අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උ/පෙළ) විභාගය

13 ශ්‍රේණිය

සංයුක්ත ගණිතය - I

පිළිතුරු පත්‍රය

A කොටස

A කොටසේ ප්‍රශ්න 10 ට ලකුණු 25 බැගින් ද B කොටසේ ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 150 බැගින් ද හිමිවේ . $10 \times 25 = 250$

$5 \times 150 = 750$

$\underline{\underline{1000}}$

01. $x^8 + 2x^7 + 3x^3 + px + q = (x + 2)(x - 1)\varnothing(x)$

$x = 1$ විට $p = q = 6$

$x = -2$ විට $-2p + q = 24$

විසඳීමෙන් $p = (-10)$, $q = 4$

02. $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$

$\div x^2 \quad 3x^2 - 4x - 14 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = 0$

$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$

$3(y^2 - 2) - 4y - 14 = 0$

$3y^2 - 4y - 20 = 0$

$(3y - 10)(y + 2) = 0$

$y = \frac{10}{3}, \; y = -2$

$y = \frac{10}{3}$ විට $x = \frac{1}{3}, 3$ $\quad y = -2$ විට $x = -1, -1$

03. පොදු මූලය α නම්, $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$ —— ①

$a\alpha^2 + \alpha - c = 0$ —— ②

① x α - ② $\quad a\alpha^2 - a\alpha^2 + ab - (a\alpha^2 + \alpha - c) = 0$

$\alpha = \frac{ab + c}{a^2 + 1}$ —— ③

① + ② x α $\quad \alpha^2 - a\alpha^2 + b + a^2\alpha^2 + a\alpha - ac = 0$

$\alpha = \frac{ac - b}{a^2 + 1}$ —— ④

③ හා ④ න් $\quad \frac{ac - b}{a^2 + b} = \left(\frac{ab + c}{a^2 + 1}\right)^2$

$(ac - b)(a^2 + 1) = (ab + c)^2$

04. $\frac{5 - x}{\lambda} = \frac{\lambda}{x + 7}$

$(5 - x)(x + 7) = \lambda^2$

$x^2 + 2x + 2 - 35 = 0$

මූල තාත්වික $\Delta \geq 0$ නම් විය යුතුය.

$\Delta = 2^2 - 4 . 1 . (\lambda^2 - 35) = 4(36 - \lambda^2)$ විය යුතුය.

$\Delta \geq 0$ වීමට $(36 - \lambda^2) \geq 0$ විය යුතුය.

$\lambda^2 - 36 \leq 0$ විය යුතුය.

$(\lambda - 6)(\lambda + 6) \leq 0$ විය යුතුය.

$-6 \leq \lambda \leq 6$

---

05. $\sum_{r=1}^{n} r . 2^{r-1} = 1 + (n-1) 2^n$

$n = 1$ LHS = 1 , RHS = 1 $n = 1$ ට සත්‍ය වේ.

$n = p$ ට සත්‍ය යැයි උපකල්පනයෙන්,

$$\sum_{r=1}^{p} r . 2^{r-1} = 1 + (p-1) 2^p$$

$n = p + 1$ ට සත්‍ය බව සාධනය කරමු.

$$\sum_{r=1}^{n} r . 2^{r-1} + (p+1) 2^{p+1-1} = 1 + (9-1)2^p + (p+1) \times 2^p$$

$$= 1 + 2^p (p - 1 + p + 1) = 1 + 2^p . 2^p$$

$$= 1 + [(p+1) - 1]2^{p+1}$$

$\therefore$ $n = p$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n = p + 1$ ට ද සත්‍ය වේ.

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයෙන් සියළු ධන නිඛිල n සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

---

06. $y = \text{Sin}(m\,\text{Sin}^{-1}x)$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Cos}(m\,\text{Sin}^{-1}x) \times \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

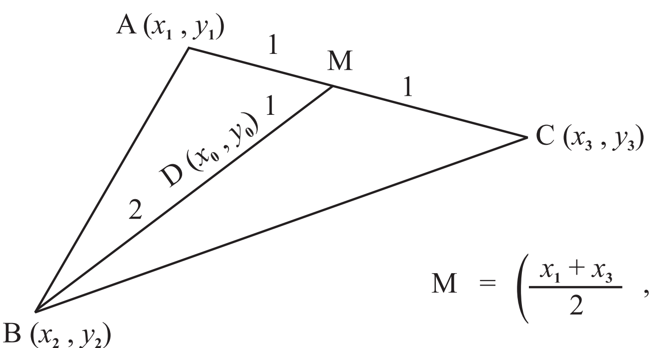
$$\sqrt{1-x^2} . \frac{dy}{dx} = m\ \text{Cos}\ (m\,\text{Sin}^{-1}x)$$

නැවතත් අවකලනයෙන්, $\frac{d^2y}{dx^2}(1-x^2) - x\frac{dy}{dx} = -m^2\ \text{Sin}(m\,\text{Sin}^{-1}x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1-x^2) - x\frac{dy}{dx} = -m^2\ \text{Sin}(m\,\text{Sin}^{-1}x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1-x^2) - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$$

07.



$$M = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$$

D කේන්ද්‍රය BM රේඛාව 2 : 1 අනුපාතයට බෙදන නිසා

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\therefore D \equiv \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

08. $\underbrace{2\tan^{-1}x}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}y}_{\beta} = \frac{\pi}{2}$ නම් ,

$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$\tan 2\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$

$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{y} \Rightarrow 1 - x^2 = 2xy \Rightarrow 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$\therefore (x+y)^2 = 1 + y^2$

---

09. $\frac{4a+b}{2a+b} = 7$

$a = -\frac{3b}{5}$

$\frac{5a+b}{5a-b} = \frac{-3b+b}{-3b-b} = \frac{-2b}{-4b} = \frac{1}{2}$

$\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} = \frac{b^2 - \frac{9b^2}{25}}{b^2 + \frac{9b^2}{25}} = \frac{8}{17}$

---

10. හමුදා භටයන් 8 දෙනා කණ්ඩායම් තුනකට වෙන් කළ හැකි ක්‍රම 4, 2, 2 , 3, 3, 2

4 2 2 ක්‍රමයට $^8C_4 \text{ x } ^4C_2 \text{ x } ^2C_2 = \frac{8}{\underline{|4}\ \underline{|4}} \text{ x } \frac{4}{\underline{|2}\ \underline{|2}} \text{ x } \frac{1}{\underline{|2}} = 210$

3 3 2 ක්‍රමයට $^8C_3 \ ^5C_3 \ ^2C_2 = \frac{8}{\underline{|5}\ \underline{|3}} \text{ x } \frac{5}{\underline{|2}\ \underline{|3}} \text{ x } \frac{1}{\underline{|2}} = 280$

හමුදා භටයන් 3 ට වෙන් කළ හැකි ආකාර = 210 + 280 = 490

කණ්ඩායම් 3 ක් ගොඩනැගිලි 3 කට යෙදවිය හැකි ආකාර $= \underline{|3} = 6$

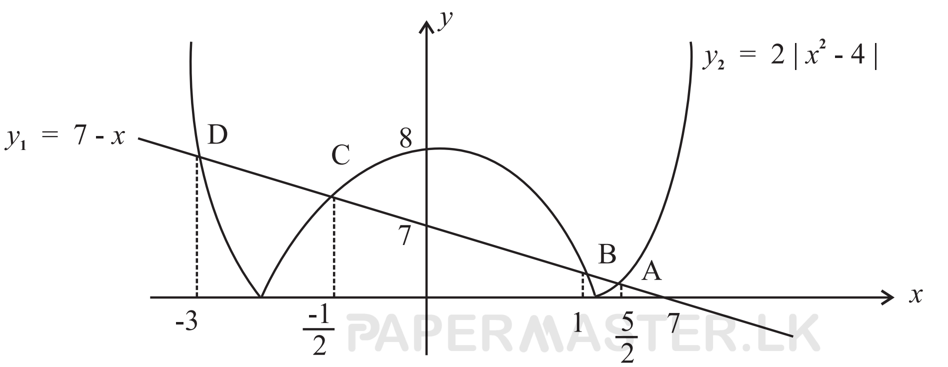
හමුදා භටයන් ගොඩනැගිලි 3 මුර කිරීමට යෙදවිය හැකි ආකාර ගණන = 490 x 6 = 2940

සංයුක්ත ගණිතය - I

B කොටස

11. $7 - x > 2|x^2 - 4|$

$y_1 = 7 - x$, $y_2 = 2|x^2 - 4|$ ප්‍රස්ථාර සලකමු.



$y_1 \geq y_2$ වන්නේ C සහ D , හා A සහ B අතර වේ.

A හා D සෙවීමට

$2(x^2 - 4) = 7 - x$

$(2x - 5)(x + 3) = 0$

$x = \underset{\text{D}}{-3}\ ,\ \underset{\text{A}}{\frac{5}{2}}$

B හා C සෙවීමට

$-2(x^2 - 4) = 7 - x$

$(2x + 1)(x - 1) = 0$

$x = \underset{\text{C}}{-\frac{1}{2}}\ ,\ \underset{\text{B}}{+1}$

$\therefore$ අවශ්‍ය පරාසය $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ හා $-3 \leq x \leq -\frac{1}{2}$

$U_r = r(r + 1)\ ,\ V_r = Ar^2 + Br + C$

$U_r = V_r - 3V_{r-1}$

$r(r + 1) = Ar^2 + Br + C - 3[A(r - 1)^2 + B(r - 1) + C]$

$r^2 + r = -2Ar^2 + (6A - 2B)r - (-3A + 3B - 2C]$

$A = -\frac{1}{2}\ ,\ 1 = -2B + 6A$

$0 = -3A + 3B - 2C$

$B = -2\ ,\ C = -\frac{9}{4}$

දී ඇති ශ්‍රේණියේ r වන පදය $\frac{r(r+1)}{3^r}$ නිසා,

$U_r = r(r + 1)$

$U_r = V_r - 3V_{r-1}$ නිසා,

$\frac{U_r}{3^r} = \frac{V_r}{3^r} - \frac{V_{r-1}}{3^{r-1}}$

$r = 1$ විට $\frac{U_1}{3^1} = \cancel{\frac{V_1}{3^1}} - \frac{OV_0}{3^0}$

$r = 2$ විට $\frac{U_2}{2} = \cancel{\frac{V_2}{3^2}} - \cancel{\frac{V_1}{3^1}}$

$r = n-1$ විට $\frac{Un-1}{n-1} = \cancel{\frac{V_{n-1}}{3^{n-1}}} - \cancel{\frac{V_{n-2}}{3^{n-2}}}$

$r = n$ විට $\frac{U_n}{3^n} = \frac{V_n}{3^n} - \cancel{\frac{V_{n-1}}{3^{n-1}}}$

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{U_r}{3^r} = \frac{V_n}{3^n} - V_0$$

$$= \frac{An^2 + Bn + C}{3^n} - C$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - n^2 - 2n - \frac{9}{4}}{3^n} + \frac{9}{4}$$

$$= \frac{-2n^2 + 8n - 9}{4 \times 3^n} + \frac{9}{4}$$

(12) (a) $y = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \ldots\ldots}}}$

$y = \sqrt{\tan x + y}$

$y^2 = \tan x + y$

$2y \cdot \frac{dy}{dx} = \text{Sec}^2 x + \frac{dy}{dx}$

$(2y - 1)\frac{dy}{dx} = \text{Sec}^2 x$

(b) $x^p y^q = (x + y)^{p+q}$

දෙපසම log ගැනීමෙන්,

$p \log x + q \log y = (p + q) \log(x + y)$

x විෂයෙන් දෙපසම අවකලනයෙන්,

$$p \cdot \frac{1}{x} + q \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = (p+q)\frac{1}{(x+y)}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

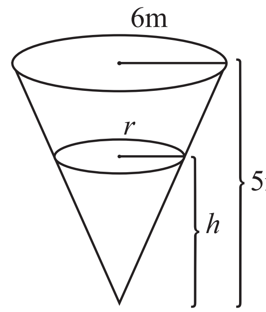
$$\frac{dy}{dx} \times \left(\frac{q}{y} - \frac{p+q}{x+y}\right) = \frac{p+q}{x+y} - \frac{p}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}\left[\frac{q(x+y) - y(p+q)}{y(x+y)}\right] = \frac{qx - py}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\left(\frac{qx - py}{y}\right) = \frac{qx - py}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

(c)



කාලය t = t විට ටැංකිය තුළ ජලයේ ගැඹුර h ද, ජල පරිමාව V යැයි ද ගනිමු. සමරූපී ත්‍රිකෝණ සැලකීමෙන්,

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{5}$$

$$r = \frac{6h}{5}$$

$$r = \frac{6h}{5}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{6h}{5}\right)^2 h = \frac{12}{25}\pi h^3$$

$$V = 12\pi h^3$$

එ විෂයෙන් අවකලනයෙන්, $\frac{dv}{dt} = \frac{12\pi}{25} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

$$36 = \frac{12\pi}{25} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{25}{\pi h^2}$$

ගැඹුර 3m වන විට ජල පෘෂ්ඨයට නඟින සීඝ්‍රතාව,

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=3} = \frac{25}{\pi \cdot 3^2} = \frac{25}{9\pi}\ mh^{-1}$$

(13) (a) l_1 තුළින් P හි ප්‍රතිබිම්බය R නම්,

$R = (3 + 2t, \lambda - t)$ මෙහි $t = -2\left(\frac{6 - \lambda + 2}{5}\right) = \frac{-2}{5}(8 - \lambda)$

$\therefore R \equiv \left(3 - \frac{4}{5}(8 - \lambda), \lambda + \frac{2}{5}(8 - \lambda)\right)$ —— ①

l_2 තුළින් Q හි ප්‍රතිබිම්බය S නම්,

$S = (-2 + t, 2 + 3t)$ මෙහි $t = -2\left(\frac{-2 + \mu + 6}{10}\right) = \frac{-1}{5}(4 + \mu)$

$\therefore S \equiv \left(-2 - \frac{1}{5}(4 - \mu), 2 - \frac{3}{5}(4 - \mu)\right)$ —— ②

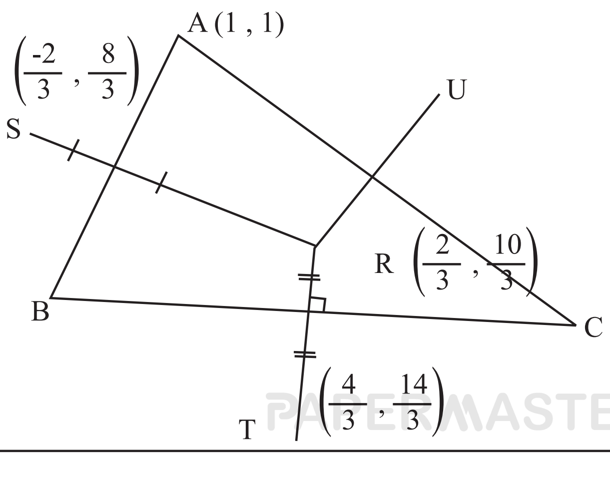
$R \equiv S$ බව දී ඇත. ∴ ① හා ② න්,

$3 - \frac{4}{5}(8 - \lambda) = -2 - \frac{1}{5}(4 + \mu)$ —— ③

$\lambda + \frac{2}{5}(8 - \lambda) = 2 - \frac{3}{5}(4 + \mu)$ —— ④

③ හා ④ විසඳීමෙන් $\lambda = 3$, $\mu = -9$ ලැබේ.

(b)



RS අනුක්‍රමණය $= \dfrac{\frac{8}{3} - \frac{10}{3}}{\frac{-2}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

∴ AB හි අනුක්‍රමණය $= -2$

AB හි සමීකරණය $= \frac{y - 1}{x - 1} = -2$

$2x + y - 3 = 0$ වේ.

RT සමීකරණය

$$\frac{y - \frac{10}{3}}{x - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{10}{3} - \frac{14}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}$$

$2x - y + 2 = 0$

RT අනුක්‍රමණය = 2 ද $BC \perp RT$ ද නිසා BC හි අනුක්‍රමණය = $-\dfrac{1}{2}$

අනුපාත ප්‍රමේයයන්, $P = (1\ ,\ 4)$

BC සමීකරණය $\dfrac{y-4}{x-1} = -\dfrac{1}{2}$

$x + 2y - 9 = 0$

C යනු RT මත B හි ප්‍රතිබිම්බයයි.

AB හා BC සමීකරණ විසඳීමෙන්, $B \equiv (-1\ ,\ 5)$

C යනු RT මත B හි ප්‍රතිබිම්බයයි.

$C \equiv (-1 + 2t\ ,\ 4 - 1)$

මෙහි $t = -2\left(\dfrac{2(-1) - 5 + 2}{2^2 + (-1)^2}\right)$

$t = 2$

$C \equiv (3\ ,\ 2)$

(14) (a) $g_1 = 1,\ f_1 = 3\ ,\ c_1 = -2,\ g_2 = 2,\ f_2 = -4,\ c_2 = \lambda$ නම්,

ප්‍රලම්භව ඡේදනය වන විට, $2(g_1g_2 + f_1f_2) = c_1 + c_2$

$2\,[1 \times 2 + 3 \times -4] = -2 + \lambda$

$\lambda = -18$

(b) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fg + c = 0$ අවශ්‍ය වෘත්තය නම්,

S කේන්ද්‍රය OX මත නිසා $f = 0$ —— ①

$\therefore$ S කේන්ද්‍රය P නම් $P \equiv (-g\ ,\ O)$

S හි අරය r_1 නම් $r_1 = \sqrt{g^2 - c}$

S_1 හි කේන්ද්‍රය Q නම්, $Q \equiv (3\ ,\ 0)$

S_1 හි අරය r_2 නම් $r_2 = \sqrt{3^2} = 3$

S වෘත්තය S_1 බාහිරව ස්පර්ශ කරන නිසා,

$PQ = r_1 + r_2$

$3 + g = \sqrt{g^2 - c} + 3$

$g = \sqrt{g^2 - c}$

$g^2 = g^2 - c$

$\therefore\ c = 0$ —— ②

S හා S_1 ප්‍රලම්භ නිසා, $2(g_1\,g_2 + f_1\,f_2) = c_1 + c_2$ මගින්,

$2[-2\,(-g) + 0\,(4)] = 8 + 0$

මින් $g = 2$ බව ලැබේ.

$\therefore$ ①, ② හා ③ න් S හි සමීකරණය

$x^2 + y^2 + 4x = 0$

(15) $f(-x) = f(x)$

$$\int_{-a}^{0} f(-x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

$$= I_1 + I_2$$

$I_1 = \displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx$ $\quad x = -y$ ආදේශයෙන්,

$x = -a \rightarrow y = a$

$x = 0$ විට $\rightarrow y = a$

$dx = -dy$

$$I_1 = \int_{a}^{0} f(-y)(-dy)$$

$$I_1 = -\int_{-a}^{0} f(-y)\, dy$$

$$\int_{a}^{0} f(-y)\, dy$$

$$\int_{a}^{0} f(y)\, dy \quad [\therefore f(-x) = f(x)]$$

$\int_{a}^{a} f(x)\, dx$ අනුකූල විචල්‍යයෙන් ස්වායත්ත නිසා,

$$= I_2$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2}$$

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)} + \sqrt{1-(-x)} + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(-x)} + \sqrt{1-(-x)} + 2}$$

$$\therefore f(-x) = f(x)$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2}\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2}\, dx$$

$x = \text{Sin } 4\text{ t}$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Cos } 4\text{ t} \times 4$$

$dx = 4 \text{ Cos } 4\text{t} . \text{dt}$

$x \to 0 \quad \text{t} \to 0$

$x \to 1 \quad \text{t} \to \frac{\pi}{8}$

$$1 + x = 1 + \text{Sin } 4\text{t}$$
$$= (\text{Sin}^2 2\text{t} + \text{Cos}^2 2\text{t}) + 2\text{Sin}^2\text{t} . \text{Cos } 2\text{t}$$
$$= (\text{Sin } 2\text{t} + \text{Cos}2\text{t})^2$$

එලෙසම $1 - x = 1 - \text{Sin } 4\text{t}$

$$= (\text{Sin } 2\text{t} + \text{Cos}2\text{t})^2$$

$\text{t} = 0$ සිට $\frac{\pi}{8}$ විට

$2\text{t} \to 0$ සිට $\frac{\pi}{4}$ දක්වා යයි.

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ විට $\text{Cos } \theta > \text{Sin } \theta$ වේ.

$\therefore \sqrt{1 - \text{x}} > 0$ බැවින් $\sqrt{\text{Sin } 2\text{t} - \text{Cos } 2\text{t})^2} > 0$

$|\text{ Sin } 2\text{t} - \text{Cos } 2\text{t} \,| = \text{Cos } 2\text{t} - \text{Sin } 2\text{t}$

$$= 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2}\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{4 \text{ Cos } 4\text{t}\, dt}{(\text{Sin } 2\text{t} + \text{Cos } 2\text{t}) + (\text{Cos } 2\text{t} - \text{Sin } 2\text{t}) + 2}$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{4 \text{ Cos } 4\text{t}\, dt}{2 \text{ Cos } 2\text{t} + 2} \qquad = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{4 \text{ Cos } 4\text{t}\, dt}{2\,(1 + \text{Cos } 2\text{t})}$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2 \text{ Cos } 4\text{t}}{1 + \text{Cos } 2\text{t}} . \text{dt} \qquad = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2 \text{ Cos } 4\text{t}}{2 \text{ Cos}^2 \text{ t}} \text{ dt}$$

$$\text{Cos } 4\text{t} = 2 \text{ Cos}^2 \text{ } 2\text{t} - 1 = 2[\text{Cos}^2 \text{ t} - 1]^2 - 1$$
$$= 8 \text{ Cos}^4 \text{ t} - \text{t} - 8 \text{ Cos}^2 \text{ t} + 1$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{8\,Cos^2 t - 8\,Cos^2 t + 1}{Cos^2 t}\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} 8\,Cos^2 t - 8 + Sec^2 t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} 4\,(1 + Cos\,2t) - 8 + Sec^2 t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} 4\,Cos\,2t + Sec^2 t - 4\,dt$$

$$= 2\left[\frac{4\,Sin\,2t}{2} + \tan t - 4t\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$= 2\left[2\,Sin\,\frac{\pi}{4} - 2\,Sin\,0 + \tan\frac{\pi}{8} - \tan 0 - 4\left(\frac{\pi}{8} - 0\right)\right]$$

$$= 2\left[2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 4\sqrt{2} - \pi - 2$$

---

(16) (a) $Sin\,2x + 2\,Sin\,x - Cos\,x - 1 = 0$

$2\,Sin\,x\,.\,Cos\,x + 2\,Sin\,x - Cos\,x - 1 = 0$

$2\,Sin\,x\,[Cos\,x + 1] - 1\,[Cos\,x + 1] = 0$

$(Cos\,x + 1)\,(2\,Sin\,x - 1) = 0$

$1 + Cos\,x = 0$ හෝ $2\,Sin\,x - 1 = 0$

$Cos\,x = -1$

$Cos\,x = Cos\,\pi$

$x = 2n\pi \pm \pi \quad n \in Z$

$Sin\,x = \frac{1}{2}$

$Sin\,x = Sin\,\frac{\pi}{6}$

$x = m\pi + (-1)^m\,\frac{\pi}{6} \quad m \in Z$

$3\tan^2\theta - 2\,Sin\,\theta = 0$

$3\,.\,\frac{Sin^2\theta}{Cos^2\theta} - 2\,Sin\,\theta = 0$

$Sin\,\theta\left[\frac{3\,Sin^2\theta}{Cos^2\theta} - 2\right] = 0$

$Sin\,\theta = 0$ හෝ $\frac{3\,Sin^2\theta}{Cos^2\theta} = 2$

$\theta = n\pi + (-1)^n\,.\,0$

$\theta = n\pi \,:\, n \in Z$

$3\,Sin\,\theta = 2\,Cos^2\theta$

$2\,Sin\,\theta + 3\,Sin\,\theta - 2 = 0$

$(2\,Sin^2\theta + 1)\,(Sin\,\theta + 2) = 0$

$2\,Sin\,\theta - 1 = 0$

$Sin\,\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = m + (-1)^m\,\frac{\pi}{6} \quad , \quad m \in Z$

(b) $\frac{(a - b)\,Cos\,A + C}{a - b + Cos\,A} = \frac{a - b}{c}$

$(a - b)\,C\,Cos\,A + c^2 = (a - b)\,(a - b + c\,Cos\,A)$

$ac\,Cos\,A - bc\,Cos\,A + c^2 = a^2 - b^2 + ac\,Cos\,A + bc\,Cos\,A$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,Cos\,A$

(c) $A + B + C = \pi$

$A + B = \pi - C$

$\tan\,(A + B) = \tan\,(\pi - C)$

$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A - \tan B} = -\tan\,C$

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\,.\,\tan B\,.\,\tan C$

(17) $x^2 + ax + b = 0$ හි මූල α , β වේ.

$\alpha + \beta = -a$

$\alpha\beta = a$ ——— ①

$x^2 + cx + d = 0$ හි මූල α^2 , β වේ.

$\alpha^2 + \beta = -c$

$\alpha^2\beta = d$ ——— ②

①/② $\frac{\beta^2}{\beta} = \frac{b^2}{d}$

$\beta = \frac{b^2}{d}$

β , $x^2 + ax + b = 0$ හි මූලයක් බැවින්,

$$\left(\frac{b^2}{d}\right)^2 + a\left(\frac{b^2}{d}\right) + b = 0$$

$b^4 + ab^2 d + bd^2 = 0$ ——— ③

$\div b$ $b^3 + abd + d^2 = 0$

$x^2 + cx + d = 0$ මූලයක් බැවින්,

$$\left(\frac{b^2}{d}\right)^2 + c\left(\frac{b^2}{d}\right) + d = 0$$

$b^4 + cb^2d + d^3 = 0$ ——— ④

③-④ $ab^2d - cb^2d + bd - d^3 = 0$

$\div d$ $d^2 - bd + d^2 (c - a) = 0$

$b^2 (a - c) = d(d - b)$

$$b^2 = d\,\frac{(d - b)}{(a - c)}$$

③ ට ආදේශයෙන්,

$$\left\{\frac{d(d - b)}{(a - c)}\right\}^2 + ad\left\{\frac{d(d - b)}{(a - c)}\right\} + bd^2 = 0$$

$d^2 (b - d)^2 + ad^2 (a - c)(d - b) + bd^2 (a - c)^2 = 0$

$\div d^2$

$b(a - c)^2 + a(a - c)(d - b) + (b - d)^2 = 0$

සංයුක්ත ගණිතය - II

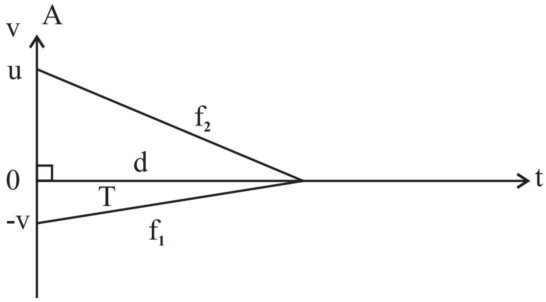
A කොටස

A කොටසේ ප්‍රශ්න 10 ට ලකුණු 25 බැගින් ද B කොටසේ ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 150 බැගින් ද හිමිවේ . 10 x 25 = 250

5 x 150 = 750

1000

01.



$T = \frac{u}{f_2} = \frac{v}{f_1}$

වර්ගඵලය $= d = \frac{1}{2} \times T \times (u + v)$

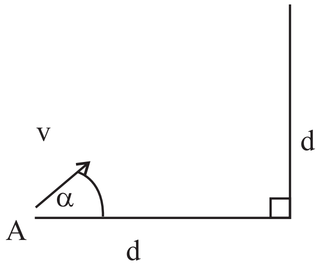
$2d = Tu + Tv$

$2d = \frac{u}{f_2} . u + \frac{v}{f_1} v$

$2d = \frac{f_1u^2 + f_2v^2}{f_1f_2}$

$\therefore v^2f_2 + u^2f_1 = 2f_1f_2d$

02.



$A \rightarrow B$,

$\rightarrow S = u + \frac{1}{2} at^2$

$d = v \cos\alpha \,.\, t$

$A \rightarrow B \uparrow S = ut + \frac{1}{2} gt^2$

$d = v \sin\alpha \text{ x } t - \frac{1}{2} gt^2$

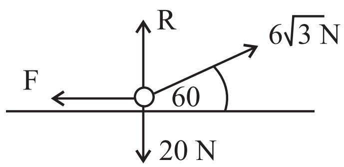
$d = v \sin\alpha \left(\frac{d}{v \cos\alpha}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{d}{v \cos\alpha}\right)^2$

$1 = \tan\alpha - \frac{gd}{2v^2} \sec^2\alpha$

$\frac{gd}{2v^2} (\tan^2\alpha + 1) = \tan\alpha - 1$

$v^2 = \frac{gd (\tan^2\alpha + 1)}{2 (\tan\alpha - 1)}$

03.



ලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව R ද, ඝර්ෂණ බලය T ද නම්,

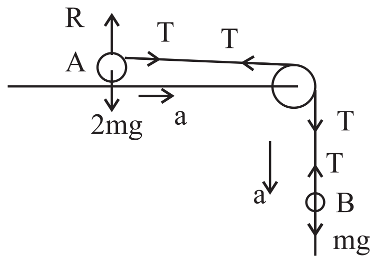
$\leftarrow F - 6\sqrt{3} \cos 60 = 0$

$F = 3\sqrt{3}$ N

$\uparrow R + 6\sqrt{3} \sin 60 - 20 = 0$

$R = 11$ N

04.



තන්තුවල ආතතිය T ද, පොදු ත්වරණය a ද නම්,

$F = ma$

A ට $\rightarrow T = 2ma$

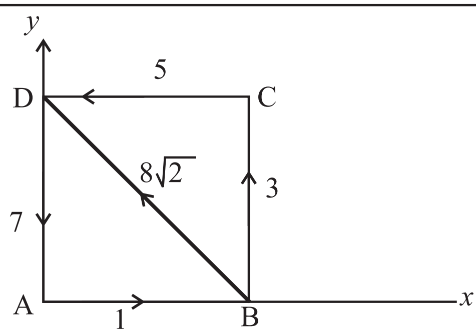
B ට $\downarrow mg - T = ma$

$T = \frac{2mg}{3}$

$\therefore$ පොදු ත්වරණය $\frac{g}{3}$ ms^{-2} , ආතතිය $\frac{2mg}{3}$

කප්පිය මත බලය $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ mg N

05.



$\rightarrow x = 1 - 5 - 8\sqrt{2} \cos 45 = -12$

$\uparrow y = 3 - 7 + 8\sqrt{2} \sin 45 = 4$

$\therefore$ සම්ප්‍රයුක්තය $= \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$ N

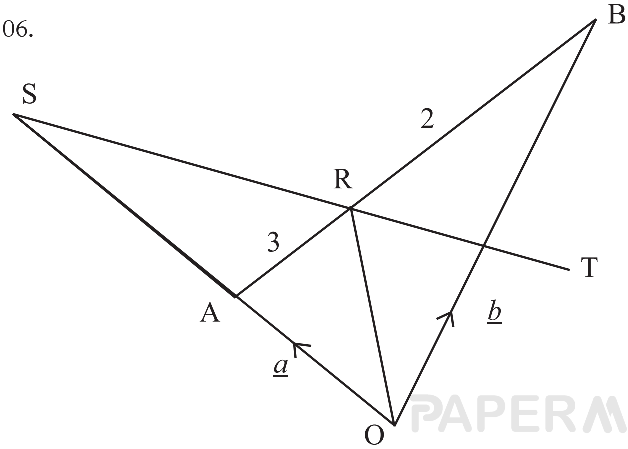
$A \circlearrowleft \; G = 3 \text{ x } a + 5 \text{ x } a + 8\sqrt{2} \text{ x } a \cos 45 = 16a$

P (x , y) සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව මත ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.

$P \circlearrowleft \; -12y - 4x + 16a = 0$

$\therefore$ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය $x + 3y - 4a = 0$

06.



AR : RB = 3 : 2

$\therefore \overrightarrow{OR} = \frac{2\underline{a} + 3\underline{b}}{5}$

S, R, T ඒකරේඛීය නිසා, $\overrightarrow{SR} = \lambda \,.\, \overrightarrow{ST}$

$\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} = \lambda (\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OS})$

$\frac{2\underline{a} + 3\underline{b}}{5} - 3\underline{a} = \lambda \frac{(9\underline{b} - 24\underline{a})}{5} - \lambda \,.\, 3\underline{a}$

$2\underline{a} + 3\underline{b} - 15\underline{a} = 9\lambda\underline{b} - 24\lambda\underline{a} - 15\lambda\underline{a}$

$3\underline{b} - 13\underline{a} = 9\lambda\underline{b} - 39\lambda\underline{a}$

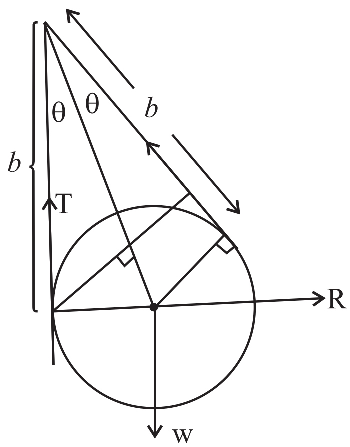
$\underline{b}$ වල $3 = 9\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

$\underline{a}$ වල $-13 = -39\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

$$SR = \frac{1}{3} ST \Rightarrow \frac{SR}{ST} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{SR}{ST - SR} = \frac{1}{3-1} \Rightarrow \frac{SR}{RT} = \frac{1}{2}$$

07.



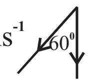
$B \curvearrowright Wa = T . b . \text{Sin } 2\theta$

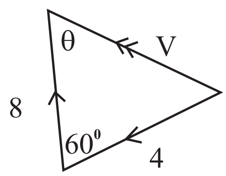
$$T = \frac{aw}{b} . \frac{1 + \tan^2\theta}{2 \tan\theta} = \frac{aw}{b}\left(\frac{1 + \frac{a^2}{b^2}}{2\frac{a}{b}}\right)$$

$$= \frac{w}{2}\left(\frac{a^2 + b^2}{b^2}\right)$$

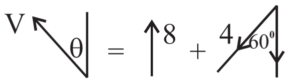
08. සයිකල්කරුගේ ප්‍රවේගය $V_{C,E} = \uparrow 8\ ms^{-1}$

සුළගේ ප්‍රවේගය $V_{wc} = 4\ ms^{-1}$





$V_{(W,E)} = V_{(W,C)} + V_{(C,E)}$



$\leftarrow V \text{ Sin } \theta = 4 \text{ Sin } 60 = 2\sqrt{3}$

$\uparrow V \text{ Cos } \theta = 8 - 4 \times \frac{1}{2} = 6$

$V = \sqrt{12 + 36} = 4\sqrt{3}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{12\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^0$

සුළඟ $4\sqrt{3}\ ms^{-1}$ වේගයෙන් දකුණින් 30^0 ක් නැගෙනහිර දිශාවට වේ.

09. අවසාන ප්‍රවේගය $V = u + at$

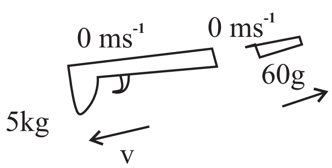
$4 + 2 \times 5 = 14\ ms^{-1}$

ආරම්භයේ දී චාලක ශක්තිය $= \frac{1}{2} \times 2 \times 4^2 = 16J$

අවසානයේ දී චාලක ශක්තිය $= \frac{1}{2} \times 2 \times 14^2 = 196J$

චාලක ශක්ති වැඩිවීම $= 196 - 16 = 180J$

10.



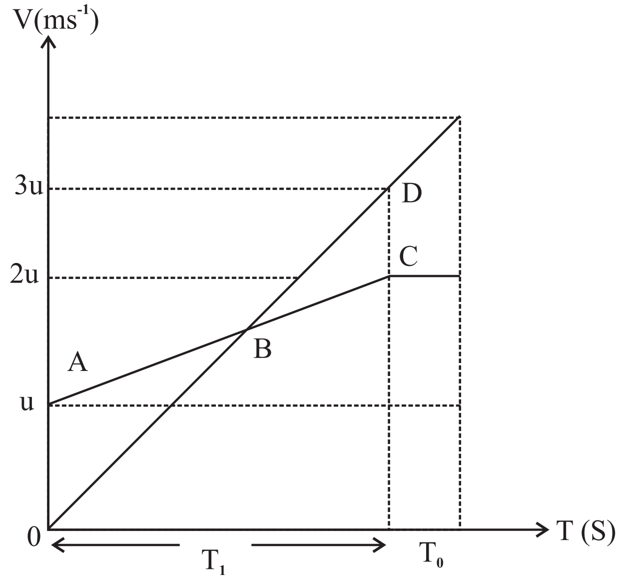
රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමයට අනුව,

$500 \times 0.06 + 5 \times (-V) = 0$

$V = 6\ ms^{-1}$

B කොටස

(01)



දුම්රිය සඳහා,

$$\frac{2u - u}{T_1} = 3f$$

$$T_1 = \frac{u}{3f}$$

මෝටර් රථය,

$$\frac{4u - 0}{T_2} = 9f$$

$$T_2 = \frac{4u}{9f}$$

$$T_2 = \frac{4}{3}T_1$$

$$\therefore T_2 > T_1$$

∴ ප්‍රථමයෙන් දුම්රිය උපරිම ප්‍රවේගයට ළඟා වේ.

මෝටර් රථයට, $\dfrac{V_1 - 0}{T} = 9f$

$$V_1 = 9f \times \frac{u}{3f} = 3u$$

$$CD = 3u \equiv 2u = u = OA$$

$$\therefore OAB\ \Delta \ \ BCD\ \Delta$$

∴ දුම්රිය උපරිම ප්‍රවේගය ලබාගන්නා තෙක් විස්ථාපනයෙන් සමාන වේ. ආරම්භක පිහිටුමට සමාන පිහිටුමක් දුම්රිය ප්‍රවේගය ලබාගන්නා විට පවතී.

$$\frac{4u - 3u}{T_0} = 9f$$

$$T_0 = \frac{u}{9f}$$

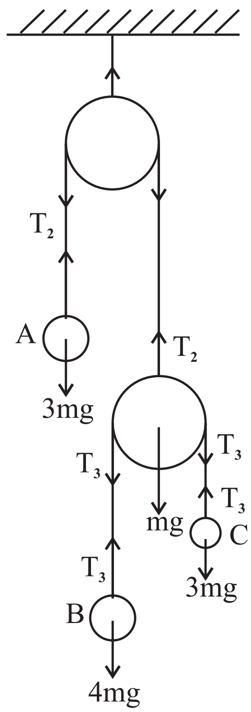
∴ T_0 කාලය තුළ ගමන් කළ දුර = මෝටර් රථයේ දිග

$$= \frac{1}{2}(2u + u) \times T_0$$

$$9l = \frac{3u}{2} \times \frac{u}{9f}$$

$$l = \frac{u^2}{54f}$$

(02)



$a_{A,E} = \downarrow F$

$a_{D,E} = \uparrow F$

$a_{B,D} = \downarrow f$

$a_{C,D} = \uparrow f$

$a_{B,E} = \downarrow (f - F)$

$a_{C,E} = \uparrow (f + F)$

$F = ma$

A ට $\uparrow 8mg - T_2 = 8\,mF$ ——— ①

B ට $T_2 - 2T_3 - mg = mF$ ——— ②

C ට $4mg - T_3 = 4\,m\,(f - F)$ ——— ③

D ට $T_3 - 3mg - = 3\,m\,(f + F)$ ——— ④

(1) $4 \times (4) - 3 \times (3)$

$7\,T_3 - 24\,mg = 24\,mF$ ——— ⑤

$2 \times$ ⑤ $+ 7 \times$ ② $+ 7 \times$ ①

$-48\,mg - 7mg + 56mg = 48mF + 7mF + 56mF$

$mg = 111mF$

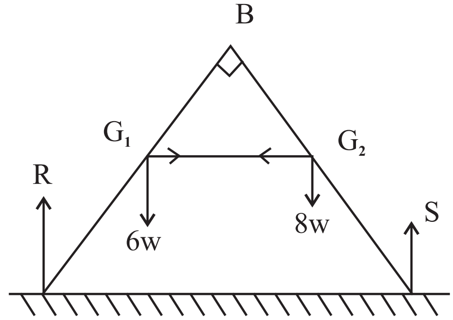
$$F = \frac{g}{111}$$

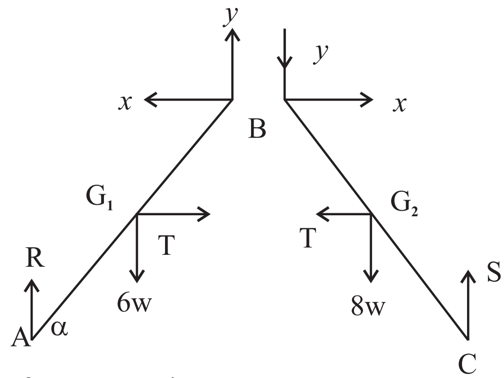
(ii) ⑤ න් $7\,T_3 = 24\,m\,(g + F)$

$$= 24\,m\,(g + \frac{g}{111})$$

$$7\,T_3 = \frac{24 \times 112\,mg}{111} = \frac{384\,mg}{111}$$

(03)





$AB = 6a$, $BC = 8a$, $BG = 3a$, $BG_2 = 4a,$ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$G_1G_2 = 5a$, $A\hat{B}C = 90^0$, $B\hat{A}C = \alpha$ නම්

පද්ධතියේ සමතුලිතතාවයට

A↶ S

$(6a \cos\alpha + 8a \sin\alpha) - 6w \cdot 3a \cos\alpha - 8w\,(6a \cos\alpha + 4a \sin\alpha) = 0$

$50S = 54w + 272w = 326w$

$S = \frac{326w}{50} = \frac{163w}{25}$

BC හි සමතුලිතතාවයට,

B↶ $8 - 4a \sin\alpha = T \times 4a \cos\alpha$

$4T \times \frac{3}{5} = 4 \times \frac{4}{5} \times \frac{163}{25} w - 8w \times 4 \times \frac{4}{5}$

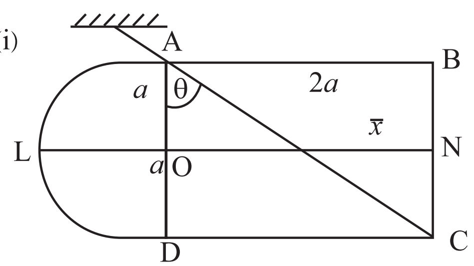
$3T = \frac{148w}{25} \Rightarrow T = \frac{148w}{75}$

$\overrightarrow{X} - T = 0 \quad X = T = \frac{148w}{75}$

$\uparrow S - 8w - y = 0$

$y = S - 8w = \frac{163w}{25} - 8 = \frac{-37w}{25}$

(04) (i)



සමමිතිය අනුව ගු.කේ. LON මතුවේ.

වස්තුව	ස්කන්ධය	ගුරුත්ව දුර (N සිට)
ABCD	$4a^2P$	a
ALD	$\frac{\pi a^2}{2}P$	$\left(\frac{4a}{3\pi} + 2a\right)$
සංයුක්ත	$\frac{a^2}{2}\,P\,(8+\pi)$	$\bar{x}$

N වටා

සංයුක්ත වස්තුවේ ඝූර්ණය = කොටස්වල ඝූර්ණ ඓක්‍යය

$$\frac{a^2}{2}\,P\,(8+\pi)\,\bar{x} = 4a^2\,pa + \frac{\pi a^2}{2}\,p\left(\frac{4a}{3\pi} + 2a\right)$$

$$(8+\pi)\,\bar{x} = 8a + \pi\left(\frac{4a + 6\pi a}{3\pi}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{a}{3}\quad\frac{24 + 4 + 6\pi}{8+\pi}$$

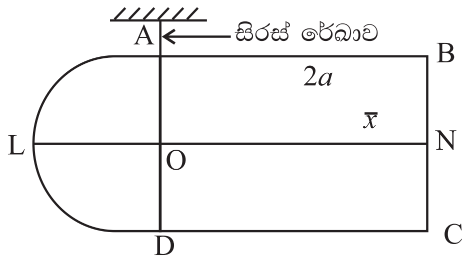
$$\bar{x} = \frac{2a\,(14 + 3\pi)}{3\,(8+\pi)}$$

(ii) AD සිරසට ආනත කෝණය θ නම්,

$$\tan\theta = \frac{2a - \bar{x}}{a} = 2 - \frac{2\,(14+3\pi)}{3\,(8+\pi)}$$

$$= \frac{20}{3\,(8+\pi)} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{20}{3\,(8+\pi)}$$

(iii)



$\frac{a^2}{2}$ p $(8 + \pi) = m$

සංයුක්තයේ සහ P හි ගු.කේ. O මත විට AD සිරස් වේ.

වස්තුව	ස්කන්ධය	ගු.කේ. O සිට දුර
සංයුක්ත	m	$2a - \frac{2a\,(14 + 3\pi)}{3\,(8 + \pi)} = \frac{20a}{3\,(8 + \pi)}$
P	$\frac{5m}{3}$	$-x$
නව වස්තුව	$m + \frac{5m}{3}$	0

O වටා

නව වස්තුවේ සුර්ණය = කොටස්වල සුර්ණවල වීජ ඓක්‍යය

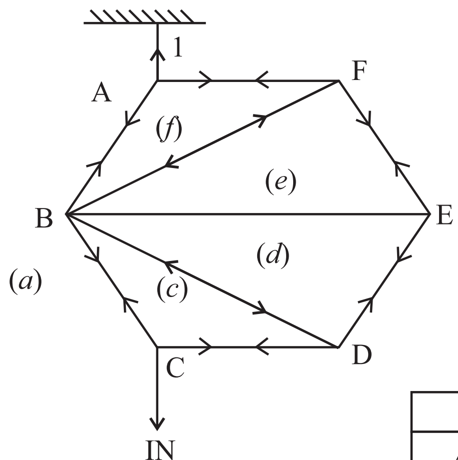
$$\left(m + \frac{5m}{3}\right) O = \frac{5m}{3}\,(-x) + m\,.\,\frac{20a}{3\,(8 + \pi)}$$

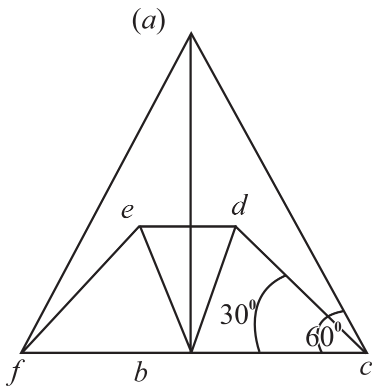
$$\frac{5x}{3} = \frac{20a}{3\,(8 + \pi)} \Rightarrow x = \frac{20}{5\,(8 + \pi)}$$

AD සිට P අංශුවට දුර $= \frac{4a}{8 + \pi}$

$x > O$ නිසා p , අර්ධ වෘත්ත ආස්තරය මත වේ.

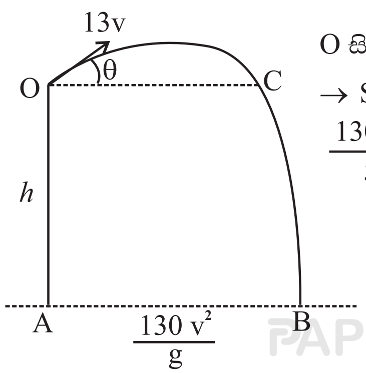
(05) BE වටා පද්ධතිය සමමිතික වේ.





දණ්ඩ	ආතතිය	තෙරපුම
AB = BC	$ac = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	-
AF = CD	$bc - \frac{\sqrt{3}}{3}$	-
ED = EF	$bd - \frac{\sqrt{3}}{6}$	-
BD = BF	-	$cd - \frac{1}{2}$
BE	-	$ed - \frac{\sqrt{3}}{6}$

(06) (i)



O සිට P ට කාලය t නම්,

$\rightarrow$ S = ut යෙදීමෙන්,

$$\frac{130\,v^2}{g} = 13v \cos\theta\,.\,t$$

$$= 13v\,\frac{5t}{13}$$

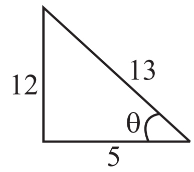
$$t = \frac{26v}{g}$$

$\uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$-h = 13v \ \text{Sin}\,\theta \,.\, t - \frac{1}{2}gt^2$

$= \frac{26v}{g} - [12v - \frac{1}{2}g \times \frac{26v}{g}]$

$= \frac{-26v^2}{g} \quad \therefore h = \frac{26v^2}{g}$



$\text{Sin}\,\theta = \frac{12}{13}$

$\text{Cos}\,\theta = \frac{5}{13}$

(ii) O සිට C ට කාලය T නම්,

$\uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$

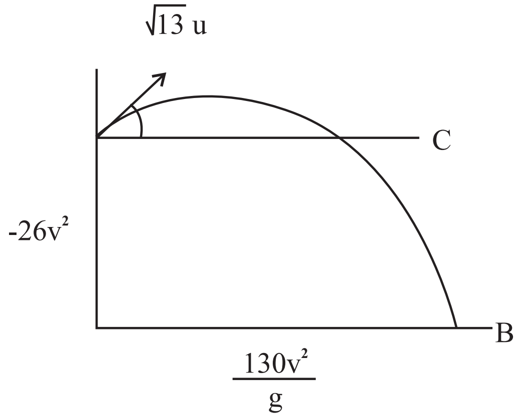
$O = 13v \ \text{Sin}\,\theta \,.\, t - \frac{1}{2}gt^2$

$t = \frac{26v}{g} \ \text{Sin}\,\theta = \frac{26}{g} \times \frac{12}{13} = \frac{24v}{g}$

$\overrightarrow{S} = ut$

$OC = 13v \ \text{Cos}\,\theta \,.\, t$

$= 13v \times \frac{5}{13} \times \frac{24v}{g} = \frac{120v^2}{g}$



(iii) O - B කාලය T නම්, $\overrightarrow{S} = ut$

$\frac{130v^2}{g} = 5\sqrt{13}\, u \ \text{Cos}\,\alpha \ t$

$t = \frac{130v^2}{5\sqrt{13}\, ug \ \text{Cos}\,\alpha}$

$\uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$\frac{-26v^2}{g} = 5\sqrt{13}\, u \ \text{Sin}\,\alpha \,.\, \frac{130v^2}{5\sqrt{13}\, ug \ \text{Cos}\,\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{130v^2}{5\sqrt{13}\, ug \ \text{Cos}\,\alpha}\right)^2$

$\frac{-26v^2}{g} = \frac{130v^2}{g} \tan\alpha - \frac{g}{2} \times \frac{130v^2 \times 130v^2}{25 \times 13u^2g^2} (1 + \tan^2\alpha)$

$-1 = 5\tan\alpha - \frac{v^2}{u^2}(1 + \tan^2\alpha)$

$\alpha = 45$ විට, $-1 = 5 - \frac{v^2}{u^2}(1+1)$

$u^2 = \frac{v^2}{3} \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{v}{\sqrt{3}}$

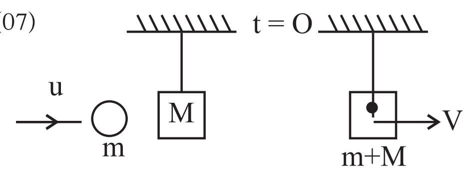
u හි අගය ① ට ආදේශයෙන්, $-1 = 5\tan\alpha - 3\ (1 + \tan^2\alpha)$

$3\tan^2\alpha - 5\tan^2\alpha + 2 = 0$

$(\tan\alpha - 1)\ (3\tan\alpha - 2) = 0$

$\tan\alpha = 1$ හෝ $\tan\alpha = \frac{2}{3} \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

(07)



$I = \Delta\ (mv)$ යෙදීමෙන්

$O = (m + M)\,V - mu - M \times O = 0$

$V = \frac{mu}{m + M}$

ලී කුට්ටිය V වලින් ආරම්භ වී වෘත්තයක චලිත වේ.

O තුළින් තිරස් රේඛාවේ විභව ශූන්‍ය වේ.

$\frac{1}{2}(m+M)\,V_1^2 - (m+M)g\,a\,\text{Cos}\,\theta = k$

$\theta = 0$ විට $V_1 = V$ බව ආදේශයෙන් $\frac{1}{2}(m+M)\,V^2 - (m+M)ag = k$

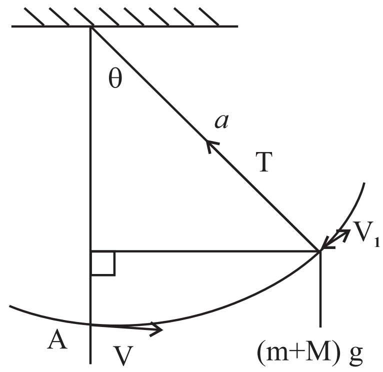
$\frac{1}{2}$ (m+M) V^2 - (m+M)ag . Cos θ = $\frac{1}{2}$ (m+M) V^2 - (m+M)ag = K

$V_1^2 = V^2 + 2ag\,(\text{Cos}\theta - 1)$

අර්ධ වෘත්තයක චලිත වේ නම්, $\theta = \frac{\pi}{2}$ විට $V_1 = 0$

$O = V^2 + 2ag\,(-1) \Rightarrow V = \sqrt{2ag}$

$\frac{mu}{m+M} = \sqrt{2ag} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2ag}$



↖ F = ma යෙදීමෙන්,

$T - (m+M)\,g\,\text{Cos}\,\theta = (m+M)\,\frac{V_1^2}{a}$

$T = (m+M)\,g\,\text{Cos}\,\theta + \frac{(m+M)}{a}\,[V^2 + 2ag\,(\text{Cos}\,\theta - 1)]$

$\theta = 60^0$ විට, $T = (m+M)\,g_1^2 + \frac{(m+M)}{a} + \left[V^2 + 2ag\,(\frac{1}{2} - 1)\right]$

$$= \frac{(m+M)}{a}\left[\frac{ag}{2} + \frac{m^2 u^2}{(m+M)^2} - ag\right]$$

$$= \frac{(m+M)}{a}\left[\frac{-ag}{2} + \frac{(m+M^2) \times 2ag}{(m+M)^2}\right]$$

$$= \left(\frac{(m+M)}{a}\right)\left[\frac{3ag}{2}\right] = \frac{3(m+M)g}{2}$$