සියලුම හිමිකම් ඇවිරිණි.
All Rights Reserved

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උ/පෙළ) විභාගය

13 ශ්‍රේණිය | **සංයුක්ත ගණිතය - I** | **පිළිතුරු පත්‍රය**

A කොටස

01. $7 + 77 + 777 + \ldots\ldots$ පද n හි ඓක්‍යය සොයන්න.

$\frac{7}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots\ldots)$

$= \frac{7}{9}(10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \ldots\ldots n)$

$= \frac{7}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots$ n පද$) - (1 + 1 + 1 + \ldots\ldots n)$

$= \frac{7}{9}\left[\frac{10\,.\,(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right] = \frac{7\,(10^{n+1} - 10)}{81} - \frac{7}{9}n$

02. $x + 4x + 7x + \ldots\ldots (3n - 2)\,x = \frac{1}{2}\,n\,(3n - 1)\,x$ යන්න ගණිත අභ්‍යුහනයෙන් සියළු ධන නිඛිල n සඳහා පෙන්වන්න.

$x + 4x + 7x + \ldots\ldots (3n - 2)\,x = \frac{1}{2}\,n\,(3n - 1)\,x$

n = 1 විට,

$x = x\ 1\ x\ (3\ x\ 1 - 1)\,x = \frac{1}{2}\ x\ 2\ x\ x = x$

n = p ට සත්‍යයැයි උපකල්පනයක්,

$x + 4x + 7x + \ldots\ldots (3p - 2)\,x = \frac{1}{2}\ x\ 2p\,(3p - 1)\,x$

n = p + 1 ට සත්‍ය බව පෙන්වීම,

$x + 4x + 7x + \ldots\ldots (3p - 2)\,x + (3p + 1)\,x$

$= \frac{1}{2}\,p(3p - 1)\,x + (3p + 1)x$

$= \frac{1}{2}\,[p(3p - 1)\,x + 2\,(3p + 1)x] = (3p^2 + 5p + 2)x$

$= \frac{1}{2}\,(p + 1)\,[3\,(p + 1) - 1]\,x$

$\therefore$ n = p + 1 විට සත්‍ය වේ.

n = 1 ට සත්‍ය වේ. n = p ට සත්‍ය වේ යැයි උපකල්පනයෙන් n = p + 1 ට සත්‍ය වේ. $\therefore$ ගණිත අභ්‍යුතත මූලධර්මයෙන් සියලු ධන නිඛිල n සඳහා ප්‍රතිඵලය සාධනය වේ.

03. $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

අදාළ මූල වල ඓක්‍යය $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2}$

$= (\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta + \frac{(\alpha^2+\beta^2) - 2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}$

$= \frac{b}{a^2} - \frac{2c}{a} + \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}$

$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} + \frac{b^2 - 2ac}{c^2} = \frac{(a^2 + c^2)\ (b^2 - 2ac^2)}{a^2c^2}$

PAPERMASTER.LK

මූල වල ගුණිතය $= (\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right) = (\alpha^2+\beta^2)\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\right)$

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)^2}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{(b^2+2ac)^2}{a^2c^2}$$

$$\therefore\ x^2 - \frac{(a^2+c^2)\ (b^2-2ac^2)}{a^2c^2}\ x + \frac{(b^2-2ac^2)^2}{a^2c^2} = 0$$

$$a^2c^2x^2 - (a^2+c^2)(b^2-2ac)\,x + (b^2-2ac)^2 = 0$$

04. $\tan^2\alpha + \sec\alpha - 1 = 0$

$\sec^2\alpha - 1 + \sec\alpha - 1 = 0$

$\sec^2\alpha + \sec\alpha - 2 = 0 \Rightarrow (\sec\alpha + 2)(\sec\alpha - 1) = 0$

$\sec\alpha + 2 = 0$ හෝ $\sec\alpha - 1 = 0$

$\sec\alpha = -2$ හෝ $\sec\alpha = 1$

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ හෝ $\cos\alpha = 1$

$\alpha = \frac{2\pi}{3}$ හෝ $\frac{4\pi}{3}$, $\alpha = 0$

$\therefore$ විසඳුම් $0,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$

05. $A = 36^0$ ලෙස ගනිමු. $\therefore 5A = 180^0 \quad \therefore 2A = 180 - 3A$

$\text{Sin } 2A = \text{Sin } (180 - 3A)$

$2\,\text{Sin } A\ \text{Cos } A = \text{Sin } 3A = 3\text{Sin } A - 4\text{Sin}^3 A$

$2\text{Cos } A = 3 - 4\,\text{Sin}^2 A$

$2\,\text{Cos } A = 3 - 4\,(1 - \text{Cos}^2 A) \Rightarrow 4\,\text{Cos}^2 A - 2\,\text{Cos } A - 1 = 0$

$\text{Cos } A = \frac{2 \mp \sqrt{4+16}}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ හෝ $\frac{-5+1}{4}$

36^0 සුළු ∡ නිසා , $\text{Cos } 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

06. $\frac{\text{Cos } A}{1 - \text{Sin } A} = \tan\left(45 + \frac{A}{2}\right)$

<u>L.H.S.</u>

$$\frac{\text{Cos}^2\frac{A}{2} - \text{Sin}^2\frac{A}{2}}{\text{Sin}^2\frac{A}{2} + \text{Cos}^2\frac{A}{2} - 2\,\text{Sin}\frac{A}{2}.\text{Cos}\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\left(\text{Cos}\frac{A}{2} - \text{Sin}\frac{A}{2}\right)\left(\text{Cos}\frac{A}{2} + \text{Sin}\frac{A}{2}\right)}{\left(\text{Cos}\frac{A}{2} - \text{Sin}\frac{A}{2}\right)^2} = \frac{\text{Cos}\frac{A}{2} + \text{Sin}\frac{A}{2}}{\text{Cos}\frac{A}{2} - \text{Sin}\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1 + \tan\frac{A}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}} = \frac{\tan 45 + \tan\frac{A}{2}}{1 - \tan 45^0 . \tan\frac{A}{2}} = \tan\left(45^0 + \frac{A}{2}\right)$$

07. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x+3} + \frac{x^2-9}{x-3}\right)$ $(x+3 \neq 0$ හෝ $x-3 \neq 0)$

$$\lim_{x\to 3}\{(x-3)+(x+3)\} = \lim_{x\to 3} 2x = \lim_{x\to 3} 2 \times 3 = 6$$

PAPERMASTER.LK

08. $y = x + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} - \frac{2}{x^2}$

$= \frac{1}{x}\left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x}\ (x + \frac{1}{x}) - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x}.\ \ y - \frac{2}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{2}{x^2} \quad \Rightarrow x^2 .\ \frac{dy}{dx} - xy + 2 = 0$

09. $2x - y = 5$ ——①
$3x - y = 6$ ——②

②-① $x = 1$
$y = -3$

$\therefore$ (1, 3) ඡේදන ලක්‍ෂ්‍ය වේ.

$\therefore$ ඉහත රේඛා තුන එකම ලක්‍ෂ්‍යයක් හරහා යනු ලබයි.

(1, -3) $4x - y - 7 = 0$ ට ආදේශයෙන්

<u>LHS</u> $4 \times 1 - (-3) - 7$

$4 + 3 - 7 = 0 = \text{RHS}$

$\therefore$ (1, -3) ලක්‍ෂ්‍ය තෘප්ත කරයි.

10. $\log_3 x - 4 \log_x 3 + 3 = 0$

$\log_3 x - \frac{4}{\log_3 x}\ 3 + 3 = 0$

$\log_3 x = y$ යැයි ගනිමු.

$y - \frac{4}{y} + 3 = 0$

$y^2 - 4 + 3y = 0$

$y + 3y - 4 = 0$

$(y + 4)(y - 1) = 0$

$y = -4$ හෝ $y = 1$

$\log_3 x = -4$ හෝ $\log_3 x = 1$

$x = 3^{-4}$ හෝ $x = 3$

$x = \frac{1}{81}\ \ x = 3$

B කොටස

11. (a) $\alpha + \beta = \frac{4}{3}\ ,\ \frac{-(K + 1)}{K} = \frac{-4}{3} \Rightarrow 3K + 3 = 4K$

$K = 3$

(b) $K = 3$ නිසා සමීකරණය $3x^2 + 4x - 5 = 0$ වේ.

$\therefore\ \alpha\beta = \frac{-5}{3}$ වේ.

මේ අනුව $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{-4}{3}}{\frac{-5}{3}} = \frac{4}{5}$

$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta = (\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta$

$= \left(\frac{-4}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{-5}{3}\right) \Rightarrow \therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = \frac{16}{9} + \frac{10}{3} = \frac{46}{9}$

$\alpha^2 \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \left(\frac{-5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

$\therefore\ \alpha^2$ හා β^2 මූලවන සමීකරණය වන්නේ, $x^2 - \frac{46}{9}x + \frac{25}{9} = 0$

$9x^2 - 46x + 25 = 0$

PAPERMASTER.LK

(c) $x^2 - 3x > 3$

$x^2 - 3x - 3 > 0$

$(x + \alpha)(x - \beta) = 0$

මූල α, β විට $\dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$

$\alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$ හා $\beta = \dfrac{3 + 21}{2}$ විට $\alpha < \beta$

$$\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\longrightarrow}} \quad (-) \quad \underset{\beta}{\overset{(+)}{\longrightarrow}}$$

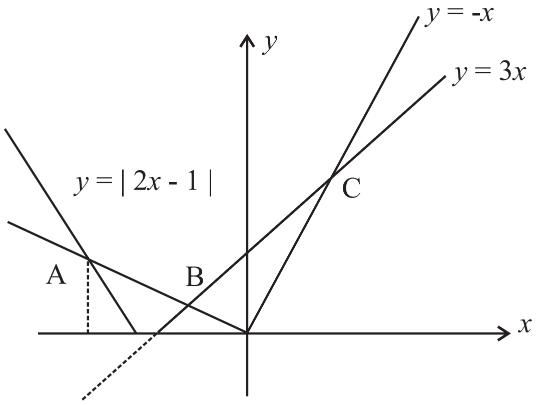
$\therefore$ විසඳුම $x < \alpha$ හා $x > \beta$ හෙවත්,

$x \in (-\propto, \alpha) \cup (\beta, \propto)$

$y = |2x + 1| + x \Rightarrow y = 3x \; ; x \geq 0$

(d) $y = |2x + 1|$ හා $y = 2|x| + x$ හි ප්‍රස්ථාර පළමුව අඳිමු.

$$y = |2x| + x \Rightarrow y = \begin{cases} 3x \; ; x \geq 0 \\ -x \; ; x < 0 \end{cases}$$



A සඳහා $-(2x + 1) = -x$

$x = -1$

B සඳහා $2x + 1 = -x$

$x = -\dfrac{1}{3}$

C සඳහා $2x + 1 = 3x$

$x = 1$

$\therefore$ විසඳුම් කුලකය $-1 < x < -\dfrac{1}{3}$ හෝ $x > 1$

---

12. (a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^{3/2} - 9^{3/2}}{x - 9} = \dfrac{3}{2} \times 9^{\frac{3}{2} - 1} = \dfrac{3}{2} \times 3 = \dfrac{9}{2}$

(b) $y = \dfrac{1}{x^2}$ ——①

$y + \Delta y = \dfrac{1}{(x + \Delta x)^2}$ ——②

①-② $\Delta y = \dfrac{1}{(x + \Delta x)^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - (x + \Delta x)^2}{x^2 (x + \Delta x)^2}$

$= \dfrac{-(2x \,.\, \Delta x + \Delta x^2)}{x^2 (x + \Delta x)^2}$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-(2x + \Delta x)}{x^2 (x + \Delta x)^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-(2x + \Delta x)}{x^2 (x + \Delta x)^2} = \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{-2}{x^3}$

$\therefore \dfrac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{dx} = \dfrac{-2}{x^3}$

PAPERMASTER.LK

(c) $y = \sqrt{2x^3 - 5}$

$\frac{d}{dx} y = (2x^3 - 5)^{\frac{-1}{2}} \quad (6x^2) \qquad \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 - 5}}$

නැවත අවකලනයෙන්,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2x^3 - 5)^{\frac{1}{2}} \ (6x^2) - 3x^2(-\frac{1}{2}) . (2x^3 - 5)^{-\frac{1}{2}} \ (6x^2)}{(2x^3 - 5)}$$

$$= \frac{3x \{2(2x^2 - 5) - 3x^2\}}{(2x^3 - 5) \ (2x^3 - 5)^{+\frac{1}{2}}} = \frac{3x \ (x^3 - 10)}{(2x^3 - 5)^{\frac{3}{2}}}$$

(d) $x = 1 - 3t^3 \qquad \frac{dy}{dt} = -6t \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-6t}{-9t^2} = \frac{2}{3t}$

$\frac{dy}{dt} = -9t^2$

$\frac{dy}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{2}{3t^2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \Big/ \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{3t^2} \Big/ -9t^2$

$= \frac{2}{27t^4} \quad ; \ t \neq 0$

---

13. (a) $4^x = 25$

$x \ log \ 4 = log \ 25$

$x = \frac{log \ 25}{log \ 4} = \frac{1.3979}{0.6021} = 2.322$

(b) $\tan 105^0 = \tan (60 + 45) = \frac{\tan 60 + \tan 45}{1 - \tan 60 \ . \ \tan 45}$

$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -(\sqrt{3} + 2)$

(c) $\text{Sin } 2x + \text{Sin } 4x - \text{Sin } 6x = 0$

$2 \text{ Sin } 3x \ . \ \text{Cos } x - 2 \text{ Sin } 3x \ . \ \text{Cos } 3x = 0$

$2 \text{ Sin } 3x \ (\text{Cos } x - \text{Cos } 3x) = 0$

$2 \text{ Sin } 3x \ . \ \text{Sin } 2x \ . \ \text{Sin } x = 0$

$\text{Sin } 3x = 0$ හෝ $\text{Sin } 2x = 0$ හෝ $\text{Sin } x = 0$

$\therefore 3x = n\pi$ හෝ $2x = n\pi$ හෝ $x = n\pi$

$x = \frac{n\pi}{3}$ හෝ $x = \frac{n\pi}{3}$ හෝ $n \in z$

(d) $F(x) = 3 \text{ Cos } x + 4 \text{ Sin } x$

$r \text{ Cos } \alpha = 3 \quad r \text{ Sin } \alpha = 4$ වන සේ $r(>0)$ හා α තෝරාගනු ලැබේ.

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\text{Sin } \alpha, \text{Cos } \alpha$ දෙකම ධන නිසා $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ පළමු වෘත්ත පාදකයේ පිහිටි කි.

$0 \leq \alpha < 2\pi$ ලෙස ගත් විට, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$F(x) = 5 \text{ Cos } \alpha \ . \ \text{Cos } x + 5 \ . \ \text{Sin } \alpha \ . \ \text{Sin } x$

$= 5 \text{ Cos } (x - \alpha)$

$3 \text{ Cos } x + 4 \text{ Sin } x = 2.5$

$5 \text{ Cos } (x - \alpha) = 2.5$

$\text{Cos } (x - \alpha) = \frac{1}{2}$

$x - \alpha = \frac{\pi}{3}$

$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \alpha \quad n \in z$

PAPERMASTER.LK

14. (a) $\dfrac{x^3 - 4x - 5}{x^2 - x - 6} = Ax + B + \dfrac{Cx + D}{(x - 3)(x + 2)}$

$= x + 1 + \dfrac{2}{x - 3} + \dfrac{1}{x + 2}$

(b) $F(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$

$F(-1) = 0 \;\therefore\; x - (-1)$ සාධකයකි.

$\therefore F(x) = (x + 1)(x^2 - 8x + 15)$

$= (x + 1)(x - 3)(x - 5)$

(c) $g(x) = 2x + 3$

$g(x + 5) = 2(x + 5) + 3 = 2x + 10 + 3 = 2x + 13$

$g(x^2 + 5) = 2(x^2 + 5) + 3 = 2x^2 + 10 + 3 = 2x^2 + 13$

$g\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2\ \dfrac{1}{x} + 3 = \dfrac{2}{x} + 3$

(d) $\dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \left(\dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right)$

$= \dfrac{18 + 3\sqrt{6} + 6\sqrt{6} + 6}{18 - 3} = \dfrac{24 + 9\sqrt{6}}{15}$

$= \dfrac{3(8 + 3\sqrt{6})}{15} = \dfrac{8 + 3\sqrt{6}}{5}$

15. (a) $f(n) = 10^n + 3.4^{n+2} + 5$

$f(1) = 207 = 9 \times 23$

$\therefore$ n = 1 සත්‍ය වේ.

n = P සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනයෙන්,

$f(p) = 10^p + 3.4^{p+2} + 5$ යන්න 9 න් බෙදේ.

$f(p+1) = 10^{p+1} + 3.4^{p+3} + 5 = 10.10^p = 3\ .\ 4\ .\ 4^{n+2} + 5$

$f(p+1) - f(p) = (10 - 1)\,10^p + (12 - 3)\,4^{p+2} = 9\,(10^p + 4^{p+1})$

$f(p+1) - f(p)$ යන්න 9 න් බෙදේ.

f(p) යන්න p න් බෙදෙන නිසා f(p+1) ද 9 න් බෙදේ.

f(1) යන්න ද 9 න් බෙදේ. $\therefore$ සියලුම $n \in \mathbb{N}$ සඳහා f(n) යන්න 9 න් බෙදෙන බව ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයෙන් ඔප්පු වේ.

(b) $1.7777 \ldots\ldots\ldots = 1 + \underbrace{\left(\dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} + \dfrac{7}{1000} + \ldots\ldots\ldots\right)}$

$= 1 + \left(\dfrac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}}\right) = 1 + \dfrac{7}{9} = \dfrac{16}{9}$

(c) $\sqrt{x + 8} - \sqrt{x + 3} = \sqrt{2x - 1}$

දෙපසම වර්ග කළ විට,

$x + 8 - 2\sqrt{x + 8}\,.\sqrt{x + 3} + x + 3 = 2x - 1$

$-2\sqrt{x + 8}\,.\sqrt{x + 3} = -12$

$\sqrt{x + 8}\ \sqrt{x + 3} = 6$

නැවත වර්ග කළ විට, $(x + 8)(x + 3) = 36$

$x2 + 11x + 24 = 36$

$x2 + 11x - 12 = 0$

$(x + 12)(x - 1) = 0$

$x = -12$ හෝ $x = 1$

PAPERMASTER.LK

(d) $3x^4 - 4x^3 - 14x^3 - 4x + 3 = 0$

$\div x^2 \quad 3x^2 - 4x - 14 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2} = 0$

$3(x^2 + \dfrac{3}{x^2}) - 4\,(x + \dfrac{1}{x}) - 14 = 0$

$t = x + \dfrac{1}{x}$ ආදේශයෙන්

$3(t^2 - 2) -4t - 14 = 0$

$3t^2 - 4t - 20 = 0$

$(3t - 10)\,(t + 2) = 0$

$t = \dfrac{10}{3}$ හෝ $t = -2$ වේ

$x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{10}{3}$ හෝ $x + \dfrac{1}{x} = -2$

$3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$

$(3x -1)\,(x - 3) = 0 \qquad (x + 1)^2 = 0$

$x = \dfrac{1}{3},\ x = 3 \quad x = -1$ හෝ -1

---

16. (a) $x + 3y - 2 = 0 \quad 2x - y + 4 = 0$ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන නිසා අවශ්‍ය සමීකරණය,

$x + 3y - 2 + \lambda\,(2x - y + 4) = 0$ ආකාර වේ. ——①

$(-1\ ,\ -1)$ හරහා මෙම රේඛාව යන නිසා

$[-1 + 3\,(-1) -2] + [2\,(-1) - (-1) + 4] = 0$

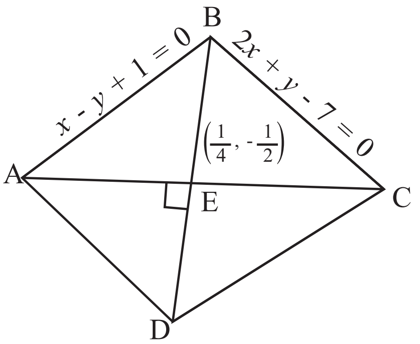
$\lambda = 2$

$\therefore\ \lambda = 2$ බව ① ට ආදේශයෙන්,

$(x + 3y - 2) + 2\,(2x - y + 4) = 0$

$\Rightarrow 5x + y + 6 = 0$

(b)



DB සරල රේඛාව $x - y + 1 = 0$ හා $2x + y - 7 = 0$ සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍ය වන B හරහා යන නිසා DB සමීකරණය $x - y + 1 + \lambda\,(2x + y - 7) = 0$ ආකාරයේ ය.

මෙය $\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}\right)$ හරහා යන නිසා,

$\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + 1\right) + \lambda\left(2\,.\,\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 7\right) = 0$

$\lambda = \dfrac{1}{4}$ බව ලැබේ.

ඒ අනුව BD හි සමීකරණය $(x - y + 1) + \dfrac{1}{4}\,(2x + y - 7) = 0$

එනම් බව $2x - y - 1 = 0$ ලැබේ.

ඒ අනුව BD හි අනුක්‍රමණය $= 2$

ABCD රොම්බසයක් නිසා විකර්ණ ලම්භකව සමච්ඡේදනය වේ.

$\therefore$ AC හි අනුක්‍රමණය $-\dfrac{1}{2}$ වේ.

PAPERMASTER.LK

AC හි සමීකරණය $\dfrac{y + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 4x + 8y + 3 = 0$

AC හා BC සරල රේඛාවල සමීකරණ විසඳා C හි බණ්ඩාංක ලැබේ.

$4x + 8y + 3 = 0$ ——①

$2x + y - 7 = 0$ ——②

① හා ② න්, $C \equiv \left(\dfrac{59}{12}, -\dfrac{17}{6}\right)$

DC හා AB සමාන්තර නිසා DC සමීකරණය

$x - y + K = 0$ ආකාර වේ.

$C\left(\dfrac{59}{12}, -\dfrac{17}{6}\right)$ හරහා යන නිසා,

$\dfrac{59}{12} + \dfrac{17}{6} + K = 0$

$K = -\dfrac{31}{4}$

$\therefore$ DC සමීකරණය $x - y - \dfrac{31}{4} = 0$

AB හා AC සමීකරණ විසඳූ විට, $A \equiv \left(-\dfrac{11}{12}, \dfrac{1}{12}\right)$

AD හා BC සමාන්තර නිසා AD හි සමීකරණය

$2x + y + K = 0$ ආකාර වේ.

$A\left(-\dfrac{11}{12}, \dfrac{1}{12}\right)$ හරහා යන නිසා

$2\left(-\dfrac{11}{12}\right) + \dfrac{1}{12} + K = 0$

$K = \dfrac{21}{12}$

AD හි සමීකරණය $2x + y + \dfrac{21}{12} = 0$

17. (a) $P \equiv (x_0, y_0)$ නම් P සිට S ට ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය

$xx_0 + yy_0 + (x + x_0) + 2(y + y_0) + 1 = 0$ වේ.

මෙය Q (2, -3) හරහා යයි නම්

$2x_0 - 3y_0 + 2 + x_0 + 2(-3 + y_0) + 1 = 0$

$3x_0 - y_0 - 3 = 0$

$\Rightarrow 3x - y - 3 = 0$ මෙය P හි පථයයි.

(b) අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 + \lambda(x + y - 1)\ 0$ ——①

මෙය $x^2 + y^2 + 2x(-1 + \dfrac{\lambda}{2}) + 2y(-1 + \dfrac{\lambda}{2}) - 2 - \lambda = 0$ ආකාර වේ.

මෙය $x^2 + y^2 - 2gx + 2fy + c = 0$ හා සැසඳූ විට,

$g = -1 + \dfrac{\lambda}{2}$, $f = -1 + \dfrac{\lambda}{2}$ හා $c = -2 - \lambda$ වේ.

මෙහි අරය $r^2 = g^2 + f^2 - c$ නම්

$r = 2\sqrt{2}$ විට $(2\sqrt{2})^2 = (-1 + \dfrac{\lambda}{2})^2 + (-1 + \dfrac{\lambda}{2})^2 + 2 + \lambda$

$8 = 2(1 - \lambda + \dfrac{\lambda^2}{4}) + 2 + \lambda$

PAPERMASTER.LK

$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$ ලැබේ.

$(\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda = 4$ හෝ $\lambda = -2$

$\lambda = -2$ විට ① න් $(x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2) - 2(x + y - 1) = 0$

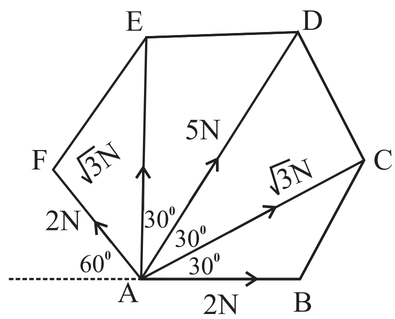
$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$

$\lambda = 4$ විට ① න් $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 + 4(x + y - 1) = 0$

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0$

II කොටස
A කොටස (පිළිතුරු පත්‍රය)

01.



$\overrightarrow{x} = 2 + \sqrt{3}\,\text{Cos}\,30 + 5\,\text{Cos}\,60 + 0 - 2\,\text{Cos}\,60$

$= 5$

$y\uparrow = 0 + \sqrt{3}\,\text{Sin}\,30 + 5\,.\,\text{Sin}\,60 + \sqrt{3}\,\text{Sin}\,90 + 2\,\text{Sin}\,60$

$= 5\sqrt{3}$

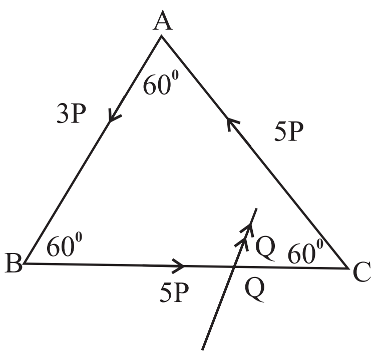
$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10N$

AB සමඟ සම්ප්‍රයුක්තය θ කෝණයක් සාදන විට,

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{5\sqrt{3}}{5} = 3$

$\theta = 60$, $(\therefore \tan 60 = \sqrt{3})$

02.



Q වටා බල පද්ධතියේ ඝූර්ණය

$7\,.\,P(0) + 5P\,.\,QC\,\text{Sin}\,60 + 3P\,.\,BQ\,\text{Sin}\,60$

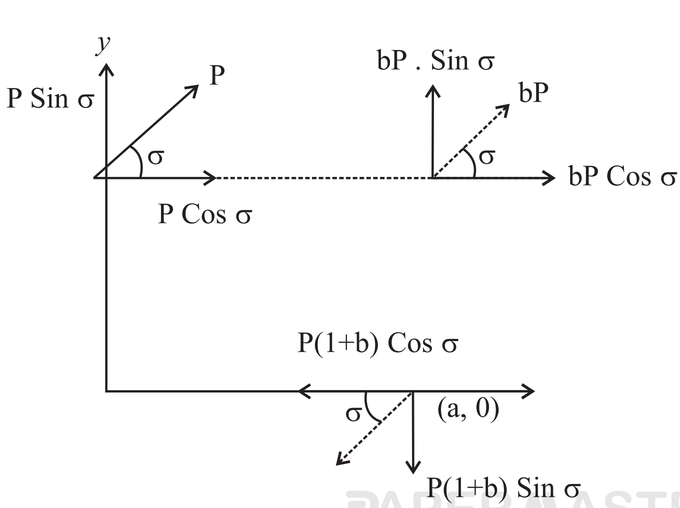
ත්‍රිකෝණයක පාදයක දිග a නම්

$QC = a - BQ$

$5\,.\,(a - BQ) + BQ = 0$

$BQ = \dfrac{5a}{2}$

03.



$O\,.\,\circlearrowleft\,G = -P\,\text{Cos}\,\sigma\,.\,a - b\,P\,\text{Sin}\,\sigma\,.\,a$

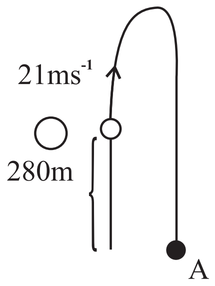
$- bP\,\text{Cos}\,\sigma\,.\,a - P(1 + b)\,\text{Sin}\,\sigma\,.\,a$

$= -Pa\,(1 + b)\,\text{Cos}\,\sigma\,.\,Pa\,\text{Sin}\,\sigma$

$G = -Pa\,\text{Cos}\,\sigma\,[(1 + b) + \tan\sigma]$

PAPERMASTER.LK

04.



$S = -280,\ U = 21,\ a = -g$

$\uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$-280 = 21t - \frac{1}{2}gt^2$

$= 21t - \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$

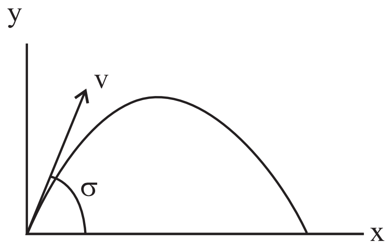
$4.9t^2 - 21t - 280 = 0$

$\Rightarrow 7t^2 - 30t - 400 = 0$

$(t - 10)(7t + 40) = 0$

$t = 10\ s$

05.



$X = vt \cos \sigma$

$Y = vt \sin \sigma - \frac{1}{2}gt^2$

$= \frac{vx \sin \sigma}{v \cos \sigma} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v \cos \sigma}\right)^2$

$= x \tan \sigma \frac{-gx^2}{2v^2 \cos^2 \sigma}$

$x = 16,\ y = 7,\ v = 20$

$y = 10 \tan \sigma - \frac{5 \times 16^2}{20^2 \cos^2 \sigma}$

$y = 16\ T - \frac{5 \times 4^2}{5^2}(T^2 + 1)$

$35 = 80T - 16T^2 - 16$

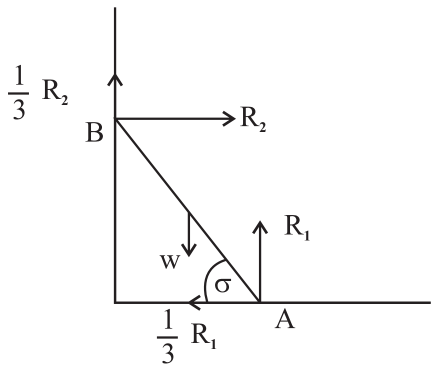
$16T^2 - 80T + 51 = 0$

$(4T - 3)(4T - 17) = 0$

$T = \frac{3}{4}$ හෝ $\frac{17}{4}$

---

06. සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ දී $F = \mu R$ වන නිසා ඉනිමග මත ක්‍රියා කරන බලරූපය



$\rightarrow R_2 - \frac{1}{3}R_1 = 0$

$R_1 = 3R_2$

$\uparrow R_1 + \frac{1}{3}R_2 - w = 0$

$R_2 = 3W_2 - 3R_1$

$\therefore R_2 = 3w - 9R_2$

$\Rightarrow R_2 = \frac{1}{3}w$

$A \circlearrowleft R_2 \times 2a \sin \sigma + \frac{1}{3}R_2 \times 2a \cos \sigma - wa \cos \sigma = 0$

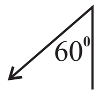
$\frac{3}{10} w \times 2 \sin \sigma = w \cos \sigma - \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} w \times 2 \cos \sigma$

$6 \sin \sigma = 10 \cos \sigma - 2 \cos \sigma$

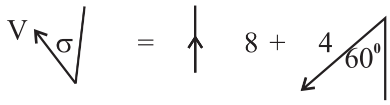
$\tan \sigma = \frac{4}{3}$

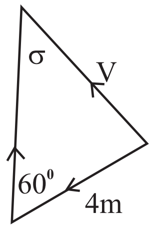
PAPERMASTER.LK

07. සයිකල් කරුවාගේ ප්‍රවේගය $V_{C,E} = 8ms^{-1}$

සයිකල් කරුවාට සාපේක්ෂව සුළඟේ ප්‍රවේගය $V_{W,C} = 4ms^{-1}$ 

සුළඟේ සත්‍ය ප්‍රවේගය $V_{(W,E)} = V_{W,C} + V_{CE}$





$\leftarrow$ $V \sin \sigma = 4 \sin 60 = 2\sqrt{3}$

$\uparrow$ $V \cos \sigma = 8 - 4 \cos 60$

$V = \sqrt{12 + 36} = 4\sqrt{3}$

$\sigma = \tan^{-1} \dfrac{2\sqrt{3}}{6}$

$\tan^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30^0$

සුළඟ 4 3ms^{-1} වේගයෙන් දකුණින් 30^0 නැගෙනහිර දිශාවෙන් වූ දිශාවෙන් හමයි.

---

08. (a) $P = 4Kw, V = 8ms^{-1}$

$P = FV$ යෙදීමෙන්

$4000 = F \times 8$

$F = 500N$

ප්‍රතිරෝධය $= 0.5 \times 800$

$= 400N$

$F = ma$ යෙදීමෙන් $500 - 400 = 800a$

$a = 0.25ms^{-2}$

(b) රථය උපරිම වේගයෙන් යන විට ත්වරණය ශුන්‍ය වේ. ප්‍රකර්ෂණ බලය F නම් F = ma මගින්

$F - 400 = 0$

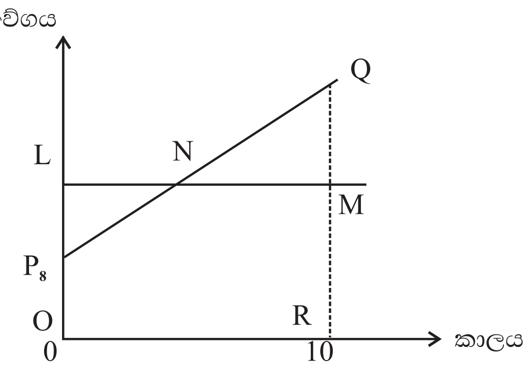
$F = 400N$

$P = FV$ යෙදීමෙන් $4000 = 400V$

$V = 10ms^{-1}$

---

09. (i)



දෙදෙනාම ගමන් කළ දුර සමාන නිසා

OPQR වර්ගඵලය = OLMP වර්ගඵලය

$\therefore$ PLN Δ හා QMN Δ වර්ගඵලවලින් සමාන වේ. සමරූපී ත්‍රිකෝණ වලින්

$QM = PL = 4$

Y හිදී B හෝ වේගය $= 12 + 4 = 16ms^{-1}$

(ii) XY දුර = OLMR වර්ගඵලය = 120m

(iii) B ගේ ත්වරණය = PQ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{16 - 8}{10} = 0.8ms^{-2}$

PAPERMASTER.LK

10. තන්තුව තද වූ පසු A හා B අංශු සමාන කාල ප්‍රාන්තරය තුළ සමාන දුර ගමන් කරයි. ∴ ඒවායේ ප්‍රවේග සමාන වේ. එය V ms^{-1} නම්,

රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමයට අනුව,

$\rightarrow$ 3V + 2V = 2 x 5

V= 2

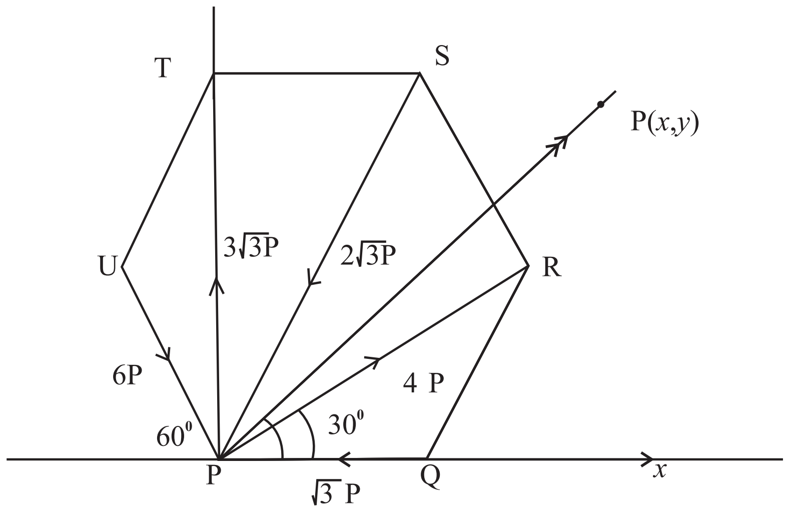
තන්තුව තදවූ විට ප්‍රවේගය = 2 ms^{-1}

AO I = Δ (mr) යෙදීමෙන්,

T = 3V = 3 x 2 = 6NS

B කොටස

11. (a)



$\rightarrow$ $R \cos \sigma = -\sqrt{3}P + 4P \cos 30 - 2\sqrt{3}P \cos 60 + 6P \cos 60$

$R \cos \sigma = 3P$ ——①

$\uparrow$ $R \sin \sigma = 4P \sin 30 - 2\sqrt{3}P \sin 60 + 3\sqrt{3}P - 6P \cos 60$

$R \sin \sigma = -P$ ——②

①+② $R^2 (\sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma) = 10P^2$

$R = \sqrt{10}P$

① / ② $\tan \sigma = -\frac{1}{3}$

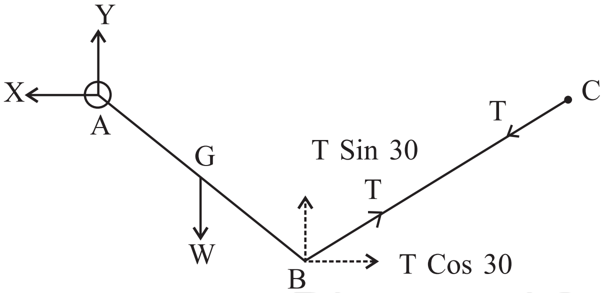
$\sigma = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$\tan \sigma = \frac{y}{x}$

$\frac{y}{x} = -\frac{1}{3}$

$x + 3y = 0$

(b)



දණ්ඩේ සමතුලිතයට,

$\leftarrow$ X - T Cos 30 = 0 ——①

$\uparrow$ Y + T Sin 30 - W = 0 ——②

PAPERMASTER.LK

A↰ වටා $T \text{ Sin } 30 \times AB \text{ Cos } 30 + T \text{ Cos } 30 \times AB \text{ Sin } 30$

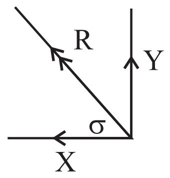
$- W \times \frac{AB}{2} \text{ Cos } 30 = 0$

$T \text{ Sin } 30 + T \text{ Sin } 30 = \frac{W}{2} \Rightarrow T = \frac{W}{2}$

① න්

$X = T \text{ Cos } 30 = \frac{W}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\,W}{4}$

② න් $Y = W - T \text{ Sin } 30 = W - \frac{W}{2} = \frac{3W}{4}$



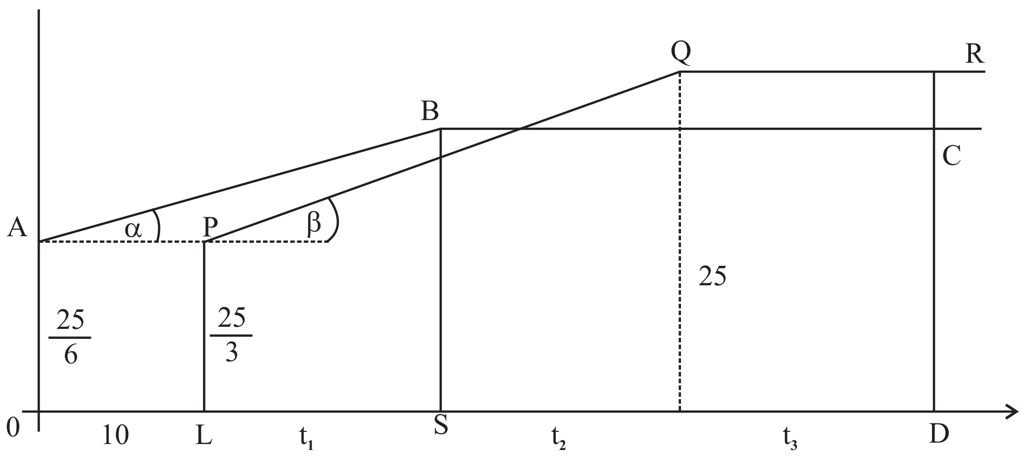
$R^2 = X^2 + Y^2$

$= \frac{3W^2}{16} + \frac{9W^2}{16} = \frac{12W^2}{16}$

$R = \frac{\sqrt{3}W}{2}$; $\text{Tan } \sigma = \frac{X}{Y} = \frac{3W \times 4}{4 \times \sqrt{3}W} = \sqrt{3}$

$\sigma = \frac{\pi}{3}$

12.



$15 kmh^{-1} = \frac{25}{6} \; ms^{-1}$

$30 kmh^{-1} = \frac{25}{3} \; ms^{-1}$

$V \; kmh^{-1} = \frac{5V}{18} \; ms^{-1}$

$90 \; kmh^{-1} = 25 \; ms^{-1}$

$\tan \beta = \frac{5}{18}$

$$\frac{25 - \frac{25}{3}}{t_1 + t_2} = \frac{5}{18}$$

$t_1 + t_2 = \frac{50}{3} \times \frac{15}{5} = 60 \text{ s}$

PQR වර්ගඵලය + QCDR වර්ගඵලය = 1500

$$\frac{\left(25 + \frac{25}{3}\right)}{2} (t_1 + t_2) + 25t_3 = 1500$$

$$\frac{2}{3} (t_1 + t_2) + t_3 = 60$$

$$\frac{2 \times 60}{3} + t_3 = 60 \Rightarrow t_3 = 60 - 40 = 20$$

PAPERMASTER.LK

A සිට X පසු කිරීමට Y ගත් කාලය $= t_1 + t_2 + t_3$

$= 60 + 20 = 80$ S

X විස්ථාපනය = ක්ෂේත්‍රඵලය

$$500 = OABS$$

$$= \frac{\left(\frac{25}{6} + \frac{5V}{18}\right)(10 + t_1)}{2}$$

$$1000 = \left(\frac{75 + 5V}{18}\right)(10 + t_1)$$

$$10 + t = \frac{200 \text{ x } 18}{15 + V} \quad \text{——①}$$

X විස්ථාපනය = ක්ෂේත්‍රඵලය

$$1000 = \frac{5V}{18}(t_2 + t_3)$$

$$1000 = \frac{200 \text{ x } 18}{V} \quad \text{——②}$$

① +② $$10 + t_1 + t_2 + t_3 = \frac{200 \text{ x } 18}{15 + V} + \frac{200 \text{ x } 18}{V}$$

$$10 + 80 = 200 \text{ x } 18\left(\frac{1}{15 + V} + \frac{1}{V}\right)$$

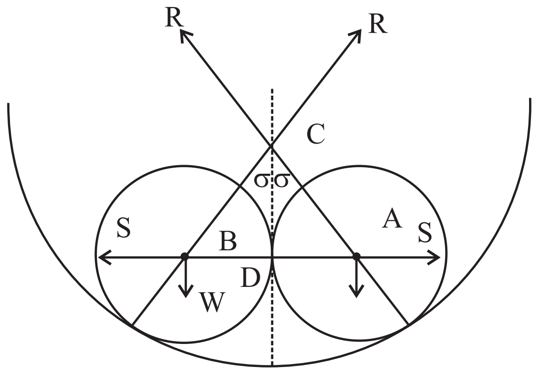
$$9 = 20 \text{ x } 18\left(\frac{V + 15 + V}{V(15 + V)}\right)$$

$$V^2 + 15V = 40(2V + 15)$$

$$V^2 - 6V - 600 = 0$$

$$V = \frac{65 \pm \sqrt{6625}}{2} = \frac{65 + \sqrt{6625}}{2}$$

13.

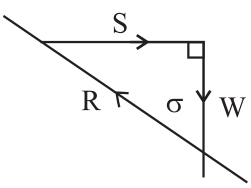


BD = AD = a

BC = AC = $b - a$

පද්ධතිය සමමිතික වේ.

ගෝලයක් මත බල සැලකූ විට,



ත්‍රිකෝණයට Sin සූත්‍රයෙන්,

$$\frac{S}{\operatorname{Sin}\sigma} = \frac{W}{\operatorname{Sin}(90 - \sigma)} = \frac{R}{\operatorname{Sin} 90}$$

$$\frac{S}{\operatorname{Sin}\sigma} = \frac{W}{\operatorname{Cos}\sigma}$$

$$S = W\tan\sigma \quad \text{——①}$$

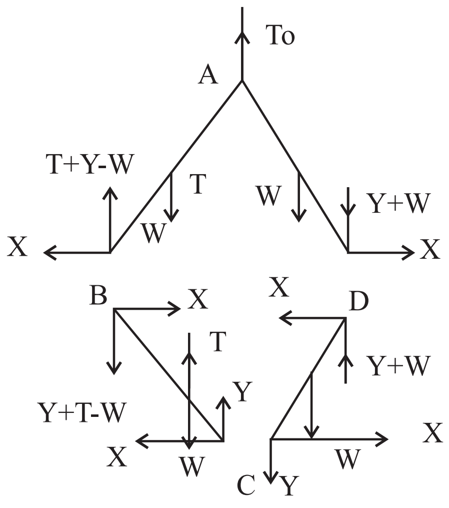
$\tan\sigma = \frac{AD}{DC}$ නිසා

$$\frac{a}{\sqrt{(b - a)^2 - a^2}} = \frac{a}{\sqrt{b(b - 2a)}}$$

ගෝල දෙක අතර ප්‍රතික්‍රියාව $S = \frac{aW}{\sqrt{b(b - 2a)}}$

PAPERMASTER.LK

14.



AD හි සමතුලිතතාවට,

$A\circlearrowleft X\ .\ 2a\ .\ \text{Sin}\ 45 - (X + Y)\ 2a\ \text{Cos}\ 45 - Wa\ \text{Cos}\ 45 = 0$

$2X - 2Y - 2W - W = 0$

$2X - 2Y = 3W$ ——①

DC හි සමතුලිතතාවට,

$D\circlearrowleft Wa\ .\ \text{Sin}\ 45 + X\ .\ 2a\ .\ \text{Cos}\ 45 + Y\ .\ 2a\ \text{Sin}\ 45 = 0$

$2X + 2Y = -W$

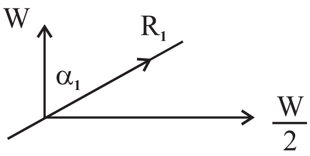
① + ② $4X = 2W$

$X = \frac{W}{2}$

② - ① $4Y = -4W$

$Y = -W$

C හිදී ප්‍රතික්‍රියාව (CD මතදී) R_1 නම්,



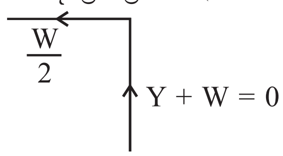
$R_1^2 = \left(\frac{W}{2}\right)^2 + W^2 = \frac{5W^2}{4}$

$R_1 = \frac{\sqrt{5}\,W}{2}$

$\tan \alpha_1 = \frac{X}{Y} = \frac{\frac{W}{2}}{W} = \frac{1}{2}$

$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

D හිදී ප්‍රතික්‍රියාව (CD මතදී) R_2 නම්,



D හිදී ප්‍රතික්‍රියාව තිරසට $\frac{W}{2}$ කි.

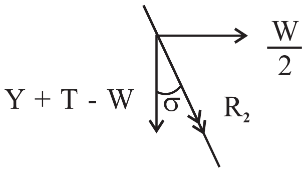
BC හි සමතුලිතතාවයට,

$B\circlearrowleft T\ .\ a\ \text{Cos}\ 45 - W\ .\ a\ .\ \text{Cos}\ 45 + Y\ .\ 2a\ \text{Cos}\ 45 - X\ .\ 2a\ \text{Cos Sin}\ 45 = 0$

$T - W + 2Y - 2X = 0$

$T = W + 2X - 2Y = W + W + 2W = 4W$

B හි ප්‍රතික්‍රියාව BC මතදී,



$R_2^2 = \left(\frac{W}{2}\right)^2 + (2W)^2 = \frac{W^2}{4} + 4W^2 = \frac{17W^2}{4}$

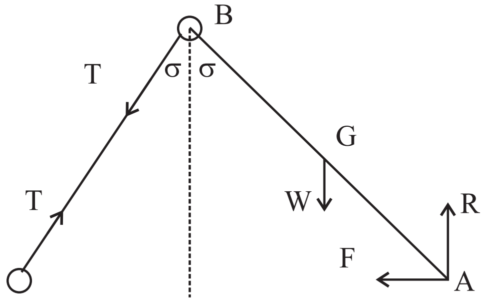
$R = \frac{\sqrt{17}\,W}{2}$

සිරසට ආනත කෝණය σ නම්,

$\text{tax}\ \sigma = \frac{W}{2 \times 2W} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sigma = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

PAPERMASTER.LK

15.



$BC = AB = 2a,\ BG = GA = a$

පද්ධතියේ සමතුලිතතාවයට,

$C \circlearrowleft R \times 4a \sin\sigma - W \,.\, 3a \sin\sigma = 0$

$R = \dfrac{3W}{4}$

AB දණ්ඩේ සමතුලිතයට,

$B \circlearrowleft R \times 2a \sin\sigma - F \,.\, 2a \cos\sigma - Wa \sin\sigma = 0$

$2F \cos\sigma = 2R \sin\sigma - W \sin\sigma$

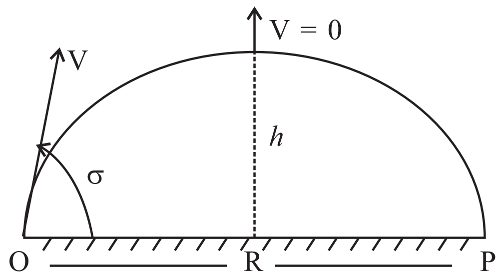
$F = \dfrac{W}{4} \tan\sigma$

සමතුලිතතාව සඳහා $\dfrac{F}{R} \leq \mu$ නිසා,

$\dfrac{W \,.\, \tan\sigma \,.\, 4}{4 \times 3W} \leq \mu$

$\tan\sigma \leq 3\mu$

16.



සිරස් චලිතයට $\uparrow V^2 = u^2 + 2as$

$u = V \sin\sigma$

$a = -g,\ s = h, v = o$

$0 = (V \sin\sigma)^2 - 2gh$

$h = \dfrac{V^2 \sin^2\sigma}{2g} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\sigma = \dfrac{2gh}{V^2}$

O සිට P ට කාලය t නම්, t කාලය තුළ $S\uparrow = 0$ තිරස් විස්ථාපනය R වේ.

$S = ut + \dfrac{1}{2}at^2$

$O = V \sin\sigma\, t - \dfrac{1}{2} gt^2$

$t = 0,\ t = \dfrac{2V}{g} \sin\sigma$

$\rightarrow S = ut$

$R = V \cos\sigma \dfrac{2V \sin\alpha}{g}$

$R^2 = \dfrac{4V^4}{g^2} \cos^2\sigma \,.\, \sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha$ සඳහා ① ට ආදේශයෙන්,

$R^2 = \dfrac{4V^4}{g^2}\left(1 - \dfrac{2gh}{V^2}\right)\dfrac{2gh}{V^2}$

$= \dfrac{4V^4 (V^2 - 2gh)\, 2gh}{g^2 \quad V^4}$

$g^2 R^2 = 8ghV^2 - 16g^2 h^2$

$16gh^2 - 8V^2h + gR^2 = 0$

$16gh^2 - 8V^2h + gR^2 = 0$ —— Ⓐ

තාත්වික මූල පැතීමට $\Delta \geq 0$ විය යුතු වේ.

$\Delta = (-8V^2)^2 - 4 \times 16g \times gR^2$

$= 64\,(V^4 - g^2R^2)$

$V^4 - g^2 R^2 > 0$ නම් $\Delta > 0$ වේ.

එවිට උපරිම උස h_1 හා h_2 යනුවෙන් 02 ක් ඇත.

Ⓐ හා h තාත්වික වීමට,

$\Delta_h \geq 0$

$V^4 - g^2R^2 \geq 0$

$V^4 \geq g^2R^2$

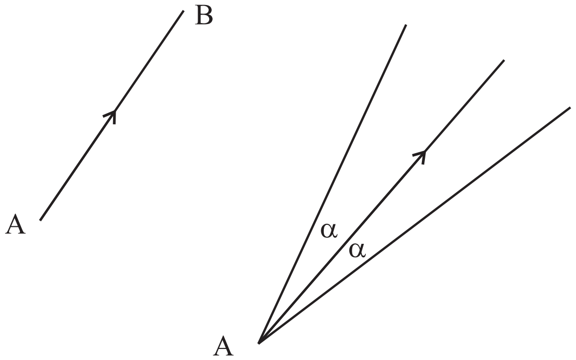
$V^4 \geq g^2R^2$

$R^2 \leq \dfrac{V^4}{g^2}$

$R \leq \dfrac{V^4}{g}$ $\qquad \therefore$ R උපරිම $= \dfrac{V^2}{g}$

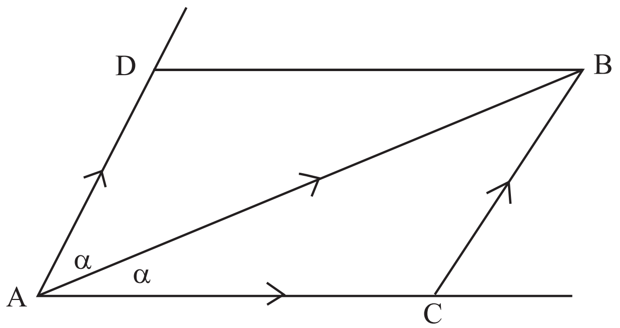
PAPERMASTER.LK

17. (a)



$\overrightarrow{AB}$ ය එය සමඟ α කෝණ සාදන දිශා දෙකකට විභේදනය කිරීමට ඇත.

$\overrightarrow{AB}$ විකර්ණය ද විභේදනය කළ යුතු α කෝණ සාදන දිශා දෙක යාබද පාද වන සේ ද ABCD රොම්බසය අඳින්න.



ABC ත්‍රිකෝණයෙන්,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$ බව ආදේශයෙන්,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}$ හි විභේදන කොටස් දෙක

$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ වේ.

රොම්බසයේ පාද නිසා $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}|$

(b)

$$\underline{R} = \sum_{r=1}^{n} \underline{P}_r$$

$-6\,\underline{i} = a\,\underline{i} + \underline{j} + 2\,b\,\underline{i} + 3\,a\,\underline{j} + i + b\,\underline{j}$

$= \underline{i}\,(a + 2b + 1) + \underline{j}\,(1 + 3\,a + b)$

$\underline{i}$ හි සංගුණක $-6 = a + 2b + 1$

$a + 2b = -7$

$\underline{j}$ හි සංගුණක $0 = 1 + 3a + b$

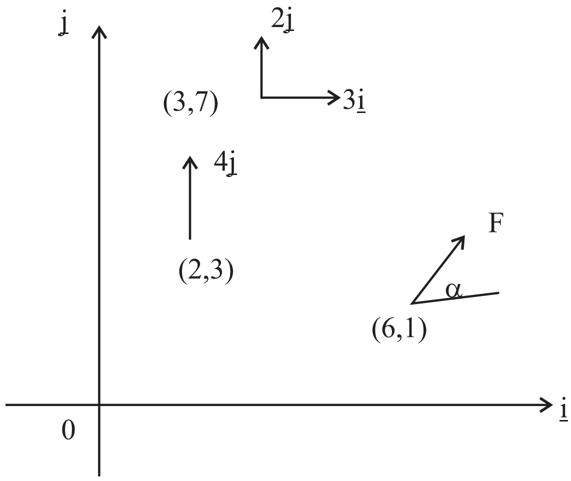
$3a + b = -1$

$a = 1\ ,\ b = -4$

පද්ධතිය බල යුග්මයකට තුල්‍ය නම් $\underline{R} = \underline{O}$

(i) $3\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{j} + \underline{F} = 0$

$F = -(3\underline{i} + 6\underline{j})$



(ii) වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

යුග්මයේ විශාලත්වය G නම්,

$G \circlearrowleft = 4 \times 2 + (2 \times 3 - 3 \times 7) + (3 \times 1 - 6 \times 6)$

$= 8 + 6 - 21 + 3 - 36 = -40$

PAPERMASTER.LK