad (5)$$

එනම් $0 = BC$ ආකාරය ගනී.

$$\text{මෙහි } B = A - I = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(5)$$

සඳ

$$C = A + I = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{5}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \textcircled{5}$$

75

(b) (i) Let $Z = x + iy$, යැයි ගනිමු. $x, y \in \mathbb{R}$ $\textcircled{5}$

$$\overline{ZZ} = (x + iy)(x - iy)$$

$$= x^2 + y^2 \textcircled{5}$$

$$= (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |Z|^2$$

$$\therefore Z\overline{Z} = |Z|^2 \text{ වේ.}$$

10

(ii) Let $Z_1 = x_1 + iy_1$ ද $Z_2 = x_2 + iy_2$ ද යැයි ගනිමු. $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ වේ.

$$Z_1 Z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \textcircled{5}$$

$$\therefore \overline{Z_1 Z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$= x_1(x_2 - iy_2) - iy_1(-iy_2 + x_2)$$

$$= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \textcircled{5}$$

$$\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1} \overline{Z_2} \text{ වේ.}$$

10

(iii) $\left| \frac{\overline{Z_1} - 2\overline{Z_2}}{2 - Z_1 \overline{Z_2}} \right| = 1$

$$\Rightarrow |\overline{Z_1} - 2\overline{Z_2}| = |2 - Z_1 \overline{Z_2}| \textcircled{5}$$

$$\Rightarrow |\overline{Z_1} - 2\overline{Z_2}|^2 = |2 - Z_1 \overline{Z_2}|^2 \textcircled{5}$$

$$\Rightarrow (\overline{Z_1} - 2\overline{Z_2}) (\overline{\overline{Z_1} - 2\overline{Z_2}}) = (2 - Z_1 \overline{Z_2}) (\overline{2 - Z_1 \overline{Z_2}}) \textcircled{5}$$

$$\Rightarrow (\overline{Z_1} - 2\overline{Z_2}) (Z_1 - 2Z_2) = (2 - Z_1 \overline{Z_2}) (2 - \overline{Z_1} Z_2) \textcircled{5}$$

$$Z_1 \bar{Z}_1 - 2 \bar{Z}_1 Z_2 - 2 \bar{Z}_2 Z_1 + 4 Z_2 \bar{Z}_2 = 4 - 2 \bar{Z}_1 Z_2 - 2 Z_1 \bar{Z}_2 + Z_1 \bar{Z}_1 Z_2 \bar{Z}_2 \quad (5)$$

$$|Z_1|^2 + 4|Z_2|^2 = 4 + |Z_1|^2 |Z_2|^2$$

$$|Z_1|^2 + 4|Z_2|^2 - |Z_1|^2 \cdot |Z_2|^2 - 4 = 0$$

$$|Z_1|^2 (1 - |Z_2|^2) - 4 (1 - |Z_2|^2) = 0$$

$$(1 - |Z_2|^2) (|Z_1|^2 - 4) = 0 \quad (5)$$

$$|Z_2| \neq 1, \text{ නිසා } |Z_1|^2 - 4 = 0$$

$$\therefore |Z_1|^2 = 4$$

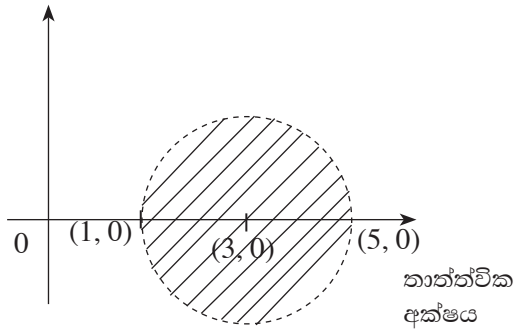
$$|Z_1| > 0, \text{ නිසා } |Z_1| = 2 \quad (5)$$

35

(c)

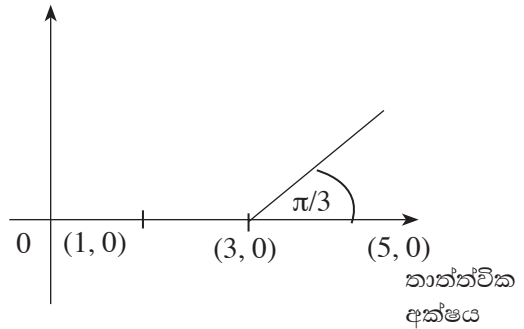
$$|Z - 3| < 2$$

අතාත්තවික අක්ෂය



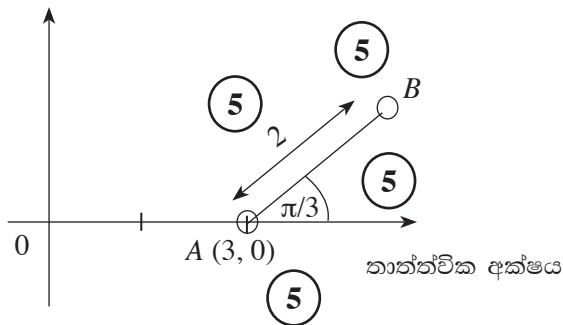
$$\text{Arg}(Z - 3) = \frac{\pi}{3}$$

අතාත්තවික අක්ෂය



$|Z - 3| < 2$ සහ $\text{Arg}(Z - 3) = \frac{\pi}{3}$; යන දෙකම තෘප්ත කරන P හි පථය

අතාත්තවික අක්ෂය



20

14. (a) $y = (\sin x)^x \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\ln y = x \ln |\sin x|$ (10)

$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln |\sin x| + x \cot x$ (10)

$\frac{dy}{dx} = [x \cot x + \ln (\sin x)] (\sin x)^x$ (5)

25

(b) ටැංකියේ පරිමාව $= \pi x^2 y + \frac{2}{3} \pi x^3$

$\therefore \pi x^2 y + \frac{2}{3} \pi x^3 = 45\pi$ (5)

$\therefore 45 = x^2(y + \frac{2}{3} x)$

$y = \frac{45}{x^2} - \frac{2}{3}x$ (5)

ටැංකියේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය

$A = 2\pi x^2 + \pi x^2 + 2\pi xy$ (10)

$A = 3\pi x^2 + 2\pi xy$

$A = 3\pi x^2 + 2\pi x \left(\frac{45}{x^2} - \frac{2}{3}x \right)$

$A = 3\pi x^2 + \frac{90\pi}{x} - \frac{4\pi}{3} x^2$

$A = \frac{5\pi}{3} x^2 + \frac{90\pi}{x}$ (5)

$\frac{dA}{dx} = \frac{10\pi x}{3} - \frac{90\pi}{x^2}$ (5)

$= \frac{10\pi (x^3 - 27)}{3x^2}$

$= \frac{10\pi}{3x^2} (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ (5)

$x = 3$ වන විට $\frac{dA}{dx} = 0$ වේ. (5)

x	$0 < x < 3$	$3 < x$
$\frac{dA}{dx}$	< 0	> 0

(5)

$\therefore x = 3$ විට පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය අවම වේ. (5)

$y = \frac{45}{9} - \frac{6}{3}$

$= 3$ (5)

55

(c) $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)}$

$f(0) = 2$ බැවින්,

$a + b = 2$ _____ (1) (5)

$f'(x) = -\frac{2a}{(x-1)^3} - \frac{b}{(x+1)^2}$ (5)

$f'(0) = 0$ බැවින්,

$2a - b = 0$ _____ (2) (5)

(1) හා (2) න් $a = \frac{2}{3}, b = \frac{4}{3}$ (5)

$f'(x) = -\frac{4}{3} \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{4}{3(x+1)^2}$ (5)

$= -\frac{4}{3} \left\{ \frac{(x+1)^2 + (x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)^2} \right\}$

$= -\frac{4}{3} \left[\frac{x^3 - 2x^2 + 5x}{(x-1)^3(x+1)^2} \right]$

$= -\frac{4x}{3} \left[\frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^3(x+1)^2} \right]$

$= -\frac{4x}{3} \left[\frac{(x-1)^2 + 4}{(x-1)^3(x+1)^2} \right]$

සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $(x-1)^2 + 4 > 0$ බැවින්, $x = 0$ නම්ම පමණක් $f'(x) = 0$ වේ. (5)

x	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$f'(x)$	< 0	< 0	> 0	< 0
	f අඩුවේ.	f අඩුවේ.	f වැඩිවේ.	f අඩුවේ.

(10)

$x = 0$ දී f ශ්‍රිතයට ස්ථානීය අවමයක් පවතී. (5)

එවිට $f(0) = 2$ වේ.

$x \longrightarrow \pm \infty$ විට $f(x) \longrightarrow 0$

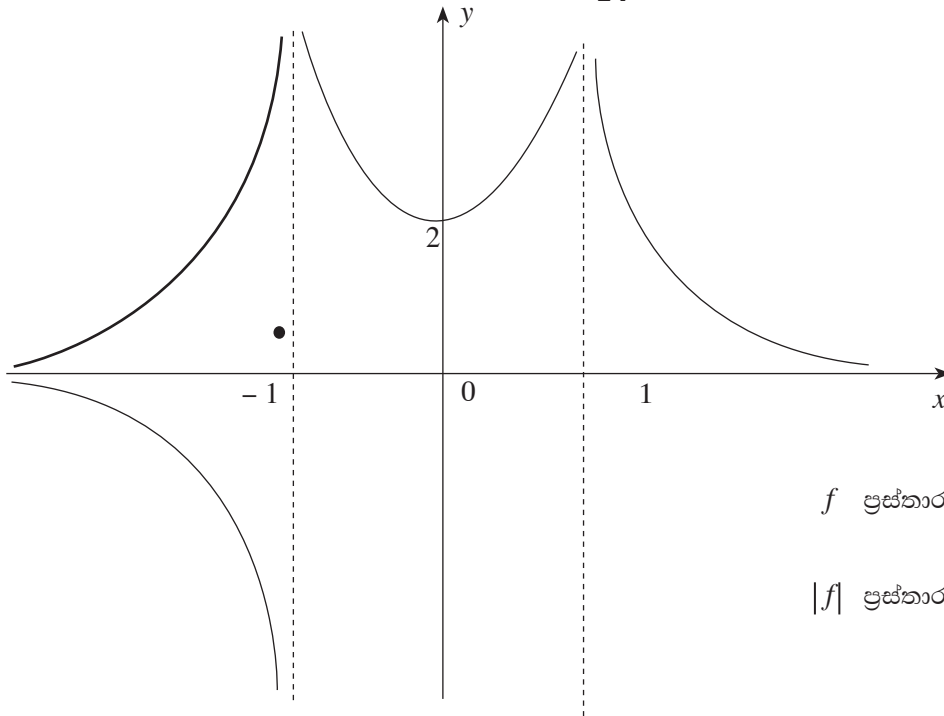
$x \longrightarrow -1^-$, $f(x) \longrightarrow -\infty$

$x \longrightarrow -1^+$, $f(x) \longrightarrow +\infty$

$x \longrightarrow 1^-$, $f(x) \longrightarrow +\infty$

$x \longrightarrow 1^+$, $f(x) \longrightarrow +\infty$

(10)



f ප්‍රස්ථාරය (10)

$|f|$ ප්‍රස්ථාරය (5)

70

15. (a) $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)^{1/2} (2-x)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{dx}{(4-x^2)^{1/2} (2-x)}$

$x = 2 \sin \theta$ ආදේශයෙන්, (5)

$dx = 2 \cos \theta d\theta$ (5)

$x = 0, \sin \theta = 0$

$\theta = 0$

$x = 1, \sin \theta = \frac{1}{2}$ (5)

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$I = \int_0^{\pi/6} \frac{2 \cos \theta}{(4 - 4 \sin^2 \theta)^{1/2} (2 - 2 \sin \theta)} d\theta$ (5)

$= \int_0^{\pi/6} \frac{2 \cos \theta}{2 \cos \theta \cdot 2(1 - \sin \theta)} d\theta$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \sec^2 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \sec \theta \tan \theta d\theta$ (5)

(5)

$= \frac{1}{2} [\tan \theta]_0^{\pi/6} + \frac{1}{2} [\sec \theta]_0^{\pi/6}$ (5)

(5)

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right] = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

(5)

(5)

50

(b) $G(x) = \frac{A}{(x+2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+8)}$ (5)

$$1 = A(x^2+8) + (Bx+C)(x+2)$$
 (5)

$$\left. \begin{aligned} x^2 \text{ සංගුණක} : 0 &= A + B &\Rightarrow A = -B \\ x \text{ සංගුණක} : 0 &= 2B + C &\Rightarrow C = -2B \end{aligned} \right\}$$
 (5)

නියතය : $1 = 8A + 2C$ (5)

$$1 = -8B - 4B \Rightarrow 12B = -1$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{12}$$
 (5)

$$A = \frac{1}{12}, C = \frac{1}{6}$$

(5)

(5)

$$g(x) = \int \frac{1}{(x+2)(x^2+8)} dx$$

$$g(x) = \frac{1}{12} \int \frac{1}{(x+2)} dx - \frac{1}{12} \int \frac{x}{(x^2+8)} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{(x^2+8)} dx$$
 (5)

$$= \frac{1}{12} \ln|x+2| - \frac{1}{24} \ln(x^2+8) + \frac{1}{6} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} \right) + C$$
 (5)

$$= \frac{1}{24} \ln \left[\frac{(x+2)^2}{x^2+8} \right] + \frac{1}{6} \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} \right) + C$$
 (5) (5)

$$= \frac{1}{24} \ln \left[\frac{(x+2)^2}{x^2+8} \right] + \frac{1}{12\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} \right) + C$$
 (5)

60

$$\begin{aligned}
 (c) \quad I_n &= \int x^n \sin x \, dx \\
 &= \int -x^n \frac{d}{dx} (\cos x) && (5) \\
 &= [-x^n \cos x] + \int (\cos x) nx^{n-1} dx && (10) \\
 &= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \frac{d}{dx} (\sin x) && (5) \\
 &= -x^n \cos x + n \left\{ x^{n-1} \sin x - \int \sin x (n-1) x^{n-2} dx \right\} && (10) \\
 &= -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1) I_{n-2} && (5) \\
 I_n + n(n-1) I_{n-2} &= x^{n-1} [n \sin x - x \cos x] && (5)
 \end{aligned}$$

40

16. (a)

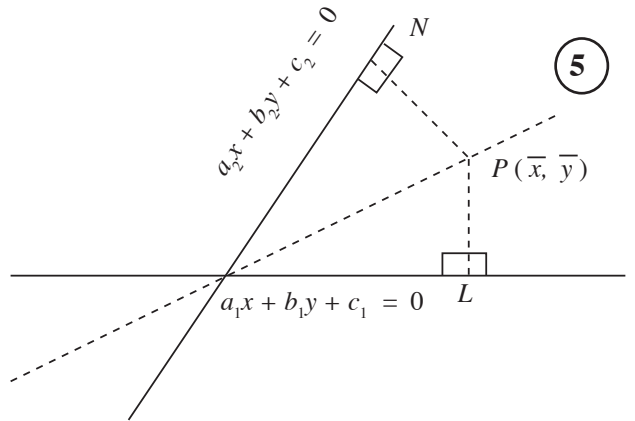
ඕනෑම කෝණ සමච්ඡේදකයක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් $P(\bar{x}, \bar{y})$ නම්

$$PL = PN \quad (5)$$

$$\frac{|a_1 \bar{x} + b_1 \bar{y} + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2 \bar{x} + b_2 \bar{y} + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{a_1 \bar{x} + b_1 \bar{y} + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 \bar{x} + b_2 \bar{y} + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (5)$$

$\bar{x} \rightarrow x, \bar{y} \rightarrow y$ ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන් (5)



කෝණ සමච්ඡේදක රේඛාවල සමීකරණ

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (5)$$

කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණය

$$\frac{4x + y + 3}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \pm \frac{x + 4y - 3}{\sqrt{4^2 + 1^2}} \quad (5)$$

$$+ : 3x - 3y + 6 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0 \quad (5)$$

$$- : 5x + 5y = 0 \Rightarrow x + y = 0$$

$x + y = 0$ සහ $x - y + 2 = 0$ විසඳීමෙන්

$x = -1, y = 1$ (5)

$A = (-1, 1)$ යැයි ගනිමු.

$B = (0, 2), x - y + 2 = 0$ මත පිහිටයි. (5)

$P = (x, y)$ යනු $x + y = 0$ මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ලෙස ගනිමු.

$PA \perp PB$ බැවින්

$\left(\frac{y-1}{x+1}\right) \times 1 = -1$ (5)

$\frac{y-1}{-1} = \frac{x+1}{1} = t; t$ යනු පරාමිතියකි (5)

$\therefore x = -1 + t, y = 1 - t$

$x + y = 0$ මත $AD = AB$ වන පරිදි

D ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප පරාමිතිය T ලෙස ගනිමු.

එවිට $D = (-1 + T, 1 - T)$ (5)

$AD^2 = AB^2 \Rightarrow T^2 + T^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ (5)

$T = \pm 1$ (5)

$\therefore D = (0, 0)$ හෝ $(-2, +2)$
(5) (5)

$D \equiv (0, 0)$ විට CD සමීකරණය

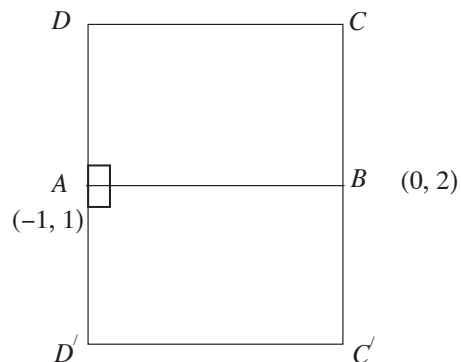
$x - y = 0$ (5)

$D' \equiv (-2, +2)$ විට $C'D'$ සමීකරණය

$x - y + 4 = 0$ (5)

BC සහ BC' රේඛාවන්හි සමීකරණය

$x + y - 2 = 0$ (5)



(b) $S^1 = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ යැයි ගනිමු. මෙහි g, f, c නියත වේ.

5

$S^1 = 0$ න් $S = 0$ සමවිෂේද වන නිසා,

$S^1 - S = 0$ ඊර්ධාව මත $S = 0$ හි කේන්ද්‍රය පිහිටයි.

5

$-2x(g + 1) - 2y(f - 2) - 3 - c = 0$

5

$\therefore 2(g)(g + 1) + 2(f)(f - 2) - c - 3 = 0$

1

5

$S = 0$ වෘත්තය $(1, 1)$ හරහා යන බැවින්

$1^2 + 1^2 + 2g + 2f + c = 0$

$\therefore c = -2g - 2f - 2$

2

5

1 න් හා 2 න්

$2g^2 + 2g + 2f^2 - 4f - (-2g - 2f - 2) - 3 = 0$

$2g^2 + 2f^2 + 4g - 2f - 1 = 0$

$2(-g)^2 + 2(-f)^2 - 4(-g) + 2(-f) - 1 = 0$

5

$\therefore (-g, -f)$ ලක්ෂ්‍යය $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටයි.

5

මෙහි කේන්ද්‍රය $(1, -\frac{1}{2})$

5

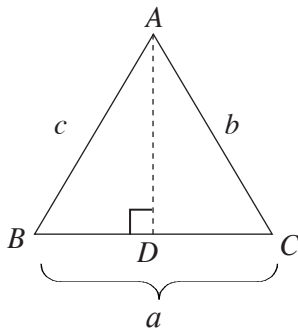
අරය $= \sqrt{1^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{4}}$

$= \frac{\sqrt{7}}{2}$

5

50

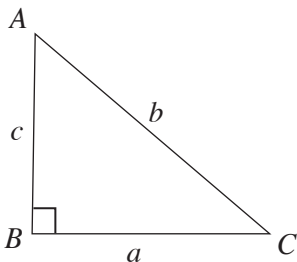
17. (a)



$a = BC = BD + DC$

$a = c \cos B + b \cos C$

5

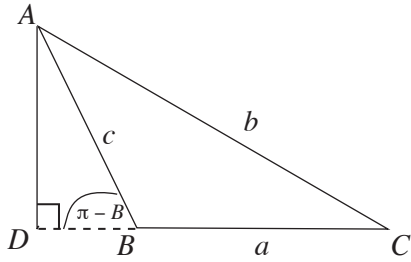


$a = b \cos C + 0$

$= b \cos C + c \cos 90^\circ$

$= b \cos C + c \cos B$

5



$$\begin{aligned} a &= BC = CD - BD \\ &= b \cos C - c \cos (\pi - B) \\ &= b \cos C + c \cos B \end{aligned}$$

(5)

එපරිදීම $b = a \cos C + c \cos A$

$$a \cos C = b - c \cos A$$

$$a^2 \cos^2 C = b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A \quad (10)$$

$$a^2 - a^2 \sin^2 C = b^2 + c^2 - 2bc \cos A - c^2 \sin^2 A$$

$$\underbrace{a^2 + c^2 \sin^2 A - a^2 \sin^2 C}_{= 0} = b^2 + c^2 - 2bc \cos A ; \therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \text{ නිසා}$$

(5)

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

a, b, c සමාන්තර ශ්‍රේණියක නම්

$$a + c = 2b \quad (5)$$

$$b \cos C + c \cos B + a \cos B + b \cos A = 2b \quad (5)$$

$$\cos A + \cos C + 2 \cos B = 2$$

$$2 \cos \left(\frac{A+C}{2} \right) \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 2(1 - \cos B)$$

(5)

$$2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 4 \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$\cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = 2 \sin \frac{B}{2} \quad (5)$$

50

(b) $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$

$$\therefore 0 < \frac{\pi}{2} - y < \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$\sin x > \cos y = \sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \quad (5)$$

$$\sin x > \sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right)$$

$\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ වසම තුළ කෝණය වැඩි වන විට සයින් අගය වැඩි වන නිසා, (10)

$$\therefore x > \frac{\pi}{2} - y \quad (5)$$

25

$$x + y > \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad f(x) &= 3 \cos^2 x + 8 \sin x \cos x - 3 \sin^2 x \\
 &= 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (5) \\
 &= 5 \left(\frac{3}{5} \cos 2x + \frac{4}{5} \sin 2x \right) \quad (5) \\
 &= 5(\sin \alpha \cos 2x + \cos \alpha \sin 2x) \\
 &= 5 \sin(2x + \alpha) \\
 &= A \sin(2x + \alpha) \quad (5)
 \end{aligned}$$

මෙහි $A = 5$, α යනු $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ වන පරිදි වූ සුළු කෝණයයි. (5)

$$f(x) = \frac{5}{2}$$

$$5 \sin(2x + \alpha) = \frac{5}{2}$$

$$\sin(2x + \alpha) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

$$2x + \alpha = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

$$x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}, \text{ මෙහි } n \in \mathbb{Z}$$

(5)

$$f(x) = 5 \sin(2x + \alpha)$$

$$f(x) \text{ උපරිම} = 5; x = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

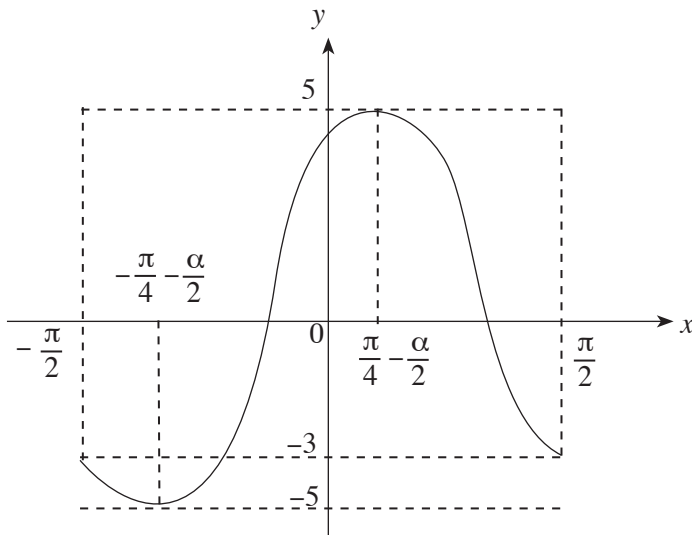
(5)

(5)

$$f(x) \text{ අවම} = -5; x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \quad (\alpha < \frac{\pi}{4} \text{ නිසා})$$

(5)

(5)



(15)

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2016
සංයුක්ත ගණිතය - II පත්‍රය
පිළිතුරු සඳහා මග පෙන්වීම

A කොටස

1. m ට \downarrow $v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්

$$v^2 = 2gh$$

$$\therefore v = \sqrt{2gh}$$

(5)

$I = \Delta(mv)$ යෙදීම ;

\downarrow P හා m ට

$$-J = (2m + m)v_1 - mv - 2m \times 0$$

(5)

$$\therefore -J = 3mv_1 - mv \quad \text{--- (1)}$$

Q ට \uparrow

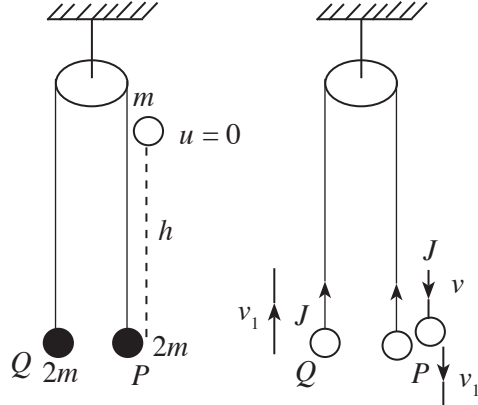
$$J = 2mv_1 - 0 \quad \text{--- (2) (5)}$$

(1) හා (2) න්

$$v_1 = \frac{v}{5} = \frac{\sqrt{2gh}}{5} \quad \text{(5)}$$

$$J = \frac{2m}{5} \sqrt{2gh} \quad \text{(5)}$$

25



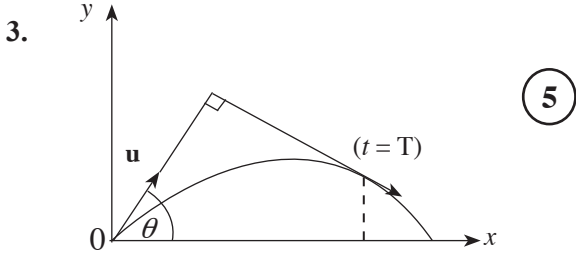
2. තත්පරයකදී පිටකරන ජල පරිමාව = $8 (0.005) \text{ m}^3$
= 0.040 m^3 (5)

තත්පරයකදී පිටකරන ජල ස්කන්ධය = $10^3 \times 0.040 \text{ kg}$
= 40 kg (5)

තත්පරයකදී පොම්පය මගින් කෙරෙන කාර්යය = $mgh + \frac{1}{2} mv^2$
= $(40 \times 10 \times 4) + \frac{1}{2} \times 40 \times 8^2$ (5) (5)
= 2880 js^{-1}

\therefore පොම්පයේ ඝෂමතාවය = 2880 W (5)

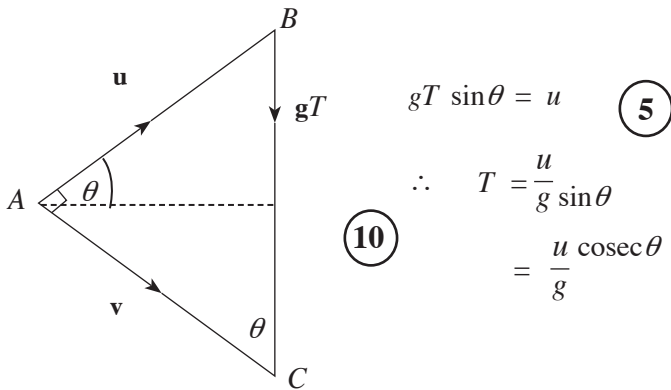
25



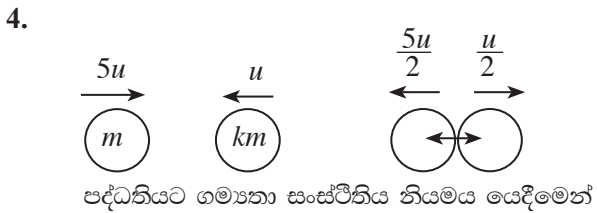
$$t = T \text{ විට,}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{g}T \quad (5)$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$



25



පද්ධතියට ගම්‍යතා සංස්ථිතිය නියමය යෙදීමෙන්

$$\longrightarrow 5mu - kmu = \frac{kmu}{2} - \frac{5mu}{2} \quad (5)$$

$$10 - 2k = k - 5$$

$$\therefore k = 5 \quad (5)$$

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂාණාත්මක නියමයෙන්

$$\frac{u}{2} + \frac{5u}{2} = e(u + 5u) \quad (5)$$

$$3u = 6ue$$

$$\frac{1}{2} = e \quad (5)$$

$$I = \Delta(mv) = -m \cdot \frac{5u}{2} - m \cdot 5u$$

$$\longrightarrow -I = \frac{15mu}{2} \quad (5)$$

25

5. $\underline{a} \perp \underline{b}$ නිසා $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ (5)

$\therefore (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot (\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j}) = 0$
 $2\lambda + 3\mu = 0$ (1) (5)

$|\underline{b}| = 1$ නිසා $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ (2) (5)

(1) හා (2) $\mu = \pm \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\mu > 0$ නිසා $\mu = \frac{2}{\sqrt{13}}$ (5)

(1) න්, $\lambda = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ (5)

25

6. වස්තුව සීමාකාරී අවස්ථාවේ පවතින විට වේ. ලාම් ප්‍රමේයයෙන්,

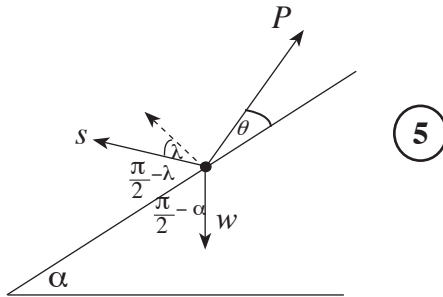
$\frac{P}{\sin[\pi - (\alpha + \lambda)]} = \frac{w}{\sin[\frac{\pi}{2} - (\theta - \lambda)]}$ (5)

$P = \frac{w \sin(\lambda + \alpha)}{\cos(\theta - \lambda)}$ (5)

P අඩුතම විට $\cos(\theta - \lambda)$ උපරිම විය යුතුය.

එනම් $\theta = \lambda$ (5)

$\therefore P$ (අඩුතම) = $w \sin(\lambda + \alpha)$ (5)



25

7. $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$ යැයි ගනිමු.

(A) \rightarrow 1st (පළමුවන) (B) \rightarrow 2nd (දෙවන)

(i) $X = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$ (5)

නමුත් $(A \cap B') \cap (A' \cap B) = \phi$

$\therefore P(X) = P(A \cap B') + P(A' \cap B)$
 $= P(A) P(B') + P(A') P(B)$ (5)

$= \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{4}$
 $= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{12}$ (5)

(ii) $P(A|X) = \frac{P(A \cap X)}{P(X)} = \frac{P(A) P(B')}{P(X)}$ (5)

$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$ (5)

(\because III වන ප්‍රත්‍යක්ෂය)
(ස්වායත්ත බැවින්)

25

8. $P(A \cap B') = 0.2, P(A' \cap B) = 0.1$ (5)

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 0.6$$
$$1 - P(A \cup B) = 0.6$$
$$P(A \cup B) = 0.4$$
 (5)
$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.1$$
$$\therefore P(A \cap B) = 0.4 - 0.3 = 0.1$$
 (5)
$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$0.1 + 0.1 = P(B)$$
 (5)
$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.2}$$
$$= \frac{1}{2}$$
 (5)

25

9. $\bar{x} = 5$ සහ $s_x = 2$

(i) $y_i \in \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

$y_i = x_i + 10$ යැයි ගනිමු.

මෙහි $x_i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$\therefore \bar{y} = \bar{x} + 10 = 5 + 10 = 15$$
 (5)

සහ $s_y = s_x = 2$

(ii) $y_i \in \{20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$

$y_i = 10x_i$ යැයි ගනිමු.

මෙහි $x_i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$\therefore \bar{y} = 10\bar{x}$$
 (5)
$$= 10 \times 5 = 50$$
 (5)

සහ $s_y = 10s_x = 10 \times 2 = 20$

(iii) $y_i = ax_i + b$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\bar{y} = a\bar{x} + b = 5a + b$ (5)

$$s_y^2 = a^2 s_x^2$$
$$s_y = |a| s_x$$
 (5)
$$= 2|a|$$
 (5)

25

10.

u_i	-3	-2	-1	0	1	2
f_i	5	10	25	30	20	10
$f_i u_i$	-15	-20	-25	0	20	20

(5)

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = -\frac{20}{100} = -\frac{1}{5}$$

$$u_i = \frac{x_i - 35}{a}$$

(5)

$$\therefore \bar{x} = a\bar{u} + 35$$

$$33 = -\frac{a}{5} + 35$$

(5)

$$a = 10$$

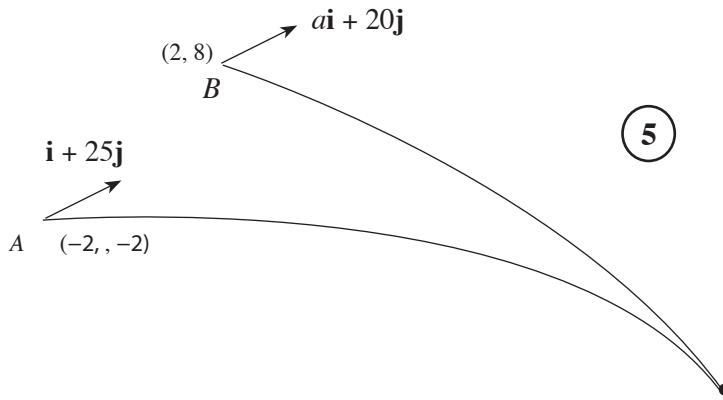
(5)

ප්‍රාන්තර	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
f_i	5	10	25	30	20	10

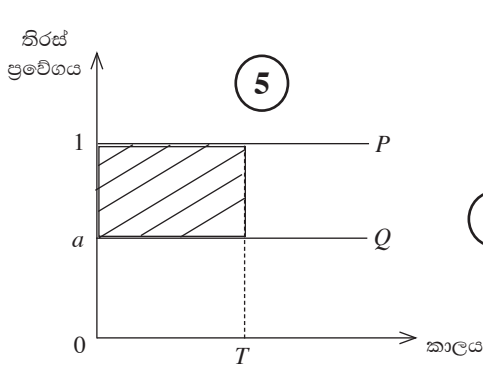
(5)

25

11. (a)

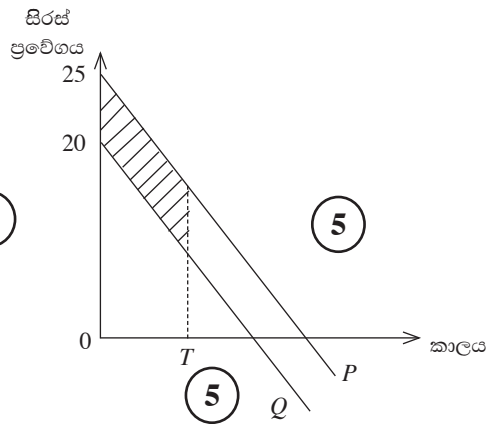


(5)



(5)

(5)



(5)

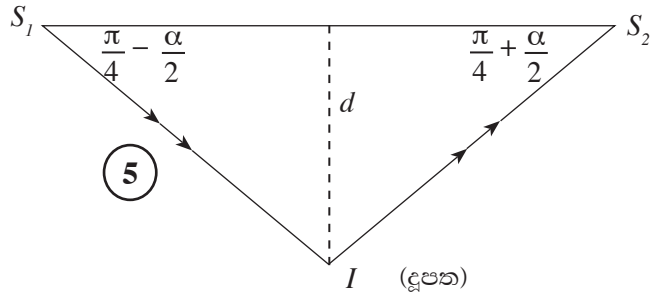
(5)

හමුවීම සඳහා

$$P \text{ හි සිරස් විස්ථාපනය} = Q \text{ හි සිරස් විස්ථාපනය} + 10$$

$$P \text{ හි සිරස් විස්ථාපනය} - Q \text{ හි සිරස් විස්ථාපනය} = 10$$

(10)



ගමනට ගතවන මුළු කාලය t නම්,

$$t = \frac{S_1 I}{AC_1} + \frac{S_2 I}{AC_2} \quad (5)$$

$$= \frac{S_1 I \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}{AC_1 \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})} + \frac{S_2 I \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2})}{AC_2 \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2})} \quad (10)$$

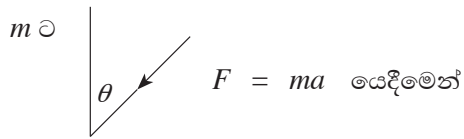
$$= \frac{d}{v \cos \alpha} + \frac{d}{v \cos \alpha} = \frac{2d}{u \cos \alpha} \quad (\because v = u) \quad (5)$$

90

12. (a) m ට ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්,

$$\frac{1}{2} mu^2 - mga = mga \cos \theta + \frac{1}{2} mv^2 \quad (15)$$

$$v^2 - u^2 + 2ga(1 + \cos \theta) = 0 \quad (1) \quad (5)$$



$$R + mg \cos \theta = \frac{mv^2}{a} \quad (2)$$

(1) න් (2) ට ආදේශයෙන් (5)

$$R + mg \cos \theta = \frac{m}{a} [u^2 - 2ga(1 + \cos \theta)]$$

$$R = \frac{mu^2}{a} - mg(2 + 3 \cos \theta)$$

OA උඩු සිරස සමග සාදන කෝණය α වන විට අංශුව පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වේ නම්, එවිට $R = 0$ වේ. (5)

$$\therefore u^2 - 2ga - 3ga \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

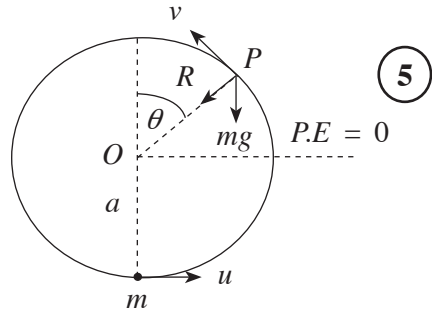
$$\cos \alpha = \frac{u^2 - 2ga}{3ga} > 0 \quad (\because u^2 > 2ga)$$

$\therefore \alpha$ සුළු කෝණයක් වේ.

තවද $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ වන නිසා $0 < \cos \alpha < 1$ වේ.

$$\frac{u^2 - 2ga}{3ga} < 1 \quad (5)$$

$$u^2 < 5ga$$



m ස්කන්ධය පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වන විට $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ වේ.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{u^2 - 2ga}{3ga}$$

$$u^2 - 2ga = \sqrt{3} ga$$

$$u^2 = (2 + \sqrt{3}) ga \quad (5)$$

$$\text{එවිට ප්‍රවේගය } v^2 = u^2 - 2ga \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2ga + \sqrt{3} ga - 2ga - \frac{2ga}{\sqrt{3}} = \frac{ga}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

m ස්කන්ධය ගෝල පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වූ පසු ප්‍රක්ෂිප්තයක ආකාරයට ගමන් කරයි.

අනතුරුව සිදුවන චලිතයේදී, $a \sin \alpha$ තිරස් දුරක් යාමට ගතවන කාලය t_0 නම්

$$a \sin \alpha = (v \cos \alpha) t_0 \quad (5)$$

$$\text{එවිට ඉහළට ගමන් කරන දුර } y = (v \sin \alpha) t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2$$

$$y = \frac{v \sin \alpha \times a \sin \alpha}{v \cos \alpha} - \frac{1}{2} \frac{ga^2 \sin^2 \alpha}{v^2 \cos^2 \alpha} \quad (5)$$

$$= \frac{\frac{2}{3} a}{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{ga^2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} a$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$= -a \cos \alpha \quad (5)$$

m ස්කන්ධය O හරහා යන සිරස් රේඛාව පසුකර යනවිට පහළට $a \cos \alpha$ දුරක් ගොස් ඇති බැවින් එය ගෝලයේ O කේන්ද්‍රය හරහා යයි.

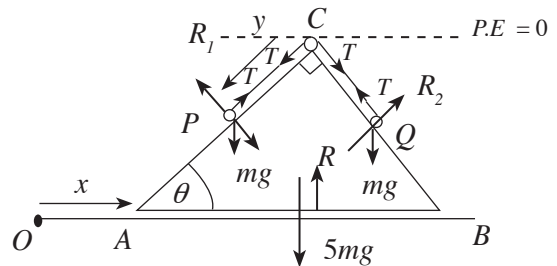
80

(b)

$$\mathbf{v}(P, O) = \begin{matrix} \dot{y} \\ \theta \\ \dot{x} \end{matrix}$$

$$\mathbf{v}(Q, O) = \begin{matrix} +\dot{y} \\ \pi - \theta \\ -2 \\ \dot{x} \end{matrix}$$

(5)



පද්ධතිය සඳහා ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්

$$\longrightarrow 5m \dot{x} + m(\dot{x} - \dot{y} \cos \theta) + m(\dot{x} - \dot{y} \sin \theta) = 0 \quad (10)$$

$$7m \dot{x} = m \dot{y} (\cos \theta + \sin \theta)$$

$$7\dot{x} = \dot{y} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) \quad (5)$$

$$5\dot{x} = \dot{y} \quad \text{—————} \quad (1)$$

20

පද්ධතිය සඳහා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2} 5m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \{(\dot{x} - \dot{y} \cos \theta)^2 + (\dot{y} \sin \theta)^2\} \quad (20)$$

$$+ \frac{1}{2} m \{(\dot{x} - \dot{y} \sin \theta)^2 + (\dot{y} \cos \theta)^2\} - mgy \sin \theta - mg(l - y) \cos \theta = \text{නියතයක්}$$

$$5\dot{x}^2 + \{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y} \cos \theta\} + \{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y} \sin \theta\}$$

$$- 2gy \sin \theta + 2gy \cos \theta = \text{නියතයක්} \quad (5)$$

$$7\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y} \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) - 2gy \frac{4}{5} + 2gy \frac{3}{5} = \text{නියතයක්}$$

$$35\dot{x}^2 + 10\dot{y}^2 - 14\dot{x}\dot{y} - 2gy = \text{නියතයක්} \quad \text{—————} \quad (2)$$

25

(1) හා (2) න්

$$35\dot{x}^2 + 250\dot{x}^2 - 70\dot{x}^2 - 2gy = \text{නියතයක්}$$

$$215\dot{x}^2 - 2gy = \text{නියතයක්}$$

t විෂයෙන් අවකලනය කිරීමෙන්

$$430\dot{x} \cdot \ddot{x} - 2g\dot{y} = 0 \quad (5)$$

$$430\dot{x} \cdot \ddot{x} - 2g \cdot 5\dot{x} = 0 \quad (\because \dot{x} \neq 0) \quad (5)$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{g}{43}$$

P සඳහා $F = ma$ යෙදීමෙන්

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \theta \end{array} : mg \sin \theta - T = m(\dot{y} - \ddot{x} \cos \theta) \quad (5)$$

$$T = mg \sin \theta - m(5\dot{x} - \ddot{x} \cos \theta) \quad (5)$$

$$= mg \frac{4}{5} - m\ddot{x} \left(5 - \frac{3}{5} \right)$$

$$= \frac{4mg}{5} - m \cdot \frac{1}{43} g \cdot \frac{22}{5}$$

$$= \frac{2mg}{5} \left\{ 2 - \frac{11}{43} \right\}$$

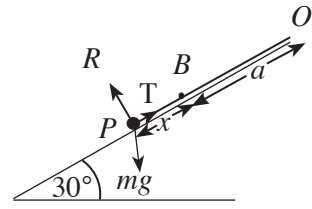
$$= \frac{2mg}{5} \times \frac{75}{43}$$

$$= \frac{30mg}{43} \quad (5)$$

10

15

13. තන්තුව ස්වභාවික දිගේ සිට x දුරක් ඇදී ඇති විට තන්තුවේ ආතතිය T නම්,



$$T = \frac{\lambda x}{a} = \frac{2mgx}{a} \quad (5)$$

අංශුවේ චලිතය සඳහා $F = ma$

$$mg \sin 30^\circ - T = m\ddot{x} \quad (10)$$

$$mg \times \frac{1}{2} - \frac{2\lambda gx}{a} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{2g}{a} \left(x - \frac{a}{4}\right) \quad (1) \quad (5)$$

20

$$x = \frac{a}{4} + A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2)$$

$$\dot{x} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \quad (3) \quad (5)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t \quad (4) \quad (5)$$

$$= -\omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \left(x - \frac{a}{4}\right) \quad (5) \quad (2) \text{ න් } (5)$$

(1) හා (5) සැලකීමෙන් $\omega^2 = \frac{2g}{a}$ වේ. (5)

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}$$

$t = 0$ විට $\dot{x} = 0$ වේ. (5)

(3) න්, $0 = B\omega$

$\omega \neq 0$ නිසා $B = 0$ වේ. (5)

$t = 0$ විට $x = a$ වේ. (5)

(5)

40

(2) න්, $a - \frac{a}{4} = A \Rightarrow A = \frac{3a}{4}$

$$\therefore x = \frac{3a}{4} \cos \omega t + \frac{a}{4}$$

$$x - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4} \cos \omega t$$

අංශුවේ දෝලන කේන්ද්‍රය $x - \frac{a}{4} = 0$ දී ලැබේ. (5)

10

එනම් $x = \frac{a}{4}$ දෝලන කේන්ද්‍රය වේ. (5)

විස්තාරයේදී $\dot{x} = 0$ වේ. එවිට $t = t_1$ යැයි ගනිමු.

$$0 = -A\omega \sin \omega t_1 \quad (5)$$

$$\sin \omega t_1 = 0$$

$$\omega t_1 = n\pi ; n \in \mathbb{Z}_0^+ \quad (5)$$

$$x - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4} \cos \omega t_1$$

$$x - \frac{a}{4} = \pm \frac{3a}{4} \quad (5)$$

20

$$\therefore \text{අංශුවේ සරල අනුවර්තී චලිතයේ විස්තාරය} = \frac{3a}{4} \quad (5)$$

අංශුව පළමුවෙන්ම ස්වාභාවික දිගට පැමිණෙන විට එහි ප්‍රවේගය V යැයි ගනිමු. එවිට $x = 0$ වේ. (5)

$$\frac{3a}{4} \cos \omega t = -\frac{a}{4}$$

$$\cos \omega t = -\frac{1}{3} \quad (5)$$

$$V = -A\omega \sin \omega t$$

$$= -\frac{3a}{4} \sqrt{\frac{2g}{a}} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \omega t}$$

$$= -\frac{3a}{4} \sqrt{\frac{2g}{a}} \sqrt{\frac{8}{9}} \quad (5) = -\frac{3a}{4} \sqrt{\frac{2g}{a}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= -\sqrt{ag}$$

$$x = 0 \text{ විට ප්‍රවේගය } \uparrow \sqrt{ag} \text{ වේ.} \quad (5)$$

20

අංශුව පළමුවෙන්ම ස්වාභාවික දිගට ඒමට ගතවන කාලය t_0 යැයි ගනිමු.

එවිට $x = 0$ වේ. (5)

$$-\frac{a}{4} = \frac{3a}{4} \cos \omega t_0$$

$$\cos \omega t_0 = -\frac{1}{3} \quad (5)$$

$$\omega t_0 = \pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \left[\pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right] = \sqrt{\frac{a}{2g}} \left[\pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right] \quad (5)$$

අංශුව O දක්වා ගුරුත්වය යටතේ චලනය වේ.

B සිට O දක්වා යාමට කාලය t_2 නම්

$$S = ut + \frac{1}{2} at^2 \quad \uparrow$$

$$S = a, u = \sqrt{ag}, a = -g \sin 30^\circ$$

$$a = \sqrt{ag}t_2 - \frac{1}{2} \frac{g}{2} t_2^2 \quad (5)$$

$$\frac{g}{4} t_2^2 - \sqrt{ag} t_2 + a = 0$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{ag} \pm \sqrt{ag - 4 \frac{g}{4} a}}{\frac{g}{2}}$$

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \quad (5)$$

$\therefore O$ දක්වා යාමට කාලය $t_0 + t_2$

$$= \sqrt{\frac{a}{2g}} (\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3})) + 2\sqrt{\frac{a}{g}} \quad (5)$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2g}} [\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3}) + 2\sqrt{2}]$$

30

තන්තුව උපරිම දිගේ ඇත්තේ A ලක්ෂ්‍යයේදීය. එනම් $x = a$ විට,

$$T_A = \frac{\lambda a}{a} \quad (5)$$

$$= \lambda$$

$$T_A = 2mg \quad (5)$$

10

$$14. (a) (i) |a| = |b| = |c| = 1 \quad (5)$$

$$(\underline{a} + 2\underline{b}) \perp (5\underline{a} - 4\underline{b}) \quad \text{නම්}$$

$$(\underline{a} + 2\underline{b}) \cdot (5\underline{a} - 4\underline{b}) = 0 \quad (5)$$

$$5\underline{a} \cdot \underline{a} + 10\underline{b} \cdot \underline{a} - 4\underline{a} \cdot \underline{b} - 8\underline{b} \cdot \underline{b} = 0$$

$$5|\underline{a}|^2 + 10\underline{a} \cdot \underline{b} - 4\underline{a} \cdot \underline{b} - 8|\underline{b}|^2 = 0$$

$$5 + 6\underline{a} \cdot \underline{b} - 8 = 0$$

$$6\underline{a} \cdot \underline{b} = 3 \quad (5)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \frac{1}{2}$$

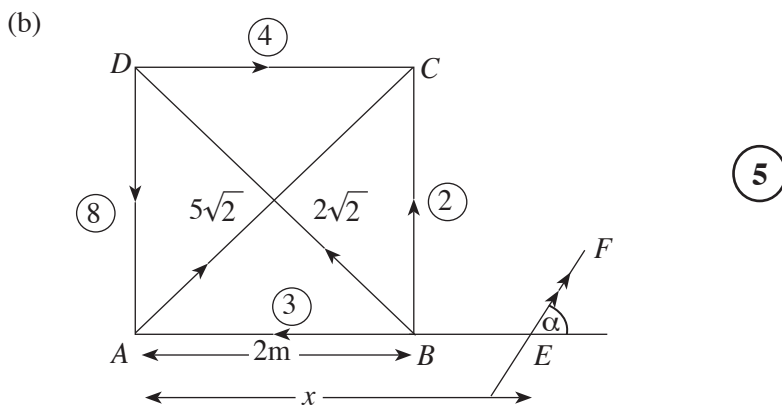
$$|\underline{a}| |\underline{b}| \cos \theta = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$1 \times 1 \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \quad (5)$$

25

(ii) $|a - b|^2 + |b - c|^2 + |c - a|^2$
 $= (a - b) \cdot (a - b) + (b - c) \cdot (b - c) + (c - a) \cdot (c - a)$ (5)
 $= |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 + |c|^2 - 2b \cdot c + |c|^2 + |a|^2 - 2c \cdot a$ (5)
 $= 6 - 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$ (5)
 $\therefore 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) = 6 - (|a - b|^2 + |b - c|^2 + |c - a|^2)$ (5) (1)
 $|a + b + c|^2 \geq 0$ (5)
 $\therefore (a + b + c) \cdot (a + b + c) \geq 0$ (5)
 $|a|^2 + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot a + |b|^2 + b \cdot c + c \cdot a + c \cdot b + |c|^2 \geq 0$ (5)
 $3 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) \geq 0$ (2) (5)
 (1) හා (2) න්
 $3 + 6 - (|a - b|^2 + |b - c|^2 + |c - a|^2) \geq 0$ (5)
 $\therefore |a - b|^2 + |b - c|^2 + |c - a|^2 \leq 9$ (5)

50



(i) $\vec{X} = 4 - 3 + 5\sqrt{2} \cos 45^\circ - 2\sqrt{2} \cos 45^\circ$ (5)
 $= 4\text{N}$
 $\uparrow Y = 2 - 8 + 5\sqrt{2} \cos 45^\circ + 2\sqrt{2} \cos 45^\circ$ (5)
 $= 1\text{N}$
 සම්ප්‍රයුක්තය R නම්,
 $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{4^2 + 1^2}$
 $= \sqrt{17}\text{N}$ (5)
 සම්ප්‍රයුක්තය තිරසර සමඟ සාදන කෝණය α නම්,
 $\tan \alpha = \frac{1}{4}$
 $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ (5)

25

සමප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව AB කපන ලක්ෂ්‍යය E නම් $AE = x$ යැයි ගනිමු.

$$\overset{\curvearrowleft}{A} \quad 1 \times x = 2 \times 2 - 4 \times 2 + 2\sqrt{2} \cdot 2 \cos 45^\circ \quad (5)$$

$$x = 0 \quad (5)$$

$A \equiv E$ (සමපාත වේ)

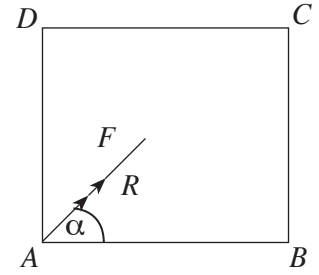
සමප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව A හරහා යයි.

\therefore බල පද්ධතිය සමතුලිත වීම සඳහා $\sqrt{17} \text{ N}$ බලයක් \vec{FA} දිශාවට

A හිදී යෙදිය යුතුයි.

$$(5)$$

$$(5)$$



20

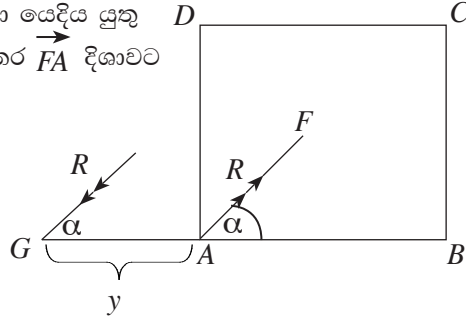
(ii) ABC අතට 39 Nm යුග්මයකට උභයන්තර කිරීම සඳහා යෙදිය යුතු බලය දික්කළ BA මත A සිට y දුරකින් AF ට සමාන්තර \vec{FA} දිශාවට වූ $\sqrt{17} \text{ N}$ බලයක් ක්‍රියා කරන්නේ යැයි ගනිමු.

$$(5)$$

$$\overset{\curvearrowleft}{ABC} \quad \sqrt{17} \times AG \sin \alpha = 39 \quad (5)$$

$$\sqrt{17} \times AG \times \frac{1}{\sqrt{17}} = 39$$

$$AG = 39 \text{ m} \quad (5)$$



15

(iii) B හිදී නති බලයකට උභයන්තර කිරීම සඳහා එක් කළ යුතු සුර්ණය

$$(5)$$

$$= \curvearrowright \sqrt{17} \times BA \sin \alpha \quad (5)$$

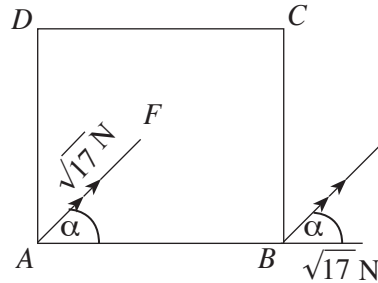
$$= \curvearrowright \sqrt{17} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{17}} = 2 \text{ Nm} \quad (5)$$

Aliter

එක් කළ යුතු සුර්ණය M නම්

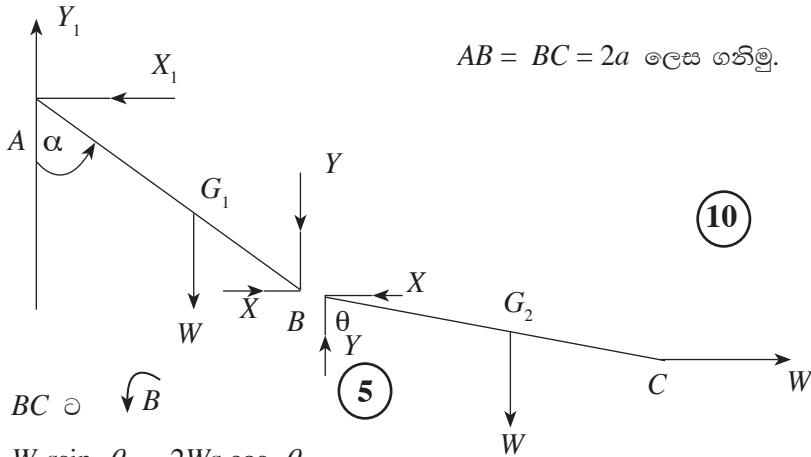
$$M - \sqrt{17} \times 2 \sin \alpha = 0$$

$$M = \sqrt{17} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{17}} = 2 \text{ Nm}$$



15

15. (a)



$AB = BC = 2a$ ලෙස ගනිමු.

$$(10)$$

10

(i) $BC \circlearrowleft B$

$$W a \sin \theta = 2W a \cos \theta$$

$$\tan \theta = 2$$

$$(5)$$

10

BC කොටසේ සමතුලිතතාව සැලකීමෙන්,

$$\leftarrow X = W \quad (5)$$

$$\uparrow Y = W \quad (5)$$

$$\therefore R_B = \sqrt{W^2 + W^2} \quad (5)$$

$$= \sqrt{2} W$$

20

R_B හි දිශාව තීරස සමඟ $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ කෝණයක් සාදයි. (5)

AB ට $\curvearrowright A$

$$X \cdot 2x \cos \alpha = Wx \sin \alpha + y \cdot 2x \sin \alpha \quad (10)$$

$$W \cdot 2 \cos \alpha = W \sin \alpha + W \cdot 2 \sin \alpha$$

$$\frac{2}{3} = \tan \alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \quad (5)$$

15

AB හි සමතුලිතතාව සැලකීමෙන්,

$$\rightarrow X_1 = X = W \quad (5)$$

$$\uparrow Y_1 = 2W \quad (5)$$

$$\therefore R_A = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \quad (5)$$

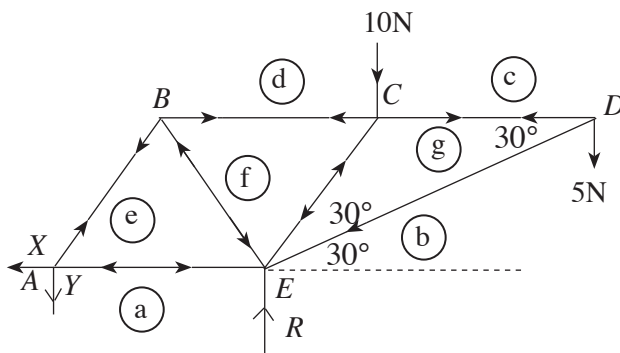
$$= \sqrt{5} W$$

R_A හි දිශාව තීරස සමඟ සාදන කෝණය

$$= \tan^{-1}(2) \quad (5)$$

20

(b)



දෘශ්‍ය දිග $2a$ යැයි ගනිමු. (DE හැර)

(i) $\curvearrowright A$ පද්ධතිය සලකා,

$$R \cdot 2x - 10 \times 3x - 5 \times 5x = 0 \quad (5)$$

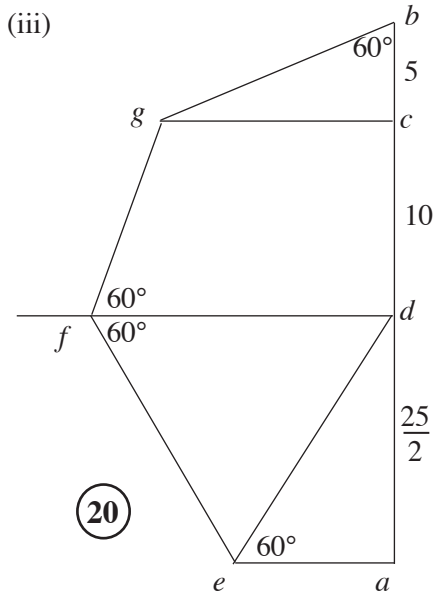
$$R = \frac{55}{2} \text{ N} \quad (5)$$

$$\therefore E \text{ හි යෙදෙන සිරස් බලය} = \frac{55}{2} \text{ N}$$

(ii) $\uparrow -Y + R - 10 - 5 = 0$
 $-Y = 15 - \frac{55}{2} = -\frac{25}{2} \text{ N}$
 $\therefore Y = \frac{25}{2} \text{ N}$
 $\leftarrow X = 0$

A අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාවේ සිරස් සංරචකය $= \downarrow \frac{25}{2} \text{ N}$ (5)
 තිරස් සංරචකය $= 0$ (5)

20



20

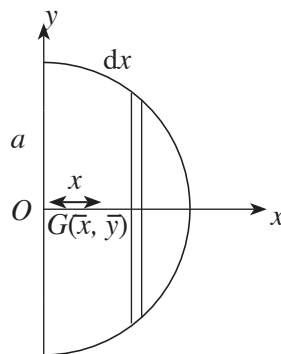
දණ්ඩ	විශාලත්වය	ප්‍රත්‍යාබලය
AE	$\frac{25\sqrt{3}}{6} \text{ N}$	තෙරපුම
AB	$\frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ N}$	ආතතිය
BE	$\frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ N}$	තෙරපුම
BC	$\frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ N}$	ආතතිය
CE	$\frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ N}$	තෙරපුම
CD	$5\sqrt{3}$	ආතතිය
ED	10 N	තෙරපුම

35

55

16. සමමිතියෙන් සකන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත වේ.

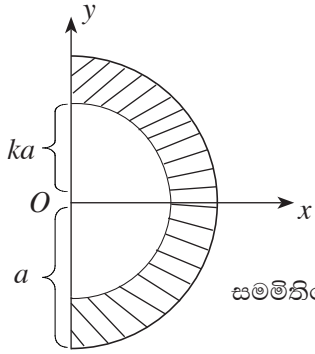
$\bar{y} = 0$ (5)
 $\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi \rho x (a^2 - x^2) dx}{\int_0^a \pi \rho (a^2 - x^2) dx}$ (10)
 $= \frac{\left[\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a}{\left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a}$ (5)
 $= \frac{3a}{8}$ (5)



$\therefore G \equiv \left(\frac{3a}{8}, 0 \right)$

30

(a)



සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය Ox මත වේ.

වස්තුව	ස්කන්ධය	O සිට ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර
අර්ධ ගෝලය	$\frac{2}{3} \pi a^3 \rho$	$\frac{3a}{8}$
ඉවත් කළ අර්ධ ගෝලය	$\frac{2}{3} \pi (ka)^3 \rho$	$\frac{3ka}{8}$
ඉතිරි කොටස	$\frac{2}{3} \pi a^3 \rho (1 - k^3)$	\bar{x}

(10)

(5)

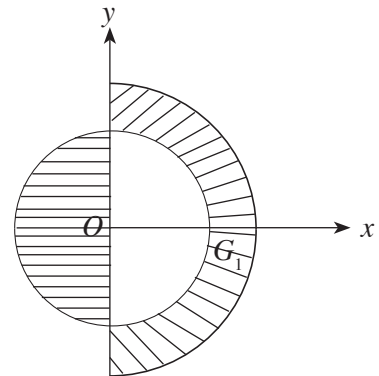
$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{3} \pi a^3 \rho \frac{3a}{8} - \frac{2}{3} \pi k^3 a^3 \rho \frac{3ka}{8}}{\frac{2}{3} \pi a^3 \rho (1 - k^3)} \quad (15)$$

$$= \frac{\frac{3a}{8} (1 - k^4)}{(1 - k^3)} = \frac{3a (1 + k^2) (1 - k) (1 + k)}{8 (1 - k) (1 + k + k^2)}$$

$$= \frac{3a (1 + k^2) (1 + k)}{8 (1 + k + k^2)} \quad (10)$$

40

(b) ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය $G_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ ලෙස ගනිමු. ඉවත් කළ කොටස රූපයේ අයුරු සම්බන්ධ කළ විට ද Ox වටා සමමිතික නිසා $\bar{y}_1 = 0$ වේ. (5)



(i) ඉවත් කළ කොටසේ ස්කන්ධය m ද අරය a ද වූ අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධය M යැයිද ගනිමු.

$$\frac{m}{M} = \frac{\frac{2\pi}{3} k^3 a^3 \rho}{\frac{2\pi}{3} a^3 \rho} = k^3 \quad (5)$$

$$m = M k^3 \quad (5)$$

20

(ii) සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර \bar{x}_1 වේ.

$$\bar{x}_1 = \frac{(M - m) \bar{x} + m \left(-\frac{3}{8}ka\right)}{(M - m) + m} \quad (15)$$

තවද $(M - m) \bar{x} = M \left(\frac{3a}{8}\right) - m \left(\frac{3ka}{8}\right)$ බැවින් (5)

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{M \left(\frac{3a}{8}\right) - m \left(\frac{3ka}{8}\right) - m \left(\frac{3ka}{8}\right)}{M} \\ &= \frac{3a}{8} \frac{(M - 2mk)}{M} \\ &= \frac{3a}{8} \left(1 - \frac{2m}{M}k\right) \quad (10) \end{aligned}$$

සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $= \frac{3a}{8} (1 - 2k^4)$

30

(iii) G_1 ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සමපාත විය යුතුය. (5)

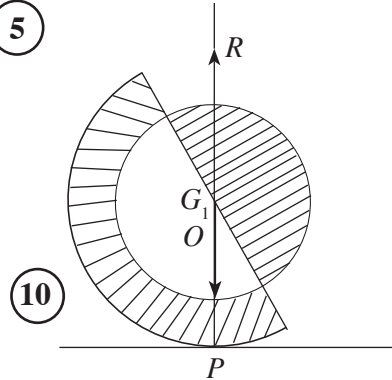
එනම්, $\bar{x}_1 = 0$ විය යුතුයි. (5)

$$\frac{3a}{8} (1 - 2k^4) = 0 \quad (5)$$

$$2k^4 = 1$$

$$k^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

$k^2 > 0$ නිසා $k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$



30

17. (a) $P(A) = 0.1$, $P(A \cup B) = 0.37$ සහ $P(C) = 0.2$

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ (5)

(A සහ B ස්වායත්ත නිසා)

$$0.37 = 0.1 + P(B) - 0.1 P(B)$$

$$0.37 - 0.1 = 0.9 P(B)$$

$$0.3 = P(B)$$

15

(ii) $P(B' | A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')}$ (5)

මෙහි $P(B' \cap A') = P[(B \cup A)'] = 1 - P(A \cup B)$ (5)

$$= 1 - 0.37 = 0.63$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$\therefore P(B' | A') = \frac{0.63}{0.9} = 0.7$$

20

$$\begin{aligned} \text{(iii) } P(A' \cap B' \cap C) &= P(A') P(B') P(C) && \textcircled{5} \\ &= 0.9 \times 0.7 \times 0.2 \\ &= 0.126 && \textcircled{5} \end{aligned}$$

10

$$\text{(iv) } X : (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C) \quad \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C) \\ &= P(A) P(B') P(C') + P(A') P(B) P(C') + P(A') P(B') P(C) && \textcircled{5} \\ &= 0.1 \times 0.7 \times 0.8 + 0.9 \times 0.3 \times 0.8 + 0.9 \times 0.7 \times 0.2 && \textcircled{10} \\ &= 0.398 \end{aligned}$$

20

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A|X) &= \frac{P(A \cap X)}{P(X)} \\ &= \frac{P(A \cap B' \cap C')}{P(X)} && \textcircled{5} \\ &= \frac{0.1 \times 0.7 \times 0.8}{0.398} \\ &= \frac{56}{398} && \textcircled{5} \\ &= \frac{28}{199} \end{aligned}$$

10

$$\text{(b) (i) } (\alpha) \text{ මධ්‍යන්‍යය} = \frac{\sum_{r=1}^n x_r}{n} \quad \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned} \text{ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය } \bar{x} &= \frac{28 + 56 + 23 + 94 + 8 + 5 + 13 + 846}{28} && \textcircled{5} \\ &= \frac{1073}{28} \\ &= 38.32 && \textcircled{5} \end{aligned}$$

15

(β) 94 සිට ලකුණු 49 දක්වා අඩු වී ඇති බැවින් වෙනස - 45 ක් වේ. \textcircled{5}
05 සිට ලකුණු 50 දක්වා වැඩි වී ඇති බැවින් වෙනස + 45 ක් වේ.
∴ මධ්‍යන්‍යය වෙනස් නොවේ. \textcircled{5}

10

$$\text{සම්මත අපගමනය} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{විචලනාවය} &= s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum x_i}{n} + \bar{x}^2 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \quad (5) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{20}\}$ සහ $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{10}\}$ ලෙස ගනිමු.

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 320 \quad \text{සහ} \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 5840 \quad (5)$$

සහ

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 130 \quad \text{සහ} \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 2380 \quad (5)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \frac{320}{20} = 16 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i^2}{20} - 16^2 = \frac{5840}{20} - 16^2 \\ &= 292 - 256 = 36 \end{aligned}$$

$$\therefore s_x = 6 \quad (5)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = \frac{130}{10} = 13 \quad (5)$$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i^2}{10} - 13^2 = \frac{2380}{10} - 169 = 69$$

$$\therefore s_y = 8.30 \quad (5)$$

$Z = X \cup Y$ ලෙස ගනිමු.

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i + \sum_{i=1}^{10} y_i}{30} \\ &= \frac{320 + 130}{30} = 15 \quad (5) \end{aligned}$$

$$s_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i^2 + \sum_{i=1}^{10} y_i^2}{30} - \bar{z}^2 \quad (5)$$

$$= 274 - 225 = 49$$

$$s_z = 7 \quad (5)$$

60