අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2015

10 - සංයුක්ත ගණිතය

Marking Scheme

පර්යේෂණ හා සංවර්ධන ශාඛාව
ජාතික ඇගයීම් හා පරීක්ෂණ සේවාව,
ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව.

2.1.3 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය I පත්‍රය - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $8^n - 3^n$ යන්න 5 හි පූර්ණ සංඛ්‍යාමය ගුණාකාරයක් බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ නම් $8^n - 3^n = 8-3 = 5$, $n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

$n=p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි ගනිමු.

$\Rightarrow 8^p - 3^p = 5m,$ මෙහි m ධන නිඛිලයකි. 5

$n=p+1$ සලකමු. $8^{p+1} - 3^{p+1} = 8^p(5+3) - 3^{p+1}$

$$= (5m+3^p)(5+3) - 3^{p+1} \quad 5$$

$$= 8 \times 5m + 5 \times 3^p + 3^{p+1} - 3^{p+1}$$

$$= 5(8m+3^p) \quad 5 \qquad 8m+3^p \in Z^+$$

එනයින් $n=p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n=p+1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

එබැවින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලුම $n \in Z^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5 $\boxed{25}$

---

1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

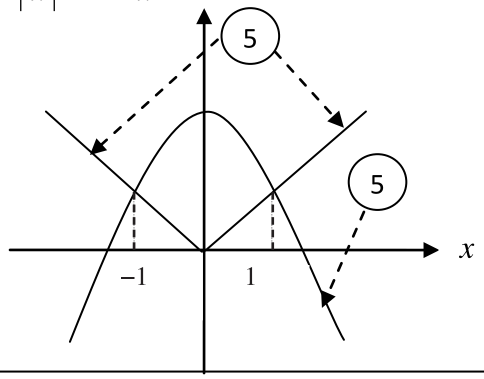
පළමුවන ප්‍රශ්නය අනිවාර්යය ප්‍රශ්නයක් වුවත්, මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 97%ක් පමණ ය. ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 54%කට සීමා වී තිබේ. එනම් එම අපේක්ෂකයින්ට පොදුවේ හිමිකර ගත හැකි වී ඇත්තේ ලැබිය හැකිව තිබූ උපරිම ලකුණු ප්‍රමාණයෙන් අඩකට ආසන්න ප්‍රමාණයක් පමණි. සමහර අයදුම්කරුවන් සපයා තිබූ පිළිතුරුවල කැපී පෙනෙන දුර්වලතාවක් වූයේ $n=p$ සඳහා උපකල්පිත ප්‍රතිඵලය නිවැරදිව ලියා දක්වා නොමැති වීමයි.

එනම්, ඇතැම් අයදුම්කරුවන් $8^P - 3^P = 5k$, ලෙස වීජියව ප්‍රකාශ කළත් “මෙහි k යනු ධන නිඛිලයකි.” යන ප්‍රකාශය ලියා දක්වා නැත. එම හේතුවෙන් අපේක්ෂකයින් ලකුණු 5ක් අහිමි කර ගෙන ඇත.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. $|x| < 2 - x^2$ **අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.**

$|x| < 2 - x^2$



$x \geq 0$ සඳහා

$x = 2 - x^2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ 5

$x < 0$ සඳහා

$-x = 2 - x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = -1$ 5

$\therefore$ විසඳුම : $\{x \mid -1 < x < 1\}$ 5 $\boxed{25}$

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

$x \geq 0$ සඳහා

$x < 2 - x^2$ 5

$x^2 + x - 2 < 0$

$(x-1)(x+2) < 0$

$\Rightarrow 0 \leq x < 1$ 5

$x < 0$ සඳහා

$-x < 2 - x^2$ 5

$x^2 - x - 2 < 0$

$(x+1)(x-2) < 0$

$\Rightarrow -1 < x < 0$ 5

$\therefore$ විසඳුම : $\{x \mid -1 < x < 1\}$ 5 $\boxed{25}$

---

2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 93%ක් පමණ මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇතත් මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 26%කට සීමා වී ඇත. අපේක්ෂකයින්ට තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක මාපාංකය පිළිබඳ වීජීය අවබෝධය ඉතා අඩු බව දක්නට ලැබේ.

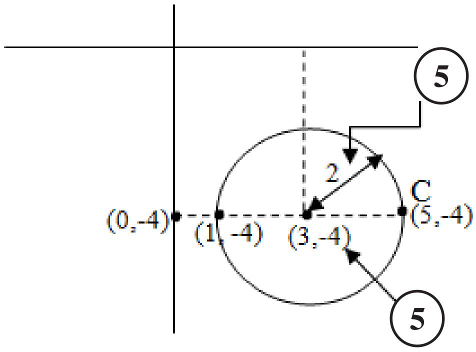
බොහෝ අපේක්ෂකයින් මෙම අසමානතාව විසඳීමේදී ලැබෙන බාහ්‍යය විසඳුම් (Extraneous Solutions) ඉවත් නොකිරීම නිසා නිවැරදි විසඳුම් කුලකය ලබා ගැනීමට අපොහොසත් වී ඇත. සමහර අපේක්ෂකයන් මෙම අසමානතාව වර්ග කිරීමෙන් විසඳුම් ලබා ගැනීමේ ක්‍රියාවලිය සංකීර්ණ තත්ත්වයට පත්කර ගෙන ඇත.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. **ආගන්ඩ් සටහනක් මත $|z-3+4i|=2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයේ පථය වන C හි දළ සටහනක් අඳින්න. ඒනයින්, C මත පිහිටි z සඳහා $|z+4i|$ හි වැඩිතම හා අඩුතම අගයන් සොයන්න.**

C යනු කේන්ද්‍රය $(3,-4)$ වූ ද අරය 2ක් වූ ද වෘත්තයකි.

5



$$|z-3+4i|=2$$

$$|z-(3-4i)|=2$$

$$|z+4i|=|z-(-4i)|$$

$\therefore$ C මත z සඳහා $|z+4i|$ හි වැඩිතම අගය 5 යි. 5

$|z+4i|$ හි අඩුතම අගය 1 යි. 5

25

---

3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයන්ගෙන් 76%ක් පමණ පිළිතුරු සපයා ඇති මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 28%ක් පමණ අවම මට්ටමක පවතී. බොහෝ අපේක්ෂකයින් ආගන්ඩ් තලය හා කාටීසීය තලය අතර වෙනස හඳුනාගෙන නැත. එබැවින් මේ පිළිබඳව දැඩි අවධානයක් යොමු කිරීම අත්‍යවශ්‍ය වේ.

ආගන්ඩ් සටහනෙහි ලක්ෂ්‍ය දෙක නිවැරදිව ලකුණු කළ ද, ලක්ෂ 2ක් අතර දුර පිළිබඳ අවබෝධය අඩු නිසා පිළිතුරු සැපයීම දුර්වල මට්ටමක පවතී. පිළිතුර ලබා ගැනීමට අවශ්‍ය ජ්‍යාමිතික සම්බන්ධතා පිළිබඳ අවබෝධය ද මඳ බව පෙනේ.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ හා $n \geq 5$ යැයි ගනිමු. $\left(3x + \frac{2}{x}\right)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^{n-10} හි සංගුණකය 100 ට වඩා අඩු වේ. n හි අගය සොයන්න.

$$\left(3x+\frac{2}{x}\right)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r (3x)^{n-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r 3^{n-r}\, 2^r\, x^{n-2r} \quad 5$$

$$n-10 = n-2r \Rightarrow r=5 \quad 5$$

එම නිසා, x^{n-10} හි සංගුණකය = ${}^nC_5\, 3^{n-5}\, 2^5$

$${}^nC_5\, 3^{n-5} \times 32 < 100 \;\; \Rightarrow 3^{n-5} < \frac{100}{32}, \;\; \because {}^nC_5 > 1$$

5

$n \geq 5$ බව දී ඇත. $n=5$ හෝ $n=6$ වලංගු අගයන් වේ.

$n=5$ $\quad 5!\cdot 3^0 < \frac{100}{32} \times 5!$ වලංගු වේ.

$n=6$ $\quad 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 3 < \frac{100}{32} \times 5!$ වලංගු නොවේ. $\quad$ 5

$\therefore \quad n=5. \quad$ 5

25

---

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයින්ගෙන් 83%ක් පමණ මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා තිබුණ ද, පහසුතාව 24% කට සීමා වී තිබුණි.

මෙයට හේතු විය හැක්කේ බොහෝ අපේක්ෂකයන් ද්විපද ප්‍රසාරණයේ සාධාරණ පදය නිවැරදිව ලියා $n - 10$ හි සංගුණකය සොයා ගත්ත ද ${}^nC_5\, 3^{n-5} \times 32 < 100$ අසමානතාව විසඳීමේ දී බොහෝ දුර්වලතා දක්වා තිබීමයි. මෙවන් අසමානතා නිවැරදිව විසඳන ආකාරය ගැන අපේක්ෂකයන් අවධානය යොමු කළ යුතුය.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා, $\lim_{y \to a} \frac{y^n - a^n}{y - a} = na^{n-1}$ **ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ**

$\lim_{x \to 0} \frac{\left(x+\sqrt{2}\right)^4 - 4}{\sin 4x} = 2\sqrt{2}$ **බව පෙන්වන්න.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+\sqrt{2})^4 - 4}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\left[\overset{5}{\frac{(x+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^4}{(x+\sqrt{2}-\sqrt{2})}} . \overset{5}{\frac{1}{4\frac{\sin 4x}{4x}}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^4}{(x+\sqrt{2}-\sqrt{2})} . \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}$$

$$= \frac{1}{4}.\overset{5}{4.(\sqrt{2})^3}.\overset{5}{\frac{1}{1}}$$ (දෙන ලද ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්) 5

$$= (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}.$$

25

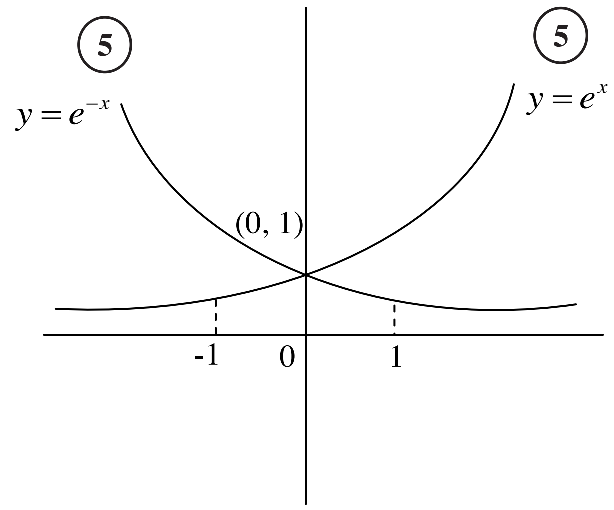
---

5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය සඳහා අපේක්ෂකයන්ගෙන් 86%ක් පිළිතුරු සපයා තිබූ අතර පහසුතාව 28%ක් විය. දී ඇති ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් පිළිතුරු සැපයීම පහසු වුවත් වැඩි දෙනෙකු එම ප්‍රතිඵලය භාවිත කර නැත. සීමා පිළිබඳ ප්‍රමේය නිවැරදිව භාවිත කිරීම දුර්වල මට්ටමක පවතී.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. එක ම රූප සටහනක $y=e^x$ හා $y=e^{-x}$ වක්‍ර දෙකෙහි දළ සටහන් අඳින්න. x-අක්ෂයෙන් ද $-1 \le x \le 0$ පරාසය තුළ $y=e^x$ වක්‍රයෙන් හා $0 \le x \le 1$ පරාසය තුළ $y=e^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද ආවෘත වන පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$ බව පෙන්වන්න.



$$A=\int_{-1}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad 5$$

$$=\left[e^{x}\right]_{-1}^{0}+\left[-e^{-x}\right]_{0}^{1} \quad 5$$

$$=1-e^{-1}-e^{-1}+1$$

$$=2-2e^{-1} \quad 5$$

$$=2\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

25

---

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයන්ගෙන් 78%ක් පමණ පිළිතුරු සපයා ඇති මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 24% කට සීමා වී පවතී. සාතීය ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය පිළිබඳ අවබෝධය ඉතා දුර්වල මට්ටමක පවතින බැවින් මෙම ප්‍රශ්නයට අපේක්ෂකයන් සාර්ථකව පිළිතුරු සපයා නොතිබිණි.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. තාත්ත්වික θ පරාමිතියක් ඇසුරෙන්, xy-තලයේ C වක්‍රයක් $x = 2 + \cos 2\theta$, $y = 4\sin\theta$ යන සමීකරණ මගින් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}$ ව්‍යුත්පන්නය θ ඇසුරෙන් සොයා, $\theta = \frac{\pi}{4}$ වන ලක්ෂ්‍යයෙහි දී C වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

C වක්‍රයෙහි පරාමිතික සමීකරණය : $x = 2 + \cos 2\theta$, $y = 4\sin\theta$.

$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin 2\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = 4\cos\theta$ 5

$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cos\theta}{-4\sin\theta\cos\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}$ 5

$\theta = \frac{\pi}{4}$ විට, $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{2}$ අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ 5

$(2, 2\sqrt{2})$ ලක්ෂ්‍යයෙහි අභිලම්බයේ සමීකරණය : 5

$y - 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2)$ 5

$\sqrt{2}y - 4 = x - 2 \Rightarrow x - \sqrt{2}y + 2 = 0.$

$\boxed{25}$

---

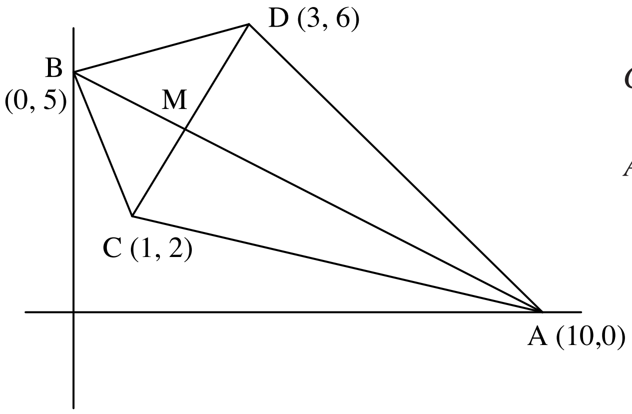
7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 90%ක් ම පිළිතුරු සපයා ඇති මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 53%ක් පමණ වේ. පරාමිතික ආකාරයේ ඇති ශ්‍රිතයක් අවකලනය සඳහා දාම නීති යොදා ගැනීම හා පරාමිතියට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය ලබා ගැනීම පිළිබඳ දැනුම ඉතා දුර්වල මට්ටමක පවතින අපේක්ෂකයන්ට ලකුණු ලබාගත නොහැකි වී තිබේ.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. $A(10,0)$ **හා** $B(0,5)$ **ලක්ෂ්‍ය යා කරන සරල රේඛාව** $C(1,2)$ **හා** $D(3,6)$ **ලක්ෂ්‍ය යා කරන** CD **රේඛා ඛණ්ඩයෙහි ලම්බ සමච්ඡේදකය බව පෙන්වන්න.**

$ACBD$ **චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 25 ක් බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.**



CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය, $M(2, 4)$.

AB රේඛාවේ සමීකරණය : $\dfrac{y-5}{x-0} = -\dfrac{1}{2}$ 5

$\Rightarrow x+2y-10=0$

$\because\ 2+2.4-10=0$ බැවින් M හි ඛණ්ඩාංක, ඉහත සමීකරණය සපුරාලයි. 5

තවද, CD හි අනුක්‍රමණය $=\dfrac{6-2}{3-1}=\dfrac{4}{2}=2.\ \therefore\ CD \perp AB.$ 5

$ACBD$ හි වර්ගඵලය $=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\,(\mathrm{MD}+\mathrm{MC}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB.CD} = \dfrac{1}{2}\sqrt{100+25}\sqrt{2^2+4^2} = 25$ 5 5

25

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයන්ගෙන් 90%ක් මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා තිබුණ ද පහසුතාව 38%කි. CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක නිවැරදිව සොයා නොතිබීම හා AB හි ලම්බ සමච්ඡේදකය CD බව පෙන්වා නොතිබීම අඩු පහසුතා දර්ශකයක් ලැබීමට හේතු ලෙස දැක්විය හැකිය.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. ***O* මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ද $y = 1$ රේඛාවේත් $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ වෘත්තයේත් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය දෙක ඔස්සේ ද යන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා අරය සොයන්න.**

$x^2+y^2-2x-2y+1+\lambda(y-1)=0$ වෘත්තය 5 O මූලය ඔස්සේ යන බැවින්

$1-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1.$ 5

අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2+y^2-2x-y=0$ 5

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1+\frac{1}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

කේන්ද්‍රය $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, අරය $=\frac{\sqrt{5}}{2}$

5 5

25

---

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 83%ක් පිළිතුරු සපයා තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 30%ක් විය. $S + \lambda u = 0$ භාවිතයෙන් පිළිතුරු ලබා ගැනීම පහසු වුවත්, මෙම ක්‍රමය භාවිත නොකොට වෘත්තයේ හා සරල රේඛාවේ සමීකරණය විසඳා, ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ඇසුරෙන් පිළිතුරු ලබා ගැනීමට ප්‍රයත්න දැරීමෙන් පිළිතුරු සැපයීමේ ක්‍රියාවලිය සංකීර්ණ කරගෙන ඇත.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $\sin\alpha + \sin\beta = 1$ හා $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{3}$ යැයි ගනිමු; මෙහි α හා β සුළු කෝණ වේ. $\alpha + \beta$ හි අගය සොයන්න.

α හා β දෙකම සුළු කෝණ වේ.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 1 \ , \qquad 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1 \quad 5$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{3} \ . \qquad 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sqrt{3} \quad 5$$

බෙදීමෙන්, $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 5 $\quad 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}. \quad 5$$

5

25

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයූ අපේක්ෂකයන්ගේ ප්‍රමාණය 87%ක් වන අතර පහසුතාව 26%ක් විය. අපේක්ෂකයන්ගෙන් වැඩි ප්‍රමාණයක් විසඳුමට අදාළ මුල් ලකුණු 15 ලබාගෙන තිබුණ ද "α හා β සුළු කෝණ වේ." යන දත්තය භාවිත නොකිරීමෙන් ඉතිරි ලකුණු 10 ලබා ගැනීමට අසමත් වී තිබිණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) x හි මාත්‍රය 4 වූ $F(x)$, $G(x)$ හා $H(x)$ යන බහුපද පහත දැක්වෙන පරිදි දෙනු ලැබේ.

$F(x) \equiv (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$, මෙහි α හා β තාත්ත්වික නියත වේ;

$G(x) \equiv 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$,

$H(x) \equiv x^4 + x^2 + 1$.

(i) $F(x) = 0$ හා $G(x) = 0$ යන දෙකට ම එක ම මූල තිබේ නම්, α හා β මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය $6x^2 - 35x + 50 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $G(x) = 0$ සමීකරණයෙහි සියලු ම මූල සොයන්න.

(ii) $F(x) \equiv H(x)$ වෙයි නම්, α හා β ට තිබිය හැකි අගයන් සොයා, $H(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික **නො වන** බව පෙන්වන්න.

(*b*) (i) $f(x) \equiv 2x^4 + \gamma x^3 + \delta x + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි γ හා δ තාත්ත්වික නියත වේ. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ හා $f(-2) = 21$ බව දී ඇති විට, $f(x)$ හි තාත්ත්වික ඒකජ සාධක දෙක සොයන්න.

(ii) සියලු ම තාත්ත්වික x සඳහා $(x^2 + x + 1)\,P(x) + (x^2 - 1)\,Q(x) = 3x$ සමීකරණය සපුරාලන $P(x)$ හා $Q(x)$ ඒකජ ප්‍රකාශන දෙක සොයන්න.

(a) $F(x) = (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$

$= x^4 - (\alpha + \beta)x^3 + (2 + \alpha\beta)x^2 - (\alpha + \beta)x + 1$ 5

(i) $F(x) = 0$ හා $G(x) = 0$ එකම මූල සහිත නම්, එවිට $G(x) = 6F(x) \Rightarrow$

$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 6[x^4 - (\alpha + \beta)x^3 + (2 + \alpha\beta)x^2 - (\alpha + \beta)x + 1]$ 5

සංගුණක සමාන කිරීමෙන් : $\alpha + \beta = \frac{35}{6}$ 5

$2 + \alpha\beta = \frac{62}{6} \quad \Rightarrow \alpha\beta = \frac{62}{6} - 2 = \frac{50}{6}$ 5

α හා β මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \; x^2 - \frac{35}{6}x + \frac{50}{6} = 0$ 5

$\Rightarrow \; 6x^2 - 35x + 50 = 0$ $\boxed{25}$

$\Rightarrow \; (3x - 10)(2x - 5) = 0$ 5

$\Rightarrow x = {}^{10}/_{3}$ or $x = {}^{5}/_{2}$

$\alpha = {}^{10}/_{3}$ හා $\beta = {}^{5}/_{2}$ ලෙස ගනිමු.

5 5

$G(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල, $F(x) = 0$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right)(x^2 - \frac{5}{2}x + 1) = 0$ 5

$\Leftrightarrow (3x^2 - 10x + 3)(2x^2 - 5x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(3x-1)(x-2)(2x-1) = 0$ 5

$\Leftrightarrow x = 2, \frac{1}{2}, 3$ හෝ $\frac{1}{3}$

5 5

35

(ii) $H(x) \equiv F(x)$ නම්

$x^4 + x^2 + 1 = x^4 - (\alpha+\beta)x^3 + (2+\alpha\beta)x^2 - (\alpha+\beta)x + 1$

$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$ 5

$2 + \alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha\beta = -1$ 5

[*]

[*] $\Leftrightarrow \alpha(-\alpha) = -1 \Rightarrow \alpha^2 = 1$

$\Leftrightarrow \alpha = \pm 1$

එවිට $\beta = \mp 1$

5

වෙනත් ක්‍රමයක්

$\therefore$ α හා β, $x^2 - 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ.

$\Rightarrow x = \pm 1.$ 5

$\alpha = 1$ හා $\beta = -1$ ලෙස ගනිමු.

$H(x) = 0$

$\Leftrightarrow F(x) = 0 \Longrightarrow (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = 0$ 5

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ හෝ $x^2 + x + 1 = 0$

$\Longrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) < 0 \qquad \Delta' = 1 - 4(1)(1) < 0$ 5

$\therefore$ $H(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල නොමැත.

25

(b) (i) $f(x) = 2x^4 + \gamma x^3 + \delta x + 1$

$f(-{}^{1}/_{2}) = 0$ බැවින්,

$$2\left(\frac{1}{16}\right) + \gamma\left(-\frac{1}{8}\right) + \delta\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

$\Longrightarrow\ 1 - \gamma - 4\delta + 8 = 0$

$\Longrightarrow\ \gamma + 4\delta = 9$ 5

$f(-2) = 21$ බැවින්,

$2(16) + \gamma(-8) + \delta(-2) + 1 = 21$

$\Longrightarrow\ 8\gamma + 2\delta = 12$

$\Longrightarrow\ 4\gamma + \delta = 6$ 5

$\Longrightarrow\ \gamma = 1$ හා $\delta = 2$

5 5

එම නිසා $f(x) = 2x^4 + x^3 + 2x + 1$

$= (2x+1),(x^3+1),\ \because f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$

$= (2x+1)(x+1)(x^2 - x + 1)$

$f(x)$ හි ඒකජ සාධක දෙක $x + 1$ හා $2x + 1$ වේ.

5 5

30

(ii) $(x^2 + x + 1)\,P(x) + (x^2 - 1)\,Q(x) = 3x$

$P(x) = ax + b$ හා $Q(x) = cx + d$ යැයි ගනිමු.

එවිට $(x^2 + x + 1)(ax + b) + (x^2 - 1)(cx + d) = 3x$ 5

සංගුණක සමාන කිරීමෙන්,

$a + c = 0$............. (1) 5

$b + a + d = 0$............... (2) 5

$b + a - c = 3$................ (3) 5

$b - d = 0$................ (4) 5

(1) + (3) $\Longrightarrow 2a + b = 3$................... (5)

(2) + (4) $\Longrightarrow\ 2b + a = 0$.................. (6)

(5) න් හා (6) න්, $a = 2$ හා $b = -1$

(1) න්, $c = -2$, තවද (4) න් $d = -1$

$\therefore$ $P(x) = 2x - 1$ හා $Q(x) = -2x - 1$ **35**

5 5

වෙනත් ක්‍රමයක්

(ii) $(x^2 + x + 1)\,P(x) + (x^2 - 1)\,Q(x) = 3x$

$P(x) = ax + b$ හා $Q(x) = cx + d$ යැයි ගනිමු.

එවිට $(x^2 + x + 1)(ax + b) + (x^2 - 1)(cx + d) = 3x$ 5

$x = 1 : 3(a + b) = 3 \implies a + b = 1$ 5

$x = -1 :\ -a + b = -3$ 5

$x = 0 :\ -1 - d = 0$ 5

$x = \frac{1}{2} :\ \left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(-\frac{c}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}$ 5

$x = 0 :\ -1 - d = 0 \implies d = -1$

$\implies c = -2$

$P(x) = 2x - 1$ $\qquad Q(x) = -2x - 1$

5 5

35

---

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) නිපුණතා සංදර්ශන තරගයක විනිසුරුවන් ලෙස කටයුතු කිරීම සඳහා සාමාජික සාමාජිකාවන් හතර දෙනකුගෙන් සමන්විත විනිසුරු මඬුල්ලක් පිහිටුවා ගත යුතුව ඇත. මෙම විනිසුරු මඬුල්ල තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ ක්‍රීඩිකාවන් තුන් දෙනකු, ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු, ගායිකාවන් හය දෙනකු, ගායකයින් පස් දෙනකු, නිළියන් දෙදෙනකු හා නළුවන් හතර දෙනකුගෙන් සමන්විත කණ්ඩායමකිනි. ප්‍රධාන විනිසුරු, ක්‍රීඩකයකු හෝ ක්‍රීඩිකාවක හෝ විය යුතු ය. විනිසුරු මඬුල්ලේ අනෙක් තිදෙනා තෝරා ගත යුතු වන්නේ ක්‍රීඩක ක්‍රීඩිකාවන් හැර කණ්ඩායමේ ඉතිරි අයගෙන් ය. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවේ දී විනිසුරු මඬුල්ල පිහිටුවා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(i) අඩු තරමින් එක් ගායිකාවක හා එක් ගායකයකු මඬුල්ලට ඇතුළත් විය යුතු ම නම්,

(ii) ප්‍රධාන විනිසුරු ඇතුළුව පිරිමි දෙදෙනකු හා ගැහැනු දෙදෙනකු මඬුල්ලේ සිටිය යුතු ම නම්,

(iii) ප්‍රධාන විනිසුරු ක්‍රීඩිකාවක විය යුතු ම නම්.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $A(r+5)^2 - B(r+1)^2 = r + C$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒනයින්, අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වන පදය $U_r = \dfrac{8}{(r+1)^2(r+3)(r+5)^2}$ යන්න $f(r) - f(r+2)$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $f(r)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු ශ්‍රිතයක් වේ.

$\sum\limits_{r=1}^{n} U_r$ ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය සොයා, $\sum\limits_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය, $\dfrac{1}{8^2} + \dfrac{1}{15^2}$ ඓක්‍යයට අභිසාරී වන බව **අපෝහනය** කරන්න.

(a)

ක්‍රීඩකයින්	ක්‍රීඩිකාවන්	ගායකයන් (MS)	ගායිකාවන් (FS)	නළුවන්	නිළියන්
2	3	**5**	6	**4**	2
මඬුල්ල :	ප්‍රධානි		අනෙක් තිදෙනා		

(i) ප්‍රධානි 1+ FS 1+ MS1+ අනෙක් 1 $\Rightarrow {}^5C_1 \times {}^6C_1 \times {}^5C_1 \times {}^6C_1$ 5 +

ප්‍රධානි 1+ FS 2 +MS 1 $\Rightarrow {}^5C_1 \times {}^6C_2 \times {}^5C_1$ 5 + 5

ප්‍රධානි 1 + FS 1 + MS 2 $\Rightarrow {}^5C_1 \times {}^6C_2 \times {}^5C_2$ 5

$= 900 + 375 + 300 = 1575$ 5

$\boxed{25}$

---

5 5

(ii) ගැහැණු ප්‍රධානි + ගැහැණු 1 + පිරිමි 2 $\Rightarrow {}^3C_1 \times {}^8C_1 \times {}^9C_2$ + 5

පිරිමි ප්‍රධානි + ගැහැණු 2 + පිරිමි 1 $\Rightarrow {}^2C_1 \times {}^8C_2 \times {}^9C_1$

5 5

$= 864 + 504 = 1368$ 5

$\boxed{30}$

---

5 5

(iii) ප්‍රධානි ලෙස ක්‍රීඩිකාවක් + ඕනෑම අනෙක් 3 දෙනෙක් $\Rightarrow {}^3C_1 \times {}^{17}C_3$

$= 2040$ 5

$\boxed{15}$

(b) $A(r+5)^2 - B(r+1)^2 \equiv r + C$

$A(r^2+10r+25) - B(r^2+2r+1) \equiv r + C$

සංගුණක සමාන කිරීමෙන් ;

$r^2 : \quad A - B = 0$ 5

$r \quad : \quad 10A - 2B = 1$ 5

$r^0 : \quad 25A - B = C$ 5

$A = B = \frac{1}{8}$, 5 $C = 24A = 3$ 5 එවිට $(r+5)^2 - (r+1)^2 \equiv 8(r+3)$ $\boxed{25}$

දෙන ලද U_r සලකන්න :

$$U_r = \frac{8(r+3)}{(r+1)^2(r+3)^2(r+5)^2} = \frac{(r+5)^2-(r+1)^2}{(r+1)^2(r+3)^2(r+5)^2}$$ 5 5

$$= \frac{1}{(r+1)^2(r+3)^2} - \frac{1}{(r+3)^2(r+5)^2}$$

$= f(r) - f(r+2)$ මෙහි $f(r) = \frac{1}{(r+1)^2(r+3)^2}$ 5 $\boxed{15}$

$U_r = f(r) - f(r+2)$

$r = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා

$U_1 = f(1) - \cancel{f(3)}$ 10

$U_2 = f(2) - \cancel{f(4)}$

$U_3 = \cancel{f(3)} - \cancel{f(5)}$

$\vdots \qquad \vdots$

$U_{n-2} = \cancel{f(n-2)} - \cancel{f(n)}$

$U_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - f(n+1)$

$U_n = \cancel{f(n)} - f(n+2)$ 10

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$$ 5

$$= \frac{1}{2^2 4^2} + \frac{1}{3^2 5^2} - \frac{1}{(n+2)^2(n+4)^2} - \frac{1}{(n+4)^2(n+6)^2}$$ 5 5

$\therefore \ \sum_{r}^{\infty} U_r = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{15^2}$, $n \to \infty$ විට අවසාන පද දෙක ශුන්‍යය කරා එළඹෙන බැවින්, 5 $\boxed{40}$

---

13 වන ප්‍රශ්නය

13. (*a*) **A, B** හා **C** න්‍යාස තුනක්

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \text{ හා } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ මගින් දෙනු ලැබේ.}$$

(i) $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ බව පෙන්වන්න. **CA** ගුණිතයත් සොයන්න.

(ii) $\mathbf{BC} = \mathbf{I}_2$ වන පරිදි a, b, c හා d හි අගයන් සොයන්න.

(iii) $(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{I}_2$ වෙයි නම්, λ හා μ සම්බන්ධ කෙරෙන සමීකරණයක් ලබා ගන්න.

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය, **A** හා **B** ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, **ඒනයින්**, **DC** ගුණිතය සොයන්න.

(*b*) z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ලෙස දෙනු ලැබේ; මෙහි $\theta(-\pi < \theta \le \pi)$ තාත්ත්වික පරාමිතියකි. ආගන්ඩ් සටහනක් මත z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයේ C පථය සොයන්න.

$\cos\theta$ හා $\sin\theta$ සඳහා ප්‍රකාශන z හා $\dfrac{1}{z}$ ඇසුරෙන් ලබා ගන්න.

$w = \dfrac{2z}{z^2+1}$ හා $t = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ යැයි ගනිමු; මෙහි z යන්න $z \neq \pm i$ වන පරිදි C මත පිහිටයි.

(i) $\text{Im}(w) = 0$ හා $\text{Re}(t) = 0$ බව පෙන්වන්න. **ඒනයින්**, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $w^2 + t^2 = 1$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(ii) $w = 2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(iii) $t = i$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(i) $AC = \begin{pmatrix} 4-3 & 0 \\ 0 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

5

$CA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5

$\boxed{10}$

5

(ii) $BC = \begin{pmatrix} 3a+2b & 4a+3b \\ 3c+2d & 4c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 වැනි පේළිය

$\left.\begin{array}{l} 3a+2b=1 \\ 4a+3b=0 \end{array}\right\}$ 5

$3a + 2\left(\frac{-4a}{3}\right) = 1$

$a = 3, b = -4$ 5

2 වැනි පේළිය

5

$\left.\begin{array}{l} 3c+2d=0 \\ 4c+3d=1 \end{array}\right\}$ 5

$4c + 3\left(\frac{-3c}{2}\right) = 1$

$c = -2, d = 3$ 5

$\therefore\ A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 5

$\boxed{35}$

(iii) $(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC = (\lambda + \mu)I_2 = I_2$ 5

$\Rightarrow (\lambda + \mu - 1)I_2 = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 1$ 5 **10**

$D = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 5

1 වැනි තීරුව — $\mu = -1$ 5

3 වැනි තීරුව — $\lambda = 2$ 5 **15**

එම නිසා $D = 2A - B$ හා $DC = (2A - B)C = 2AC - BC$ 5

$= 2I_2 - I_2 = I_2$ 5 **10**

(b) $z = \cos\theta + i\sin\theta$, $(-\pi < \theta \le \pi)$

$|z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1;$

z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය අරය 1 හා කේන්ද්‍රය O වූ C වෘත්තය මත පිහිටයි. 5 5

$\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta = \frac{1}{z}$ 5

$z + \bar{z} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 5

$z - \bar{z} = 2i\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ 5 **25**

(i) $w = \frac{2z}{z^2+1} = \frac{2}{z + \frac{1}{z}} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$ 5 $\therefore \mathrm{Im}(w) = 0$

$t = \frac{z^2-1}{z^2+1} = \frac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}} = \frac{i\sin\theta}{\cos\theta} = i\tan\theta$; $\therefore \mathrm{Re}(t) = 0$ 5 **10**

$w^2 + t^2 = \sec^2\theta + (i\tan\theta)^2 = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ 5 **5**

(ii) $w = 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = 2$ හෝ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 5

දෙන ලද ප්‍රාන්තරය තුළ $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ 5 $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5 **15**

(iii) $t = i \Rightarrow i\tan\theta = i$ 5

$\Rightarrow \tan\theta = 1$

දෙන ලද ප්‍රාන්තරය තුළ $\theta = \pi/4$ හෝ $\theta = (-3\pi)/4.$ 5

$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ 5 **15**

---

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (*a*) $x \neq 0$ සඳහා $y = x \sin\frac{1}{x}$ යැයි ගනිමු.

(i) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - \cos\dfrac{1}{x}$ හා

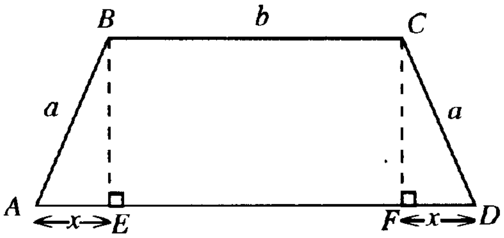
(ii) $x^4\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0$

බව පෙන්වන්න.

(*b*) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයන්න. හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින්, $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*c*) දී ඇති රූපයෙහි, $ABCD$ යනු, BC හා AD සමාන්තර පාද සහිත ත්‍රපීසියමකි. සෙන්ටිමීටරවලින් මනිනු ලබන එහි පාදවල දිග $AB = CD = a$, $BC = b$ හා $AD = b + 2x$ මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි $0 < x < a$ වේ. BE හා CF යනු පිළිවෙළින් B හා C ශීර්ෂවල සිට AD පාදය මතට ඇඳි ලම්බ වේ.



$ABCD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $S(x)$, වර්ග සෙන්ටිමීටරවලින් $S(x) = (b+x)\sqrt{a^2 - x^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$a = \sqrt{6}$ හා $b = 4$ නම්, x හි එක්තරා අගයකට $S(x)$ උපරිම වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, x හි මෙම අගය හා ත්‍රපීසියමේ උපරිම වර්ගඵලය සොයන්න.

(a) $y = x.\sin(1/x)$, $x \neq 0$

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin(1/x) + x\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)\cos(1/x)$ 5 $\qquad x$ වලින් ගුණ කිරීමෙන් 5

$\Rightarrow x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - \cos(1/x)$ $\boxed{10}$

(ii) x විෂයයෙන් අවකලනයෙන් හා $\sin(1/x) = y/x$ යෙදීමෙන් :

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \cancel{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \cancel{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} + \sin(1/x).\left(\frac{-1}{x^2}\right) \quad 10$$

x^3 මගින් ගුණ කිරීමෙන් $\Rightarrow$ $\quad x^4\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0$ 5 $\boxed{10}$

(b) $f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)^2}$ $\quad , x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2.4x-(2x^2+1).2(x-1)}{(x-1)^4} \qquad 10$$

$$= \frac{(x-1)4x-2(2x^2+1)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{-2\,(2x+1)}{(x-1)^3} \quad ; (x \neq 1) \qquad 5$$

15

$x = \frac{-1}{2}$ වන විට $f'(x) = 0$ වේ. 5

05

$x = 1$ වන විට $f'(x)$ නොපවතී.

$\Rightarrow x = 1$ හිදී සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයක් ඇත. 5

	$x < (-1/2)$	$(-1/2) < x < 1$	$1 < x$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(-)	(+)	(-)
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

10

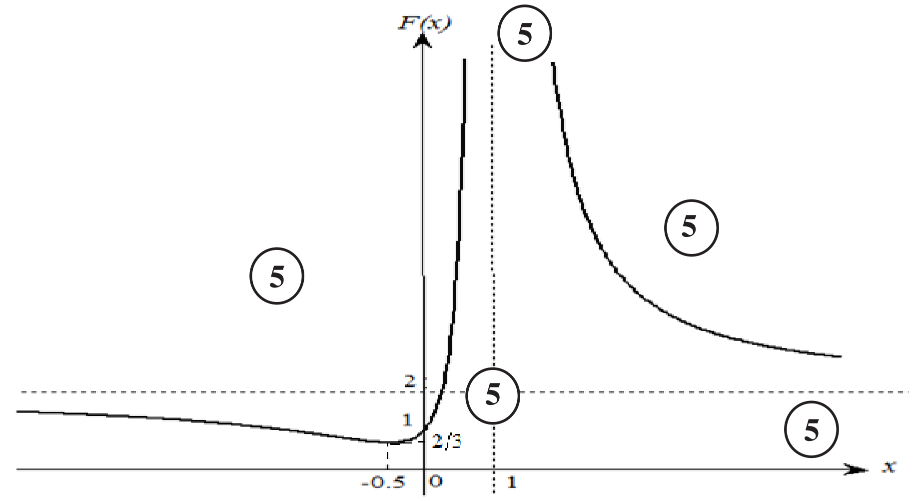
$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2(-1/2)^2+1}{\left(\frac{-1}{2}-1\right)^2} = \frac{3/2}{(-3/2)^2} = 2/3$ 5

$\therefore f(x), \left(\frac{-1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී ස්ථානීය අවමයක් ගනී.

$x > 1$ හා $f'(x) < 0$

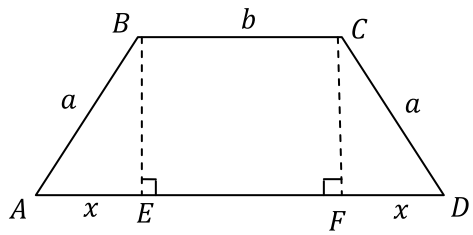
$x \to +\infty, \quad f(x) \to 2$

$x \to -\infty, \quad f(x) \to 2.$ 5



50

(c)



වර්ගඵලය : $S(x) = 2 \times \frac{1}{2}\, x\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) + b\sqrt{a^2 - x^2} \;=\; (b + x)\sqrt{a^2 - x^2}$

10

10

$a = \sqrt{6}$, $b = 4$ ආදේශයෙන්,

$S(x) = (4 + x)\sqrt{6 - x^2}$ 5

$\frac{dS}{dx} = (4 + x)\frac{1}{2\sqrt{6-x^2}}\,(-2x) + \sqrt{6 - x^2}$ 5

$\frac{dS}{dx} = \frac{-x\ (4 + x) + 6 - x^2}{2\sqrt{6-x^2}}$

$\frac{dS}{dx} = \frac{-2x^2-4x+6}{\sqrt{6-x^2}} = \frac{-2(x^2+2x-3)}{\sqrt{6-x^2}}$ 5

$\frac{dS}{dx} = 0$ වන විට $x^2 + 2x - 3 = 0$ 5

$(x + 3)(x - 1) = 0$

x ධන බැවින් $x = 1$ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් දෙයි. 5

	$0 < x < 1$	$1 < x < \sqrt{6}$
$S'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(-)
	5	5

$\therefore x = 1$ හිදී $S(x)$ උපරිම වේ. 5

$S(x)$ හි උපරිම අගය, $S(1) = (4 + 1)\sqrt{6 - 1} = 5\sqrt{5}$ වර්ග ඒකක. 5

45

---

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(\pi - x)\,dx$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ බවත් පෙන්වන්න.

එනයින්, $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) සුදුසු ආදේශයක් හා **කොටස් වශයෙන් අනුකලන** ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\int x^3 e^{x^2}\,dx$ සොයන්න.

(*c*) $\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

එනයින්, $\frac{1}{x^3 - 1}$ යන්න x විෂයයෙන් අනුකලනය කරන්න.

(*d*) $t = \tan\frac{x}{2}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4\cos x + 3\sin x} = \frac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

(a) $y = \pi - x$ යැයි ගනිමු. 5 5

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_{\pi}^{0} f(\pi - y)(-dy) = \int_0^{\pi} f(\pi - y)dy = \int_0^{\pi} f(\pi - x)dx \qquad \boxed{10}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} - 0 = \frac{\pi}{4}, \quad \because [\sin 2x]_0^{\pi/2} = 0 \qquad \boxed{10}$$

5 5

පළමු ප්‍රතිඵලය යෙදීමෙන්,

$$\int_0^{\pi} x\sin^2 x\ \ dx = \int_0^{\pi} (\pi - x)\sin^2(\pi - x)\ dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x\ dx - \int_0^{\pi} x\ \sin^2 x\ dx \quad 5$$

$$\therefore \quad 2\int_0^{\pi} x\sin^2 x\ \ dx = \pi\left[\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\ dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x\ dx\right]$$

5 5

$$= \pi\left[\frac{\pi}{4} + J\right] \qquad \text{මෙහි } J = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x\ dx$$

5

$\pi - x = y$ ආදේශයෙන්, 5

$$J = \int_{\pi/2}^{0} \sin^2(\pi - y)\ (-dy) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 y\ dy = \pi/4$$

$$\therefore \int_0^{\pi} x\sin^2 x \quad dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2}\left(\pi\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$ 5

$\boxed{30}$

(b) ආදේශය

$t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$ 5

$\therefore \int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int te^t dt$ 5

$= \frac{1}{2}\int t\frac{d}{dt}(e^t)dt = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\int e^t dt$ 5

$= \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^e + C$. 5 ආදේශය : $t = x^2$, $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + C$ 5 5

$\boxed{30}$

(c) $\frac{1}{x^3-1} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$1 \equiv A(x^2+x+1) + (x-1)(Bx+C)$

$x = 1$ ආදේශයෙන් $1 = 3A \implies A = \frac{1}{3}$ 5

$x = 0$ ආදේශයෙන්, $1 = A - C \implies C = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ 5

x^2 හි සංගුණක සමාන කිරීමෙන්, $0 = A + B \implies B = -\frac{1}{3}$ 5

$\boxed{15}$

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{(x+2)}{x^2+x+1}dx$$ 5

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{x^2+x+1}dx$$ 5

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$ 5 5 5

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C \quad 5 \quad 5$$

$\boxed{35}$

(d) ආදේශය : $t = \tan\left({}^{x}/_{2}\right) \implies dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\,dx \implies dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ 5

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x} = \int_0^1 \frac{dx}{5+4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+3.\frac{2t}{1+t^2}} \quad 5$$

$$= \int_0^1 \frac{2\,dt}{5(1+t^2)+4(1-t^2)+6t}$$

$$5 \quad = \int_0^1 \frac{2}{t^2+6t+9}$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{(t+3)^2} = 2\left[\frac{-1}{t+3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{6}$$

5

$\boxed{20}$

---

16 වන ප්‍රශ්නය

16. වෘත්ත දෙකක සමීකරණ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ හා $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ යැයි ගනිමු. මෙම වෘත්ත ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය වේ නම්, $2gg'+2ff'=c+c'$ බව පෙන්වන්න.

$x^2+y^2-8x-6y+16=0$ සමීකරණය සහිත C වෘත්තය x-අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

O මූලයෙහි පොදු කේන්ද්‍රය පිහිටන, අරය r වූ C_1 වෘත්තයක් හා අරය $R\,(>r)$ වූ C_2 වෘත්තයක් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී C වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. r හා R හි අගයන් ද A හා B හි ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

S යනු, C හා C_1 යන වෘත්ත දෙක ම ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන හා y-අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෘත්තයක් යැයි ගනිමු. S සඳහා තිබිය හැකි සමීකරණ දෙක සොයන්න.

C හා C_2 යන වෘත්ත දෙකට ම B ලක්ෂ්‍යයෙහි දී අඳින ලද පොදු ස්පර්ශකයට x-අක්ෂය P හි දී ද y-අක්ෂය Q හි දී ද හමු වේ. පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $4x+3y=40$ බවත්, PQ රේඛා ඛණ්ඩය විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය $3(x^2+y^2)-30x-40y=0$ බවත් පෙන්වන්න.

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ හා $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය වේ නම්, එවිට $(g-g')^2+(f-f')^2=g^2+f^2-c+g'^2+f'^2-c'$ 5

5 5

$\Rightarrow\ 2gg'+2ff'=c+c'$ **15**

C වෘත්තය $x^2+y^2-8x-6y+16=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=3^2$.

වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $(4,3)$ 5 අරය $=3$ 5

මෙම වෘත්තය $(4,0)$හිදී $x-$ අක්ෂය ස්පර්ශ කරයි, $\because$ කේන්ද්‍රයේ $y-$ ඛණ්ඩාංකය $=3$ 5 **15**

C_1 වෘත්තය : $x^2+y^2=r^2$, $A(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ ලක්ෂ්‍යයේදී බාහිර ලෙස C ස්පර්ශ කරයි, මෙහි

$\cos\alpha=\frac{4}{5}, \sin\alpha=\frac{3}{5}$.

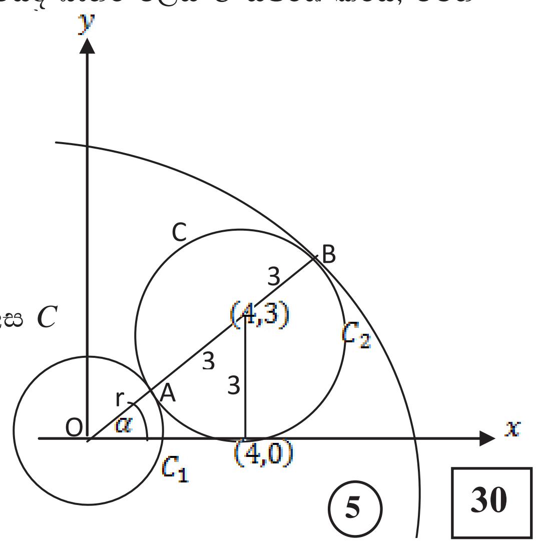
$r+3=5\Rightarrow r=2$ 5

$\therefore A\equiv\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$ 5

C_2 වෘත්තය : $x^2+b^2=R^2$, B ලක්ෂ්‍යයේදී අභ්‍යන්තර ලෙස C ස්පර්ශ කරයි, 5

$R=5+3=8$ 5

$\therefore\ B\equiv(8\cos\alpha,\ 8\sin\alpha)=\left(\frac{32}{5},\frac{24}{5}\right)$ 5



5 **30**

C හා C_1 ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන හා $y-$ අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෘත්තය S යැයි ගනිමු.

S: $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

එහි කේන්ද්‍රය ; $(-g,-f)$ හා අරය $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

$\because S$, $y-$ අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බැවින් අරය $=|g|$, 5

$g^2+f^2-c=g^2 \Rightarrow f=\pm\sqrt{c}$. 5

5

S හා C_1 ප්‍රලම්බව ඡේදනය $\Longrightarrow 0+0=c-2^2 \Rightarrow c=4$. එම නිසා $f=\pm 2$ 5

S හා දෙන ලද C වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය $\Longrightarrow 2g(-4)+2f(-3)=4+16=20$ 5

$$\Longrightarrow 4g+3f+10=0$$ 5

$f=+2 \Longrightarrow \quad 4g=-10-6 \Longrightarrow g=-4$ 5

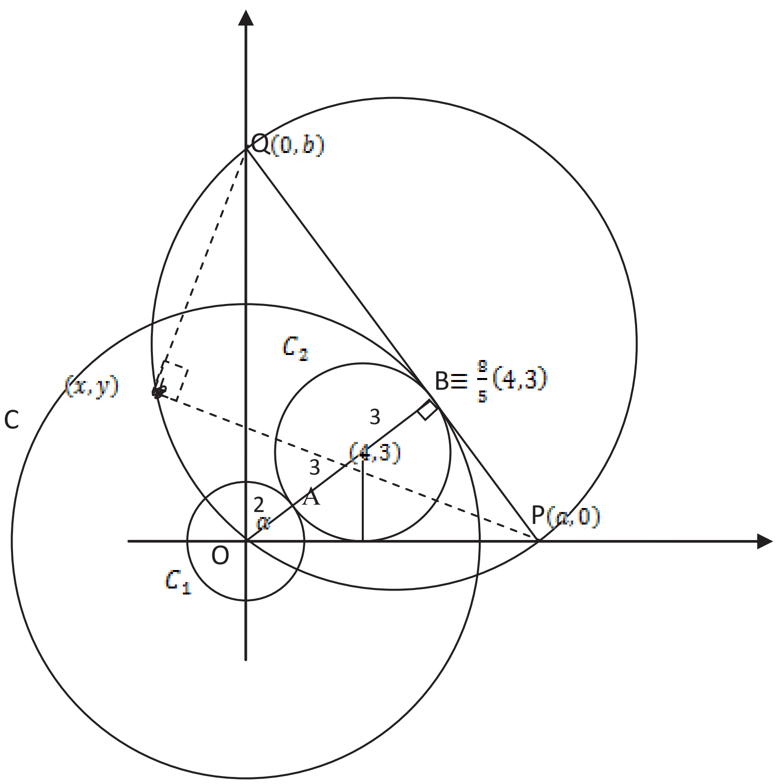
$f=-2 \Longrightarrow \quad 4g=-10+6 \Longrightarrow g=-1$ 5

S හි තිබිය හැකි සමීකරණ දෙක වන්නේ,

$x^2+y^2-8x+4y+4=0$ සහ 5

$x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 5

$\boxed{50}$



C හා C_2 ට පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ වේ ; මෙහි $P\equiv(a,0)$ හා $Q\equiv(0,b)$ යනු එයට ඛණ්ඩාංක අක්ෂ දෙක හමුවන ලක්ෂ්‍යයයි. 10

$a=8\sec\alpha=8.\frac{5}{4}=10 \Rightarrow P\equiv(10,0)$ 5

$b=8\ cosec\ \alpha=8.\frac{5}{3}=\frac{40}{3}\Rightarrow Q\equiv\left(0,\frac{40}{3}\right)$ 5

PQ හි සමීකරණය $\frac{x}{10}+\frac{3y}{40}=1$ 5 $\Rightarrow$ $4x+3y=40$

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

C හා C_2 වෘත්තවල පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $(x^2+y^2-8x-6y+16)-(x^2+y^2-64)=0$ 10

මගින් දෙනු ලැබේ.

$\Rightarrow 8x+6y-80=0 \Rightarrow 4x+3y=40.$ 5

එම නිසා $P\equiv(10,0)$ 5 හා $Q\equiv\left(0,\frac{40}{3}\right)$ 5 .

25

PQ රේඛා ඛණ්ඩය විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තය මත (x, y) ලක්ෂ්‍යයක් සපුරාලන අවශ්‍යතාව :

$$\left(\frac{y-0}{x-a}\right)\left(\frac{y-b}{x-0}\right)=-1 \quad 5$$

හෝ $$x(x-a)+y(y-b)=0 \quad 5$$

i.e. $x^2+y^2-ax-by=0$

$$x^2+y^2-10x-\frac{40}{3}y=0 \quad 5$$

හෝ $$3(x^2+y^2)-30x-40y=0$$

40

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (a) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta=1$ බව පෙන්වන්න.

(b) $f(x)=\cos 2x+\sin 2x+2(\cos x+\sin x)+1$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $k(1+\cos x)\sin(x+\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි k හා α යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$g(x)$ යන්න $\dfrac{f(x)}{1+\cos x}=\sqrt{2}\{g(x)-1\}$ වන ලෙස ගනිමු; මෙහි $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ වේ.

$y=g(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ **ඒනයින්**, ඉහත දී ඇති පරාසය තුළ $f(x)=0$ සමීකරණයට එක විසඳුමක් පමණක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(c) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$$a(b-c)\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}=(b+c)^2\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right)$$ බව පෙන්වන්න.

(a) $cos^2(\alpha+\beta)+cos^2\alpha+cos^2\beta-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta=1.$

$$=\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta]+cos^2\alpha+cos^2\beta \quad 5$$

5 5

$$=-[\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta][\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta]+cos^2\alpha+cos^2\beta \quad 5$$

5 5

$$=-cos^2\alpha\, cos^2\beta+(1-cos^2\alpha)(1-cos^2\beta)+cos^2\alpha+cos^2\beta$$

$$=1$$

30

(b) $f(x)=\cos 2x+\sin 2x+2(\cos x+\sin x)+1$

$$=2cos^2x-1+2\sin x\cos x+2\cos x+2\sin x+1 \quad 5$$

$$=2\cos x(\cos x+1)+2\sin x(\cos x+1) \quad 5$$

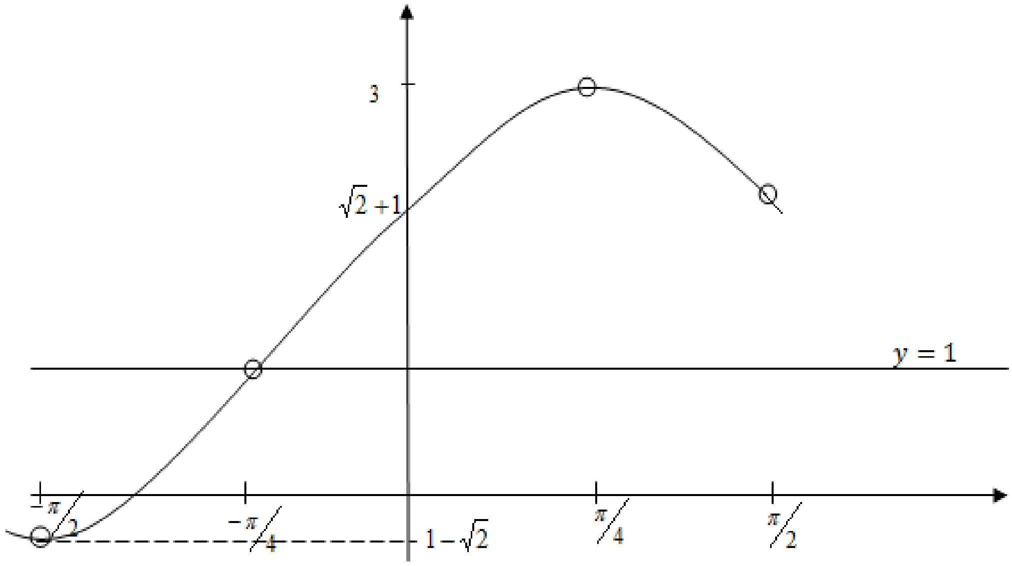
$$=2\sqrt{2}(\cos x+1)\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) \quad 5$$

5 $k=2\sqrt{2},\ \alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 5

25

$$\frac{f(x)}{1+\cos x}=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\{g(x)-1\} \quad 5$$

$$y=g(x)=2\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)+1 \quad 5$$



හැඩය 5 අවම සහ උපරිම 5 දෙකෙළවර 5

$x=0,\ y=\sqrt{2}+1$ 5 $y=1$ 5

$f(x)=0 \Rightarrow g(x)=1$ 5 එක විසඳුමක් පමණක් පවතී. $\therefore f(x)=0$ ට එක විසඳුමක් පමණක් පවතී.

$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}$ 5 $\boxed{45}$

5

(c) $A+B+C=\pi$ වන විට, සයින් නීතිය, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 5

5

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}$$

5

5

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$ හා $\because A+B+C=\pi$

5

$$=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cot\frac{A}{2}} \qquad \text{———} \quad *$$

5

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$ 5

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \qquad \text{———} \quad **$$

(*) හා (**) සමීකරණ ගුණ කිරීමෙන්,

$$\frac{a(b-c)}{(b+c)^2} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cot\frac{A}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad 5$$

$$a(b-c)\frac{\cot\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = (b+c)^2 \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad 5$$

$$a(b-c)\cot\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{A}{2} = (b+c)^2 \tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$\boxed{50}$

<u>තවත් ක්‍රමයක්</u>

$A+B+C=\pi$ (5) වන විට, සයින් නීතිය (5) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\frac{a(b-c)}{(b+c)^2} = \frac{\sin A\,(\sin B - \sin C)}{(\sin B + \sin C)^2} \quad 10 \quad 5$$

$$= \frac{\sin A . 2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad 5 \quad 5$$

$$= \frac{\sin A . \sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad 5 \quad (\because A+B+C=\pi)$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}.\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \quad 5$$

$$= \sin\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}.\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right) \quad 5$$

$$\Rightarrow a(b-c)\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2} = (b+c)^2\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)\sec\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

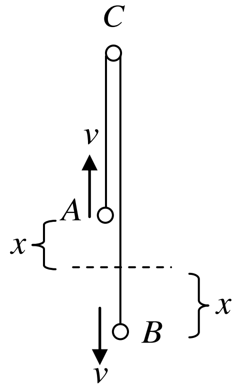
$\boxed{50}$

2.2.3. II ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුර, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $2m$ වූ A හා B අංශු දෙකක්, අචල කුඩා සැහැල්ලු සුමට C කප්පියක් උඩින් යන $2l$ දිගකින් යුතු සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට සම්බන්ධ කර ඇත. එක් එක් අංශුව C ට l ගැඹුරකින් අල්ලා තබා පද්ධතිය මෙම පිහිටීමෙන් නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. **ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්**, එක් එක් අංශුව $x(< l)$ දුරක් චලනය වී ඇති විට එක් එක් අංශුවෙහි v වේගය, $v^2 = \frac{2gx}{3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. **ඒනයින්**, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, පද්ධතියේ ත්වරණය සොයන්න.



චා.ශ + වි.ශ = නියතයක් යෙදීමෙන් $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(2m)v^2 - mg(l-x) - 2mg(l+x) = \text{නියතයකි.}$$

$$= \text{ආරම්භක අගය} = 0 - 3mgl \quad 15$$

වෙනත් ක්‍රමයක් : ශක්ති සංස්ථිතියෙන් $\Rightarrow \frac{1}{2}mgx - mgx = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(2m)v^2$ 15

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 3mv^2 = (2mg - mg)x$$

$$v^2 = \frac{2gx}{3} \quad 5$$

x විෂයයෙන් අවකලනයෙන් ;

$$2v\frac{dv}{dx} = \frac{2g}{3}$$

පද්ධතියේ ත්වරණය $= \frac{g}{3}$ 5

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>
t විෂයයෙන් අවකලනයෙන්
$2v\frac{dv}{dt} = \frac{2g}{3}\left(\frac{dx}{dt}\right)$
ත්වරණය $= \frac{dv}{dt} = \frac{g}{3}$ 5

25

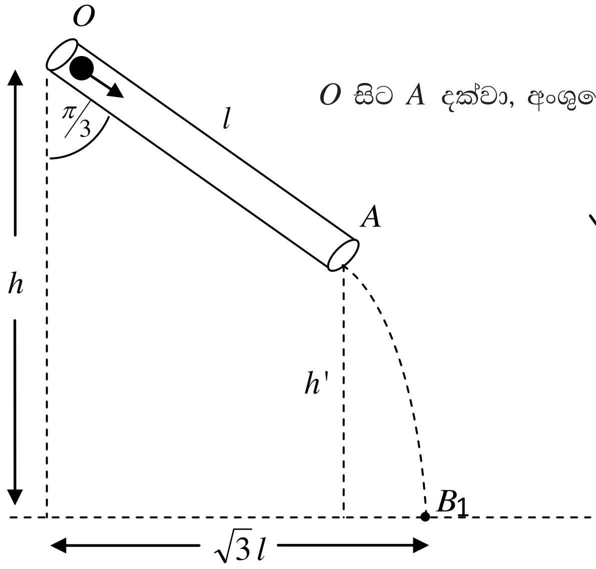
---

1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් වැඩිම ප්‍රතිශතයක් එනම් 95%ක් පිළිතුරු සපයා ඇති ප්‍රශ්නයයි. මෙහි පහසුතාව 53%කි. සමහර සිසුන්ට අපේක්ෂිත පිළිතුර ලබා ගැනීමට නොහැකි වී ඇත්තේ ශක්ති සංස්ථිති නියමය නිවැරදිව භාවිත කර නොමැති වීම හේතුවෙනි. 'එනයින්' භාවිතයෙන් ත්වරණය ලබා ගැනීම ද අවම මට්ටමක පැවතුණි.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. දෙකෙළවර ම විවෘත, දිග l වූ ඍජු සිහින් සුමට OA නලයක්, O ඉහළ කෙළවර තිරස් පොළොවට $h(>l)$ උසක් ඉහළින් ඇති ව, යටි අත් සිරස සමග $\frac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන පරිදි සවි කර ඇත. නලය ඇතුළත, O හි සීරුවෙන් තබනු ලැබූ අංශුවක් නලය දිගේ පහළට ලිස්සා යයි. ඊළඟට අංශුව A කෙළවරින් නලයෙන් ඉවත්ව ගොස්, O සිට $\sqrt{3}\,l$ තිරස් දුරකින් වූ B ලක්ෂ්‍යයක දී පොළොව සමග ගැටෙයි. (i) A හි දී අංශුවේ වේගය $\sqrt{gl}$ බව ද (ii) $h = \frac{3l}{2}$ බව ද පෙන්වන්න.



O සිට A දක්වා, අංශුවේ නියත ත්වරණය සහිත චලිතය සඳහා

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$v^2 = 2 \cdot g\cos\frac{\pi}{3} \cdot l \quad 5$$

$$v^2 = gl; \quad v = \sqrt{gl}$$

A සිට B දක්වා චලිතය සඳහා,

$\rightarrow$
$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$\sqrt{3}\,l - l\sin\frac{\pi}{3} = t\sqrt{gl}\sin\frac{\pi}{3} \quad 5$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}l \cdot \frac{1}{\sqrt{gl}} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \quad 5$$

5

$\downarrow$
$$h' = \frac{1}{2}\sqrt{gl} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{1}{2}g \cdot \frac{l}{g} = l$$

$$\therefore\ h = l + l\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3l}{2}$$

5

25

---

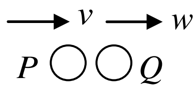
2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 87%ක් මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා තිබූ අතර ප්‍රශ්නයේ පහසුතාව 26%කි. සැලකිය යුතුව ඇත්තේ ඍජු ආනත නලයක් තුළ අංශුවක චලිතයකි. මෙම චලිතය පිළිබඳ ව බොහෝ අයදුම්කරුවන් නිවැරදිව අවබෝධ කරගෙන නොතිබිණි. එබැවින් චලිත සමීකරණය නිවැරදිව යොදා නොගැනීමෙන් සාර්ථක පිළිතුරු සැපයීමට නොහැකි වී ඇත.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. සුමට තිරස් මේසයක් මත u ප්‍රවේගයෙන් චලනය වෙමින් පවතින ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, P හි පෙතෙහි නිසලව තිබෙන m ස්කන්ධය සහිත වෙනත් Q අංශුවක් සමග සරල ලෙස ගැටෙයි. අංශු දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $e\,(0<e<1)$ නම්, ගැටුමෙන් පසු P හා Q හි ප්‍රවේගවල ඓක්‍යය හා අන්තරය සඳහා ප්‍රකාශන, u හා e ඇසුරෙන් ලබා ගන්න. **ඒනයින්**, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, ගැටුමට පසු පද්ධතියේ ඉතිරි වන චාලක ශක්තිය, මුල් චාලක ශක්තියට දරන අනුපාතය, $\left(1+e^2\right):2$ බව පෙන්වන්න.

ගැටුමට පෙර චාලක ශක්තිය $= T_0 = \frac{1}{2}mu^2$



ගැටුමට පසු චාලක ශක්තිය $= T_1 = \frac{1}{2}m\left(v^2+w^2\right)$ 5

ගම්‍යතා සංස්ථිතිය :

$$mu = mv + mw \text{ .... } (1)$$

$$u = v + w \qquad 5$$

නිව්ටන් ප්‍රත්‍යාගති නියමය :

$$eu = w - v \text{ .... } (2) \qquad 5$$

චා. ශ. අනුපාතය $= \dfrac{T_1}{T_0} = \dfrac{v^2+w^2}{u^2} = \left[\dfrac{(v+w)^2+(w-v)^2}{2u^2}\right] = \left(\dfrac{u^2+e^2u^2}{2u^2}\right)$ 5 5

$$= \frac{1}{2}\left(1+e^2\right)$$

$\boxed{25}$

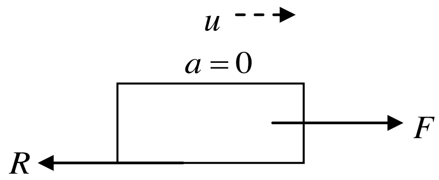
---

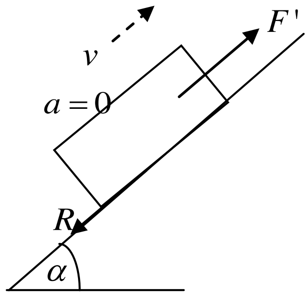
3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 91%ක්ම මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා ඇති අතර මෙම ප්‍රශ්නයේ පහසුතාව 56%කි. බොහෝ අපේක්ෂකයන් ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය යෙදීම, නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය යෙදීම හා චාලක ශක්තිය සෙවීම නිවැරදිව ඉදිරිපත් කර ඇතත් සුළු කිරීම් දෝෂ හේතුවෙන් ප්‍රශ්නයට හිමි මුළු ලකුණු ලබා ගෙන නොමැත.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. එන්ජිම H kW ජවයකින් ක්‍රියා කරමින් ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් M වූ ලොරියක්, සෘජු සමතලා පාරක් දිගේ u m s^{-1} නියත ප්‍රවේගයකින් ගමන් කරයි. ඉන් පසුව, එන්ජිම $2H$ kW ජවයකින් ක්‍රියා කරමින්, තිරසට α කෝණයක් ආනත වූ සෘජු පාරක් දිගේ ලොරිය ඉහළට චලනය වන අතර, චලිතයට ප්‍රතිරෝධය තිරස් චලිතයට ඇති ප්‍රතිරෝධය ම වේ. මෙම අවස්ථාවේ දී ලොරියේ උපරිම වේගය $\dfrac{2Hu}{H + Mgu\sin\alpha}$ m s^{-1} බව පෙන්වන්න.





ජවය $= H$ kW බැවින්

ප්‍රකර්ෂණ බලය $F = \dfrac{1000H}{u}$ N 5

$\longrightarrow$ $F = ma$

$$\frac{1000H}{u} - R = 0$$

$$R = \frac{1000H}{u} N \quad 5$$

$\nearrow$ $F = ma$

$$F' - R - Mg\sin\alpha = 0 \quad 5$$

5

$$\frac{2000H}{v} = \frac{1000H}{u} + 1000Mg\sin\alpha$$

$$\frac{2H}{v} = \frac{H + Mgu\sin\alpha}{u} \quad 5$$

$$v = \frac{2Hu}{H + Mgu\sin\alpha}\ \text{ms}^{-1}$$

$\boxed{25}$

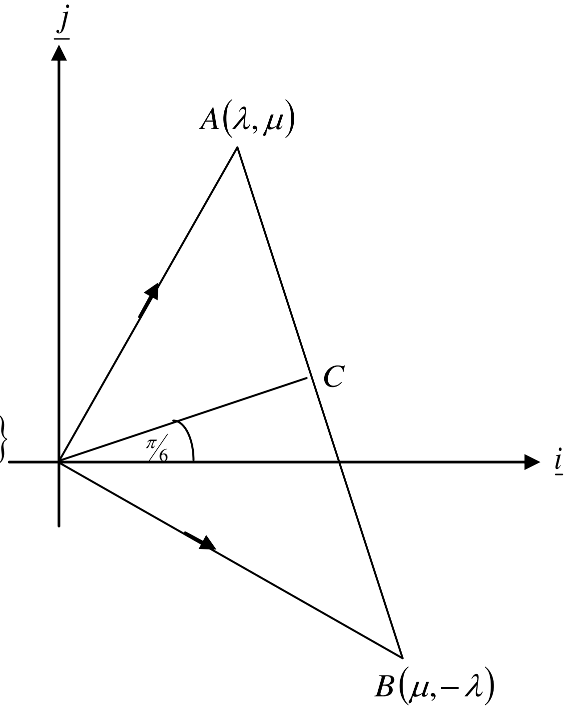
---

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 91%ක්ම මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා ඇති අතර මෙම ප්‍රශ්නයේ පහසුතාව 45%කි. බොහෝ අයදුම්කරුවන් අදාළ සමීකරණ නිවැරදිව යොදා තිබුණ ද ඒකක නිවැරදිව යොදා නොගැනීම හේතුවෙන් අවසාන පිළිතුර ලබාගෙන නොතිබිණි. ඒ නිසා ප්‍රශ්නයට අදාළ මුළු ලකුණු ලබා ගැනීමට අපහසු වී ඇත.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\lambda\mathbf{i}+\mu\mathbf{j}$ හා $\mu\mathbf{i}-\lambda\mathbf{j}$ වේ; මෙහි λ හා μ යනු $0<\lambda<\mu$ වන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $A\hat{O}B$ සෘජු කෝණයක් බව පෙන්වන්න. AB රේඛා ඛණ්ඩයෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC}$ දෛශිකයේ විශාලත්වය 2 නම් හා එය $\mathbf{i}$ ඒකක දෛශිකය සමග $\dfrac{\pi}{6}$ ක කෝණයක් සාදයි නම්, λ හා μ හි අගයන් සොයන්න.



$$\overrightarrow{OA}=\lambda\underline{i}+\mu\underline{j}$$

$$\overrightarrow{OB}=\mu\underline{i}-\lambda\underline{j}$$

$\lambda,\mu\in\Re^{+}$ සඳහා $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\lambda\mu-\mu\lambda=0$ 5

$$\Rightarrow\ A\hat{O}B=\frac{\pi}{2}$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\lambda\underline{i}+\mu\underline{j}+\overrightarrow{AC}$$

$$=\lambda\underline{i}+\mu\underline{j}+\frac{1}{2}\{(\mu\underline{i}-\lambda\underline{j})-(\mu\underline{i}-\lambda\underline{j})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\lambda+\mu)\underline{i}+\frac{1}{2}(\mu-\lambda)\underline{j}$$ 5

$$\overrightarrow{OC}\cdot\underline{i}=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}=\frac{1}{2}(\lambda+\mu)$$ 5

$$\overrightarrow{OC}\cdot\underline{j}=2\sin\frac{\pi}{6}=1=\frac{1}{2}(\mu-\lambda)$$ 5

අඩු කිරීමෙන් සහ එකතු කිරීමෙන් $\Rightarrow$

$$\lambda=\sqrt{3}-1,\ \mu=\sqrt{3}+1$$

5

$\boxed{25}$

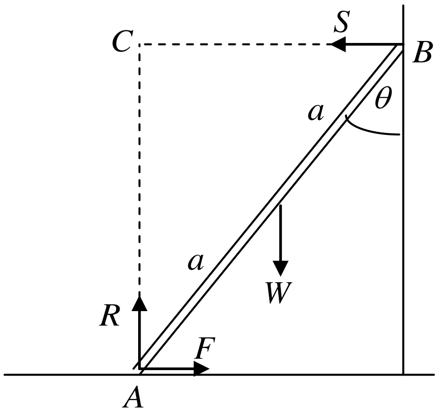
---

5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙය II පත්‍රයේ A කොටසට අදාළ ප්‍රශ්නවලින් අඩුම පහසුතා දර්ශකයක් හිමි ප්‍රශ්නය වේ. අයදුම්කරුවන්ගෙන් 83%ක්ම මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා තිබූ අතර ප්‍රශ්නයේ පහසුතාව 18%ක් වේ. සිසුන්ගේ දෛශික පිළිබඳ මූලික දැනුම ඉතා අඩු බව සපයා ඇති පිළිතුරුවලින් මනාව පෙන්නුම් කෙරේ. දෛශික පිළිබඳ මූලික සංකල්ප දියුණුවන පරිදි සිසුන්ට අභ්‍යාස කරවීම වඩාත් අවශ්‍ය වනු ඇත.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. **ඒකාකාර සිහින් බර දණ්ඩක්, එහි එක කෙළවරක් රළු තිරස් ගෙබිමක් මත හා අනෙක් කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව නිසලව තිබේ. දණ්ඩ බිත්තිය සමග θ සුළු කෝණයක් සාදමින්, බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටයි. මෙම පිහිටීමේ දී දණ්ඩ සමතුලිතව තිබීම සඳහා, දණ්ඩ හා ගෙබිම අතර μ ඝර්ෂණ සංගුණකය $\mu \geq \frac{1}{2}\tan\theta$ සපුරාලිය යුතු බව පෙන්වන්න.**



විභේදනයෙන්

$\rightarrow \quad F = S$ (5)

$\uparrow \quad R = W$ (5)

A වටා ඝූර්ණය ගැනීමෙන් :

$A \curvearrowleft \quad S \cdot 2a\cos\theta = W \cdot a\sin\theta$ (5)

$S = F$ නිසා $F = \frac{1}{2}W\tan\theta \leq \mu R$ (5)

$\frac{1}{2}W\tan\theta \leq \mu W \Rightarrow \mu \geq \frac{1}{2}\tan\theta$

(5)

25

---

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 88%ක් ම මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා තිබූ අතර ප්‍රශ්නයේ පහසුතාව 40%කි. බොහෝ අපේක්ෂකයන් මෙම සමතුලිත අවස්ථාව නිවැරදිව අවබෝධ කරගෙන නොමැත. මෙය සීමාකාරී සමතුලිත අවස්ථාව බව සලකා සමීකරණ ලිවීමෙන් අවශ්‍ය පිළිතුරට ළඟා වීමට නොහැකි වී ඇත.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. A, B හා C යනු S නියැදි අවකාශයක ස්වායත්ත සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A \cup B \cup C)$ සම්භාවිතාව, $P(A), P(B)$ හා $P(C)$ සම්භාවිතා ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ හා $P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{4}$ බව තවදුරටත් දී ඇති විට, $P(C)$ සම්භාවිතාව සොයන්න.

දෙනලද සම්භාවිතා : $P(A)=\frac{1}{4},\ P(B)=\frac{1}{2}$ and $P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{4}$

A, B හා C ස්වායත්ත සිද්ධි බැවින්,

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)\cdot P(B)-P(B)\cdot P(C)-P(C)\cdot P(A)+P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

10

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+P(C)-\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot P(C)+\frac{1}{8}\cdot P(C) \quad 5$$

$$\frac{1}{8}=P(C)\left[1+\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\right]=P(C)\cdot\left[\frac{3}{8}\right] \quad 5 \qquad \therefore\ P(C)=\frac{1}{3} \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 87%ක් පමණ මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා තිබූ අතර පහසුතාව 23%ක් වේ. මෙය සම්භාවිතා නියම ආශ්‍රිත ප්‍රශ්නයකි. මෙහි $P(A \cup B \cup C)$ සම්භාවිතාව පිළිබඳ ප්‍රකාශනය නිවැරදිව යොදා නොගැනීමෙන් හා ස්වායත්තතාව පිළිබඳ නිසි අවබෝධයක් නොමැති වීමෙන් අවශ්‍ය පිළිතුරට ළඟාවීමට නොහැකි වී ඇත.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. සර්වසම පෙනුමැති විදුලි බල්බ 7 ක් පෙට්ටියක අඩංගු වේ. මෙම බල්බවලින් 2 ක් දෝෂ සහිත බවත්, ඉතිරිය පාවිච්චි කළ හැකි බවත් දැනගෙන ඇත. දෝෂ සහිත බල්බ 2 ම හඳුනා ගන්නා තුරු එකකට පසුව අනෙක වශයෙන් බල්බ පරීක්ෂා කරනු ලැබේ.

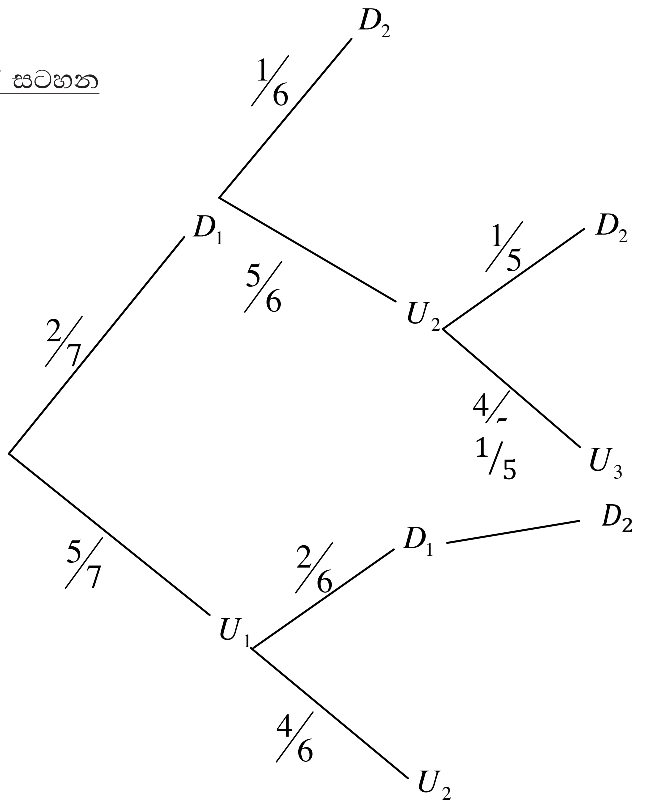
(i) බල්බ දෙකක් පමණක්, (ii) බල්බ තුනක් පමණක්

පරීක්ෂා කිරීමෙන් පසු දෝෂ සහිත බල්බ දෙක ම හඳුනා ගැනීමට හැකිවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

විදුලි බල්බ 7 ක් අතුරෙන් 2 ක් දෝෂ සහිත වන අතර 5 ක් පාවිච්චි කළ හැකි වේ.

$D =$ දෝෂ සහිත වීම, $U (= D')$ = පාවිච්චි කළ හැකි වීම

රුක් සටහන



$P(D_1) = \frac{2}{7}$ 5

$P(D_1 D_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$ 5

$P(D_1 U_2 D_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{21}$ 5

$P(U_1 D_1 D_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{21}$ 5

පරීක්ෂාව ; 1 වැනි 2 වැනි 3 වැනි

පරීක්ෂා දෙකක් පමණක් සෑහීමේ සම්භාවිතාව $= P(D_1 D_2) = \frac{1}{21}$

පරීක්ෂා තුනක් පමණක් සෑහීමේ සම්භාවිතාව $= P(D_1 U_2 D_2) + P(U_1 D_1 D_2) = \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \frac{2}{21}$ 5

$\boxed{50}$

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

A කොටසේ දෙවෙනියට අවම පහසුතාව ඇති ප්‍රශ්නය මෙය වේ. අයදුම්කරුවන්ගෙන් 81%ක් පමණ මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා තිබූ අතර පහසුතාව 20%ක් වේ. මෙහිදී ද අයදුම්කරුවන් ප්‍රශ්නය නිවැරදිව අවබෝධ කරගෙන නොමැති වීමෙන් හා ඔවුන්ට මූලික සම්භාවිතා සංකල්ප ගැන අවබෝධයක් නොමැතිවීමෙන් සාර්ථකව පිළිතුරු දීමට නොහැකි වී ඇති බව පැහැදිලි වේ.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. **පූර්ණ සංඛ්‍යා** හතක S කුලකයක සංඛ්‍යා පහත දැක්වෙන අයුරු **ආරෝහණ පටිපාටියට** සකසා ඇත.

$S = \{1, 2, 4, x, y, 11, 13\}$.

සංඛ්‍යාවල මධ්‍යන්‍යය y නම්, x හා y හි අගයන් නිර්ණය කරන්න. සංඛ්‍යාවල විචලතාව $\frac{120}{7}$ බව පෙන්වන්න.

ආරෝහණ පිළිවෙළට ධන පූර්ණ සංඛ්‍යා හත : 1 2 4 x y 11 13

මධ්‍යන්‍යය $= y \Rightarrow 1+2+4+x+y+11+13=7y$

$\Rightarrow 6y-x=31$ 5

$x=4$ යැයි සිතමු. : $6y-4=31$

$6y=35.$ 5 y සඳහා ධන පූර්ණ **විසඳුමක් නොමැත.**

$x=5$: යැයි සිතමු : $6y-5=31$

$y=6$ 5

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

$\because 4 \le x \le 11$ බැවින්

$35 \le 6y \le 42$

තිබිය හැකි නිබිල y :

$y=6$ හෝ $y=7$

$\Rightarrow x=5$ 5 $\Rightarrow x=11$ 5

($x<y$ නිසා විසංවාදයකි)

විසඳුම : $x=5,\ y=6=\mu$

විචලතාව : $S^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}(x_i-\mu)^2$ 5

$= \frac{1}{7}\left[(-5)^2+(-4)^2+(-2)^2+(-1)^2+0+5^2+7^2\right]$ 5

$= \frac{1}{7}(25+16+4+1+25+49) = \frac{120}{7}$

25

---

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 82%ක්ම මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා තිබූ අතර පහසුතාව 30%ක් වේ. මෙය සංඛ්‍යානයට අදාළ ප්‍රශ්නයකි. x හා y අතර එක් ඒකජ සම්බන්ධතාවක් සොයා ගත් පසු අඥාත පද දෙක නිර්ණය කිරීම සඳහා දී ඇති දත්ත නිවැරදිව සැලකිලිමත්ව භාවිත කර නොමැති වීමෙන්, බොහෝ සිසුන්ට සාර්ථකව පිළිතුරු සැපයීමට නොහැකි වී ඇත.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. මුහුණත් 1, 2, 3, 4, 5, 6 ලෙස සලකුණු කරන ලද දාදු කැටයක් 50 වරක් උඩ දැමූ විට දාදු කැටයේ උඩත් මුහුණතේ දක්නට ලැබුණු අංකවල සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය පහත දැක්වේ:

අංකය	1	2	3	4	5	6
සංඛ්‍යාතය	α	9	γ	11	8	7

සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියෙහි මධ්‍යන්‍යය 3.66 බව දී ඇත්නම්, α හා γ හි අගයන් නිර්ණය කර, මාතය හා මධ්‍යස්ථය සොයන්න.

Number x	1	2	3	4	5	6
Frequency f	α	9	γ	11	8	7

$\sum f =: \ 50 = \alpha + \gamma + 35 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma = 15$ 5

තවද, මධ්‍යන්‍යය $= 3.66 \Rightarrow 50 \times 3.66 = 183 = 1 \cdot \alpha + 2 \cdot 9 + 3 \cdot \gamma + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 7$

$= \alpha + 3\gamma + 144 \quad \Rightarrow \quad \alpha + 3\gamma = 39$ 5

5

විසඳීමෙන් : $\gamma = 12$ සහ $\alpha = 3$ 5

මාතය $= 3$ 5 මධ්‍යස්ථය $= 4$

25

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 77%ක් මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා තිබූ අතර පහසුතාව 24%ක් වේ. මෙයද සංඛ්‍යානයට අදාළ සරල භාවිතයකි. මෙහිදී අසමූහිත සංඛ්‍යා ව්‍යාප්තියකට අනුරූප මධ්‍යන්‍යය අර්ථ දැක්වීම, අවස්ථාවෝචිතව යොදා ගැනීමට නොහැකි වීමෙන් බොහෝ පිළිතුරු අසාර්ථක වී ඇත.

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) P හා Q අංශු දෙකක් අචල තිරස් ගෙබිමක් මත ලක්ෂ්‍ය දෙකක සිට පිළිවෙළින් u හා $\frac{u}{\sqrt{2}}$ වේගවලින් සිරස් ව ඉහළට, එක විට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. ගෙබිම සිට $\frac{u^2}{4g}$ උසකින් අචල සුමට තිරස් සිවිලිමක් ඇත. සිවිලිමත් එය සමග ගැටෙන P අංශුවත් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{\sqrt{2}}$ වන අතර, අංශු දෙක ගුරුත්වය යටතේ පමණක් ඉහළට හා පහළට චලනය වේ.

(i) P අංශුව සිවිලිම සමග ගැටීමට මොහොතකට පෙර එහි වේගයත්, ගැටීම සිදු වන මොහොත දක්වා ගත වූ T_1 කාලයත් සොයන්න.

P අංශුව එහි ප්‍රක්ෂේප ලක්ෂ්‍යය කරා $\frac{u\sqrt{3}}{2}$ වේගයෙන් ආපසු පැමිණෙන බව පෙන්වන්න.

(ii) Q අංශුව, සිවිලිමට යන්තමින් ළඟා වන බව පෙන්වා, එම මොහොත දක්වා ගත වූ T_2 කාලය සොයන්න.

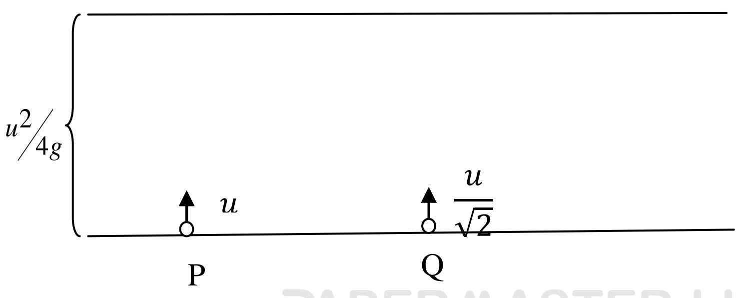
(iii) P හා Q අංශු දෙකෙහි ප්‍රක්ෂේප මොහොතේ සිට ආපසු අදාළ ප්‍රක්ෂේප ලක්ෂ්‍ය වෙතට පැමිණීම දක්වා, ඒවායේ චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන්, එක ම රූපයක අඳින්න.

(iv) ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාර භාවිතයෙන්, P අංශුව සිවිලිම සමග ගැටෙන මොහොතේ දී Q අංශුව, සිවිලිමට $\frac{u^2}{2g}\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ සිරස් දුරක් පහළින් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

(*b*) S නැවක්, u ඒකාකාර වේගයෙන් උතුරු දිශාවට යාත්‍රා කරයි. එහි සරල රේඛීය පෙත P වරායක සිට නැගෙනහිර පැත්තට p ලම්බ දුරකින් පිහිටා ඇත. එක්තරා මොහොතක දී, $\overrightarrow{PS}$ හි දිශාව නැගෙනහිරින් දකුණට 45° කෝණයක් සාදන විට දී ම, S නැව හමු වීම සඳහා B_1 හා B_2 සැපයුම් බෝට්ටු දෙකක් P වරායේ සිට වෙනස් දිශා දෙකකට $v\left(\frac{u}{\sqrt{2}} < v < u\right)$ ඒකාකාර වේගයෙන් එක විට ගමන් අරඹයි. මෙම බෝට්ටු පිළිවෙළින් T_1 හා $T_2 (> T_1)$ කාලවල දී S නැවට ළඟා වේ. $\frac{v}{u} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ බව තවදුරටත් දී ඇත්නම්, S නැවට සාපේක්ෂ ව B_1 හා B_2 බෝට්ටුවල චලිත සඳහා සාපේක්ෂ ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි දළ සටහන් එක ම රූපයක ඇඳ, P වරායේ සිට S නැව වෙත ගමන් කිරීමේ දී B_1 හා B_2 බෝට්ටුවල නියම චලිත දිශා සොයන්න.

තවදුරටත්, $T_2 - T_1 = \frac{2\sqrt{3}\,p}{u}$ බව පෙන්වන්න.

(a)



(i) P අංශුව

$$v^2 = u^2 - 2g.\frac{u^2}{4g} = \frac{u^2}{2}$$ 5

සිවිලිම සමඟ ගැටුමට පෙර P හි ප්‍රවේගය, $v = \frac{u}{\sqrt{2}} \uparrow$ 5

කාලය T_1 දෙනු ලබන්නේ $\frac{u}{\sqrt{2}} = u - gT_1$ 5 $\Rightarrow T_1 = \frac{u}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **15**

සිවිලිම සමඟ ගැටුමට මොහොතකට පසු එහි ප්‍රවේගය $= ev = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{u}{2} \downarrow$ 5

ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යයට ආපසු පැමිණෙන විට P හි w ප්‍රවේගය

$$w^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + 2g\left(\frac{u^2}{4g}\right) \Rightarrow w = \frac{u\sqrt{3}}{2}$$ 5 **10**

(ii) Q අංශුව

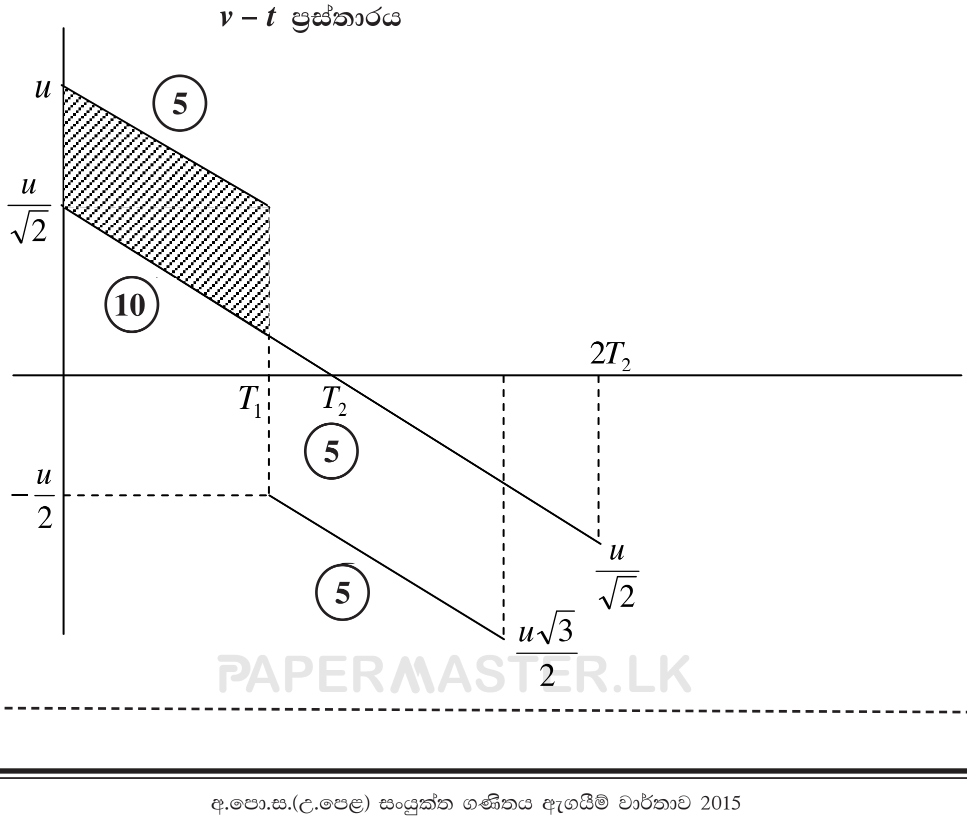
$$v_1^2 = \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2g\left(\frac{u^2}{4g}\right) = 0;$$ 5 Q අංශුව, ශුන්‍ය ප්‍රවේගයකින් සිවිලිමට ළඟා වෙයි.

සිවිලිමට ළඟා වීමට ගත කරන කාලය T_2 දෙනු ලබන්නේ $0 = \frac{u}{\sqrt{2}} - gT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{u}{\sqrt{2}g}$ 5 **10**

ආපසු (පහළට) චලිතයේදී, Q අංශුව ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවීමේ ප්‍රවේගය $= \frac{u}{\sqrt{2}} \downarrow$ 5

ගත වූ කාලය $2T_2 = \frac{u}{g}\sqrt{2}$

(iii) $v - t$ ප්‍රස්තාරය



30

(iv) කාලය T_1 වන විට Q අංශුව සිවිලිමට පහළින් පිහිටන දුර

= රූපසටහනෙහි අඳුරු පෙදෙසේ වර්ගඵලය

$$=\left(u-\frac{u}{\sqrt{2}}\right)T_1 \quad (5)$$

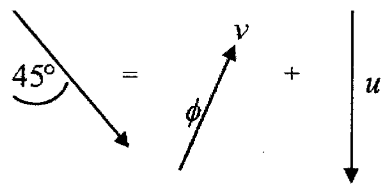
$$=\frac{u}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)\times\frac{u}{\sqrt{2}g}\left(\sqrt{2}-1\right) \quad (5)$$

$$=\frac{u^2}{2g}\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

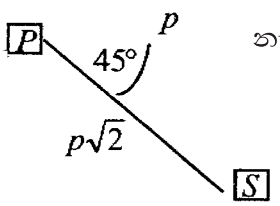
10

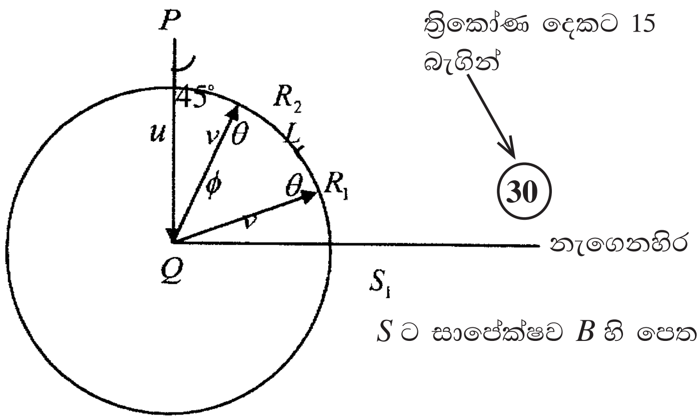
(b) වරාය P, නැව S, බෝට්ටුව B

ප්‍රවේ (B, S) = ප්‍රවේ (B, P) + ප්‍රවේ (P, S) (5)



(5)





ප්‍රවේ (B, P) සඳහා දිශා දෙකක් තිබිය හැකි අතර ඒවා එක එකක් සාපේක්ෂ පෙත සමඟ θ කෝණයක් සාදයි.

$\frac{v}{u}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ බව දී ඇත.

PQR_1 හෝ PQR_2 ත්‍රිකෝණයෙන්,

$$\frac{v}{\sin 45^\circ}=\frac{u}{\sin\theta}\Rightarrow \sin\theta=\left(\frac{u}{v}\right).\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ \quad (5)$$

(5)

$$\therefore \phi=15^\circ$$

වරායට (පොළොවට) සාපේක්ෂව,

(i) B_1 හි ප්‍රවේගය, නැගෙනහිරෙන් උතුරට 15° කෝණයක් සාදයි. (5)

(ii) B_2 හි ප්‍රවේගය, උතුරෙන් නැගෙනහිරට 15° කෝණයක් සාදයි. (5)

60

$$T_2 - T_1 = \sqrt{2}\,p\left(\frac{1}{PR_2} - \frac{1}{PR_1}\right) = \frac{\sqrt{2}p}{PR_1.PR_2}\left(PR_1 - PR_2\right)$$

5

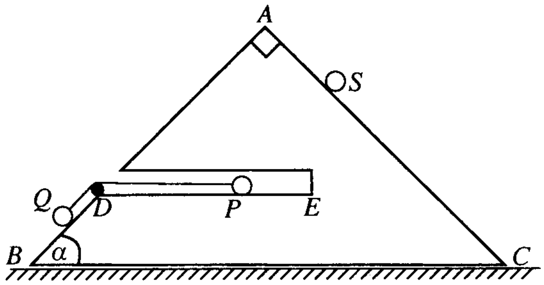
$$= \frac{\sqrt{2}pv}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{2}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}pv}{\left(\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}p\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u}{\frac{u^2}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{2\sqrt{3}p}{u}$$

5 5

15

---

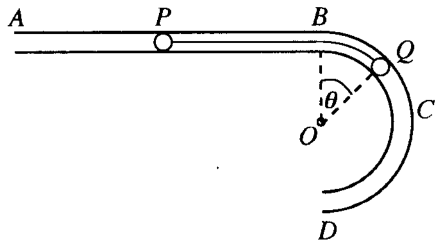
12. (*a*) දී ඇති රූපයේ, ABC ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය M වූ ඒකාකාර සුමට කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන සිරස් හරස්කඩක් නිරූපණය කරයි. කුඤ්ඤය තුළ BC ට සමාන්තර වූ DE සිහින් සුමට පීල්ලක් ඇත. AB හා AC රේඛා, අදාළ මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වන අතර $A\hat{B}C = \alpha$ හා $B\hat{A}C = \dfrac{\pi}{2}$ වේ.



BC අඩංගු මුහුණත අචල සුමට තිරස් මේසයක් මත සිටින පරිදි කුඤ්ඤය තබා ඇත. එක එකක ස්කන්ධය m වූ P හා Q අංශු දෙකක් පිළිවෙළින් DE හා DB මත තබා ඒවා, D ලක්ෂ්‍යයෙහි පිහිටි කුඩා සුමට සැහැල්ලු කප්පියක් උඩින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ඈඳා ඇත. ස්කන්ධය $\dfrac{m}{2}$ වූ S අංශුවක් AC මත ලක්ෂ්‍යයක තබා P හා Q සම්බන්ධ කෙරෙන තන්තුව ඇදී තිබිය දී, පද්ධතිය මෙම පිහිටීමෙන් නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.

P අංශුවට ED දිගේ ද Q අංශුවට DB දිගේ ද S අංශුවට AC දිගේ ද චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න. තවදුරටත්, මුළු පද්ධතියට ම BC දිගේ චලිත සමීකරණය ලියන්න. **ඒනයින්**, කුඤ්ඤයේ ත්වරණය $\overrightarrow{BC}$ හි දිශාවට $\dfrac{mg\sin\alpha}{2M+3m-2m\cos\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $ABCD$ සිහින් සුමට නලයක් පහත රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට නවා ඇත. නලයේ AB කොටස සෘජු වේ. BCD කොටසට අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අර්ධ වෘත්තාකාර හැඩයක් ඇති අතර BD විෂ්කම්භය AB ට ලම්බ වේ. AB තිරස් ව හා ඉහළින් ම ඇතිව නලය සිරස් තලයක සවිකර ඇත. නලය ඇතුළත, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය $3m$ වූ Q අංශුවක් $l\left(>\dfrac{\pi a}{2}\right)$ දිගැති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. ආරම්භයේ දී, තන්තුව ඇදී AB දිගේ තිබෙන අතර Q අංශුව B ලක්ෂ්‍යයේ තබා ඇත. Q අංශුව මෙම පිහිටීමේ සිට යන්තමින් විස්ථාපනය කරනු ලැබීමෙන් t කාලයක දී OQ අරය θ සුළු කෝණයකින් හැරේ.

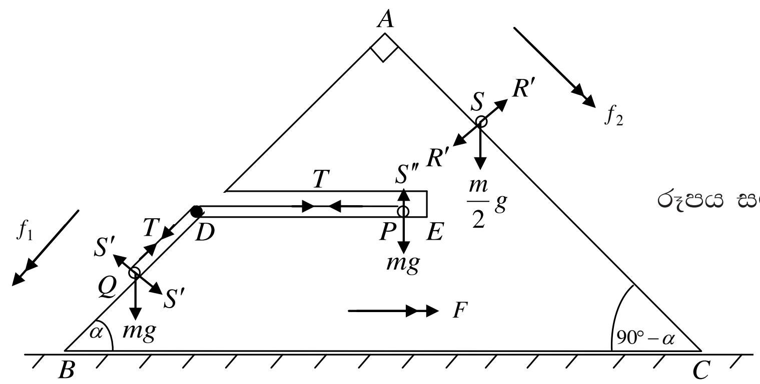


ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්, $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = \dfrac{3g}{2a}(1-\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, P අංශුවේ ත්වරණය $\dfrac{3g}{4}\sin\theta$ බව පෙන්වන්න.

t කාලයේ දී Q අංශුව මත නලයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව හා තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

(a)



රූපය සඳහා 10

නිව්ටන් දෙවැනි නියමය යෙදීමෙන් :

P අංශුවට, ED දිගේ : $\longleftarrow$

$$T = m(f_1 - F) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \qquad 10$$

Q අංශුවට, DB දිගේ :

$$mg\sin\alpha - T = m\left(f_1 - F\cos\alpha\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \quad 10$$

S අංශුවට, AC දිගේ :

$$\frac{m}{2}g\cos\alpha = \frac{m}{2}(f_2 + F\sin\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \quad 10$$

පද්ධතියට, BC දිගේ : $\longrightarrow$

$$0 = MF + m(F - f_1) + m(F - f_1\cos\alpha) + \frac{m}{2}(F + f_2\sin\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \quad 15 \quad \boxed{55}$$

$\dfrac{(1)+(2)}{m}$:

$$g\sin\alpha = 2f_1 - F(1+\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{g\sin\alpha + F(1+\cos\alpha)}{2} \quad 5$$

(3) න්,

$$f_2 = g\cos\alpha - F\sin\alpha \quad 5$$

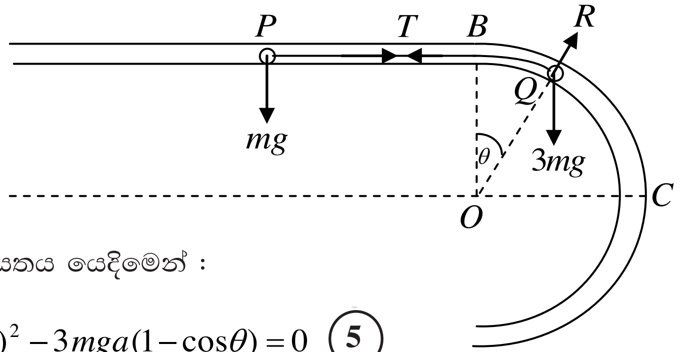
$$(4) \;\Rightarrow 0 = F\left\{M + \frac{5m}{2}\right\} - m f_1(1+\cos\alpha) + \frac{m}{2} f_2 \sin\alpha$$

$$0 = \frac{F}{2}(2M+5m) - \frac{m}{2}(1+\cos\alpha)\{g\sin\alpha + F(1+\cos\alpha)\} + \frac{m}{2}\sin\alpha(g\cos\alpha - F\sin\alpha) \quad 10$$

$$mg\sin\alpha = F\left\{2M + 5m - m(1+\cos\alpha)^2 - m\sin^2\alpha\right\}$$

$$= F\{2M + 3m - 2m\cos\alpha\} \quad 5$$

$$\Rightarrow \qquad F = \frac{mg\sin\alpha}{2m + 3m - 2mcoos\alpha} \qquad \boxed{25}$$



5

(b) චා. ශ. + වි. ශ. = නියතය යෙදීමෙන් :

$$\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 + \frac{3m}{2}(a\dot{\theta})^2 - 3mga(1-\cos\theta) = 0 \quad 5$$

10   10

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}(1-\cos\theta) \quad 5 \qquad \boxed{35}$$

θ විෂයයෙන් අවකලනයෙන් $\quad 2\dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dfrac{3g}{2a}\sin\theta$ 5

$$\Rightarrow \quad a\ddot{\theta} = \frac{3g}{4}\sin\theta$$

$\therefore$ P අංශුවේ ත්වරණය $= a\ddot{\theta} = \dfrac{3g}{4}\sin\theta \longrightarrow$ 5

$\boxed{10}$

P හා Q අංශු සඳහා නිව්ටන් දෙවැනි නියමය යෙදීමෙන් :

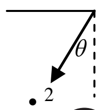
PB දිගේ P අංශුවට $\longrightarrow$

$$T = ma\ddot{\theta} \quad 5$$

$$\Rightarrow T = m\frac{3g}{4}\sin\theta. \quad 5$$

= තන්තුවේ ආතතිය

QO දිගේ Q අංශුවට



$$3mg\cos\theta - R = 3ma\dot{\theta}^2 \quad 5$$

$$R = 3mg\cos\theta - 3ma\frac{3g}{2a}(1-\cos\theta) \quad 5$$

$$= 3mg\cos\theta - \frac{9mg}{2} + \frac{9mg}{2}\cos\theta$$

$$= \frac{3mg}{2}(5\cos\theta - 3) \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

13 වන ප්‍රශ්නය

13. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $2mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරක් අචල A ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇත. A හි මට්ටමට ඉහළින් සවිකරන ලද B කුඩා සුමට නාදැත්තක් උඩින් තන්තුව යන අතර, තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් සම්බන්ධ කර ඇත. AB දුර a වන අතර, BA යටි අත් සිරස සමග සාදන කෝණය $\frac{\pi}{3}$ වේ. ආරම්භයේ දී P අංශුව B නාදැත්තට යන්තමින් පහළින් තබා සිරස් ව පහළට $u=\sqrt{\frac{5ga}{8}}$ වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. කාලය t වන විට තන්තුවේ විතතිය x යැයි ගනිමු. P අංශුවෙහි සරල අනුවර්තී චලිතය සඳහා සමීකරණය $\ddot{X}+\omega^2 X=0$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $X=x-\frac{a}{2}$ හා $\omega^2=\frac{2g}{a}$ වේ. මෙම චලිත සමීකරණය සඳහා, $\dot{X}^2=\omega^2\left(A^2-X^2\right)$ ආකාරයේ විසඳුමක් උපකල්පනය කරමින්, සරල අනුවර්තී චලිතයේ විස්තාරය $A=\frac{3a}{4}$ බව පෙන්වා, අංශුව ළඟා වන පහත් ම පිහිටීම වූ E ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

සරල අනුවර්තී චලිතයේ C කේන්ද්‍රය පසු කර අංශුව යන විට එහි වේගය $\frac{3u}{\sqrt{5}}$ බව පෙන්වන්න.

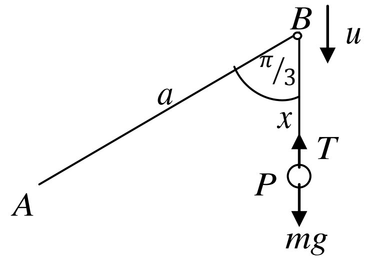
අනුරූප වෘත්ත චලිතය සැලකීමෙන්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, P අංශුව පහළට චලනය වීමේ දී C පසු කර යෑමට ගන්නා කාලය $\sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත්, P අංශුව එහි පහත් ම පිහිටීම වූ E වෙත ළඟා වීමට ගන්නා කාලයත්, නාදැත්ත මත තන්තුවෙන් ඇති කරනු ලබන බලයේ උපරිම විශාලත්වයත් සොයන්න.

P අංශුවට $F=ma$ යොදමු.

$\downarrow \quad mg-T=m\ddot{x}$ 5

$T=2mg\left(\frac{x}{a}\right)$, $\because$ ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $=2mg$ 5



T ඉවත් කිරීමෙන් හා m වලින් බෙදීමෙන්

$g=\ddot{x}+\frac{2g}{a}x$ 5 හෝ $\ddot{x}+\frac{2g}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)=0$ 5

$\ddot{X}+\omega^2 X=0$, මෙහි $X=x-\frac{a}{2}$ හා $\omega^2=\frac{2g}{a}$ වේ. 5

25

සරල අනුවර්තී චලිතයේ (SHM) C කේන්ද්‍රය : $X=0 \Rightarrow x=\frac{a}{2}=BC$ 5

SHM සමීකරණයේ උපකල්පිත විසඳුම, $\dot{X}^2=\omega^2\left(A^2-X^2\right)$,

මෙහි A යනු චලිතයේ විස්තාරය වේ.

ආරම්භයේදී $x=0$ වන විට $X=-\frac{a}{2}$ 5 හා $\dot{x}=\dot{X}=\sqrt{\frac{5ga}{8}}=u$ වේ. 5

දී ඇති ආකාරයේ විසඳුමට ආදේශයෙන්

A ධන නිසා, $\dfrac{5ga}{8} = \dfrac{2g}{a}\left[A^2 - \left(-\dfrac{a}{2}\right)^2\right]$ 5

$$\frac{5a^2}{16} + \frac{a^2}{4} = A^2 = \frac{9a^2}{16}$$

$$, \ A = \frac{3a}{4}.$$ 5

එනම්, විස්තරය $= \dfrac{3a}{4}$ 5

තන්තුවේ උපරිම විතතිය $\Rightarrow \dot{X} = 0 \Rightarrow X = A$ එනම් $x - \dfrac{a}{2} = \dfrac{3a}{4} \Rightarrow x = \dfrac{5a}{4}.$ 5

35

$\dot{X}^2 = \omega^2\left(A^2 - X^2\right)$, මෙහි $A = \dfrac{3a}{4}$

කේන්ද්‍රය $(X = 0)$ පසුකර යනවිට අංශුවේ වේගය V,

$$V^2 = \omega^2 A^2 = \frac{2g}{a}\cdot\frac{9a^2}{16} \Rightarrow V = 3\sqrt{\frac{ga}{8}}$$ 5 5

තවද, $u^2 = \dfrac{5ga}{8}.$

$$\therefore \left(\frac{V}{u}\right)^2 = \frac{9ga}{8}\cdot\frac{8}{5ga}$$ 5

$$\Rightarrow \quad V = \frac{3u}{\sqrt{5}}.$$ 5

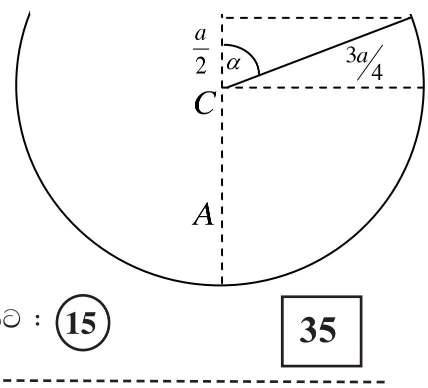
20

α යනු, $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ වූ සුළු කෝණය ලෙස ගනිමු. 5

C කේන්ද්‍රය පසුකර යෑමට අංශුව ගත කරන කාලය t_0,

$\omega t_0 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow t_0 = \dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ මගින් දෙනු ලැබේ.

5 5



එනම් $t_0 = \sqrt{\dfrac{a}{2g}}\left\{\dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)\right\}$ 5

රූප සටහනට : 15

35

පහත්ම පිහිටීමට ළඟා වීමට අංශුව ගන්නා කාලය t_1,

$\omega t_1 = \pi - \alpha \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\omega}(\pi - \alpha)$ මඟින් දෙනු ලැබේ.

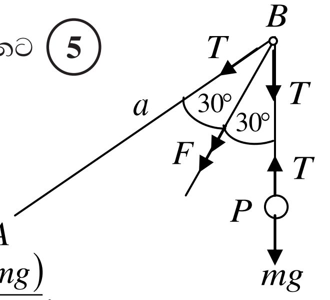
5 5

එනම් $t_1 = \sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ 5

15

උපරිම විතතිය $= \frac{a}{2} + A = \frac{5a}{4}$.

රූප සටහනට 5



උපරිම ආතතිය, $T_{\max} = (2mg)\left(\frac{5a/4}{a}\right) = \frac{5mg}{2}$ 5

5

නාදැත්ත මත බලයෙහි උපරිම විශාලත්වය $= 2T_{\max}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = T_{\max}\sqrt{3} = \sqrt{3}\,\frac{(5mg)}{2}$.

5

20

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

$X = x - \frac{a}{2} = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ..(i) මෙහි $\omega^2 = \frac{2g}{a}$, ආකාරයේ විසඳුමක් උපකල්පනය කරමු.

අවකලනයෙන් $\dot{X} = \dot{x} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$, ………………..……..(ii)

ආරම්භයේදී ($t = 0$ වන විට), $x = 0 \Rightarrow \dot{x} = u = \sqrt{\frac{5ga}{8}}$ වේ.

$\Rightarrow -\frac{a}{2} = \alpha$ හා $u = \beta\omega$, එනම් $\beta = \frac{u}{\omega}$

විසඳුම : $x = \frac{a}{2}(1 - \cos\omega t) + \frac{u}{\omega}\sin\omega t$,

$\Rightarrow \dot{x} = \frac{a\omega}{2}\sin\omega t + u\cos\omega t.$

30

සරල අනුවර්තීය චලිතයෙහි කේන්ද්‍රය $X=0$; එනම් $x=\dfrac{a}{2}$. 5

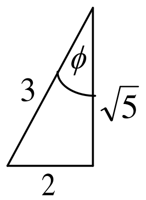
අංශුව C කේන්ද්‍රය පසු කර යන කාලය t_0

$0=-\dfrac{a}{2}\cos\omega t_0+\dfrac{u}{\omega}\sin\omega t_0$ මඟින් දෙනු ලැබේ. 5

එනම් $\tan\omega t_0=\dfrac{a\omega}{2u}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, 5 $\left[\because \left(\dfrac{a\omega}{2u}\right)^2=\dfrac{2ga}{5ga/2}\right.$ 5 $\left.\right]$

සුළු කෝණය $\phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ ලෙස ගනිමු. 5

එවිට $t_0=\sqrt{\dfrac{a}{2g}}\left\{\dfrac{\pi}{2}-\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)\right\}$ **25**



අංශුව C පසු කර යන විට V වේගය :

$$V=\frac{a\omega}{2}\sin\omega t_0+u\cos\omega t_0=u[\tan\omega t_0.\sin\omega t_0+\cos\omega t_0]$$

5 5

$=u\sec\omega t_0=\dfrac{3u}{\sqrt{5}}$ 5 **15**

B නාදැත්ත සිට පහතම E පිහිටීම දක්වා ගත වන කාලය

t_1 = B සිට C දක්වා කාලය + C සිට E දක්වා කාලය 5

$t_1=t_0+\dfrac{1}{\omega}.\dfrac{\pi}{2}$ 5

$t_1=\sqrt{\dfrac{a}{2g}}\left\{\pi-\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)\right\}$ 5 **15**

$t=t_1$ වන විට ලැබෙන උපරිම විතතිය x_1 :

$$x_1=\frac{a}{2}(1-\cos\omega t_1)+\frac{u}{\omega}\sin\omega t_1=\frac{a}{2}\left(1+\frac{2}{3}\right)+\frac{a\sqrt{5}}{4}.\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{5a}{4}.$$

5 5 5

සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි විස්තාරය $=\dfrac{5a}{4}-\dfrac{a}{2}=\dfrac{3a}{4}$ 5 **20**

---

14 වන ප්‍රශ්නය

14. xy-තලයේ O මූලය අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික, සුපුරුදු අංකනයෙන්, පිළිවෙළින් $\mathbf{i}+\mathbf{j}, 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ හා $4\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ වේ. $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ වන පරිදි BC මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. $ABCD$ ත්‍රපීසියමක D ශීර්ෂය ගනු ලබන්නේ BC පාදය AD ට සමාන්තර වන පරිදි ද PD, AC ට ලම්බ වන පරිදි ද වේ. D හි පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{11}{3}\mathbf{i}-\frac{1}{3}\mathbf{j}$ බව පෙන්වන්න.

දුර මීටරවලින් ද බලය නිව්ටනවලින් ද මනින ලද, xy-තලයෙහි බල හතරකින් සමන්විත වන පද්ධතියක් පහත දැක්වෙන පරිදි දී ඇත.

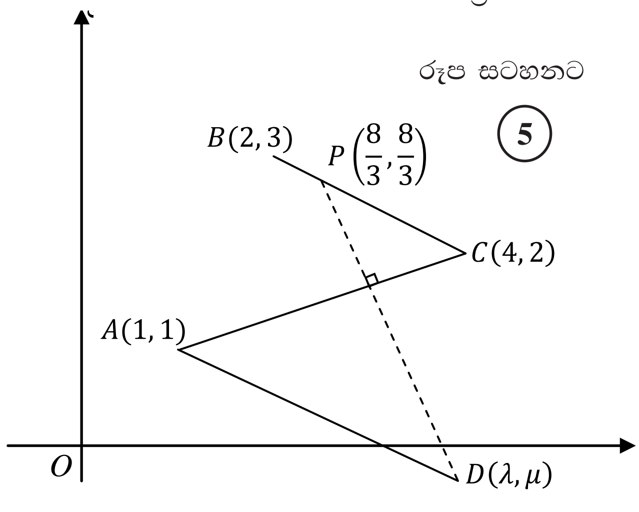
ක්‍රියා ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක	බලයේ Ox, Oy දිශාවලට සංරචක
$B(2,3)$	$\mathbf{F}_1=(2,4)$
$C(4,2)$	$\mathbf{F}_2=(3,1)$
$L(0,1)$	$\mathbf{F}_3=(6,12)$
$M(0,6)$	$\mathbf{F}_4=(9,3)$

(i) $\mathbf{F}_1$ හා $\mathbf{F}_2$ බල දෙකෙහි O මූලය හා $A(1,1)$ ලක්ෂ්‍යය වටා ඝූර්ණ ශුන්‍ය වන බව පෙන්වා, **ඒනයින්** $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ හා $\mathbf{F}_4$ බල හතරෙන් සමන්විත පද්ධතියෙහි O මූලය වටා G ඝූර්ණය දක්ෂිණාවර්ත අතට 60 N m විශාලත්වයෙන් යුතු වන බව පෙන්වන්න.

(ii) පද්ධතියෙහි $\mathbf{R}$ සම්ප්‍රයුක්තයේ (X, Y) සංරචක සොයන්න. **ඒනයින්**, $\mathbf{R}$ හි ක්‍රියා රේඛාවට y-අක්ෂය හමු වන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

(iii) බල පද්ධතිය $(0,-4)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි ක්‍රියා කරන තනි බලයකින් හා ඝූර්ණය G_1 වූ යුග්මයකින් ප්‍රතිස්ථාපනය කරනු ලැබේ. G_1 හි අගය සොයා, තනි බලයේ ක්‍රියා රේඛාව $D\left(\frac{11}{3},-\frac{1}{3}\right)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන බව පෙන්වන්න.

$AD//BC$ හා $PD\perp AC$ සහිතව $ABCD$ ත්‍රිපීසියමකි.



$\overrightarrow{OA}=\underline{i}+\underline{j}$

$\overrightarrow{OB}=2\underline{i}+3\underline{j}$

$\overrightarrow{OC}=4\underline{i}+2\underline{j}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$ 5

$=-(2\underline{i}+3\underline{j})+4\underline{i}+2\underline{j}$

$=2\underline{i}-\underline{j}$ 5

$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(2\underline{i}-\underline{j}\right)$ 5 එම නිසා $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=\frac{8}{3}\left(\underline{i}+\underline{j}\right)$ 5

$\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}\Rightarrow\frac{\lambda-1}{2}=\frac{\mu-1}{-1}\Rightarrow\lambda-1=2(1-\mu)$ 5

$\lambda+2\mu=3$............ (1) 5

$\overrightarrow{PD}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{PD}.\overrightarrow{AC}=0,$ 5 $\overrightarrow{AC}=3\underline{i}+\underline{j}$ 5

5

$\Rightarrow \left\{\left(\frac{8}{3}-\lambda\right)\underline{i}+\left(\frac{8}{3}-\mu\right)\underline{j}\right\}.\left(3\underline{i}+\underline{j}\right)=0 \qquad 8-3\lambda+\frac{8}{3}-\mu=0$ 5

$9\lambda+3\mu=32$………….. (2) 5

(1) න් $\Longrightarrow 9\lambda+18\mu=27$

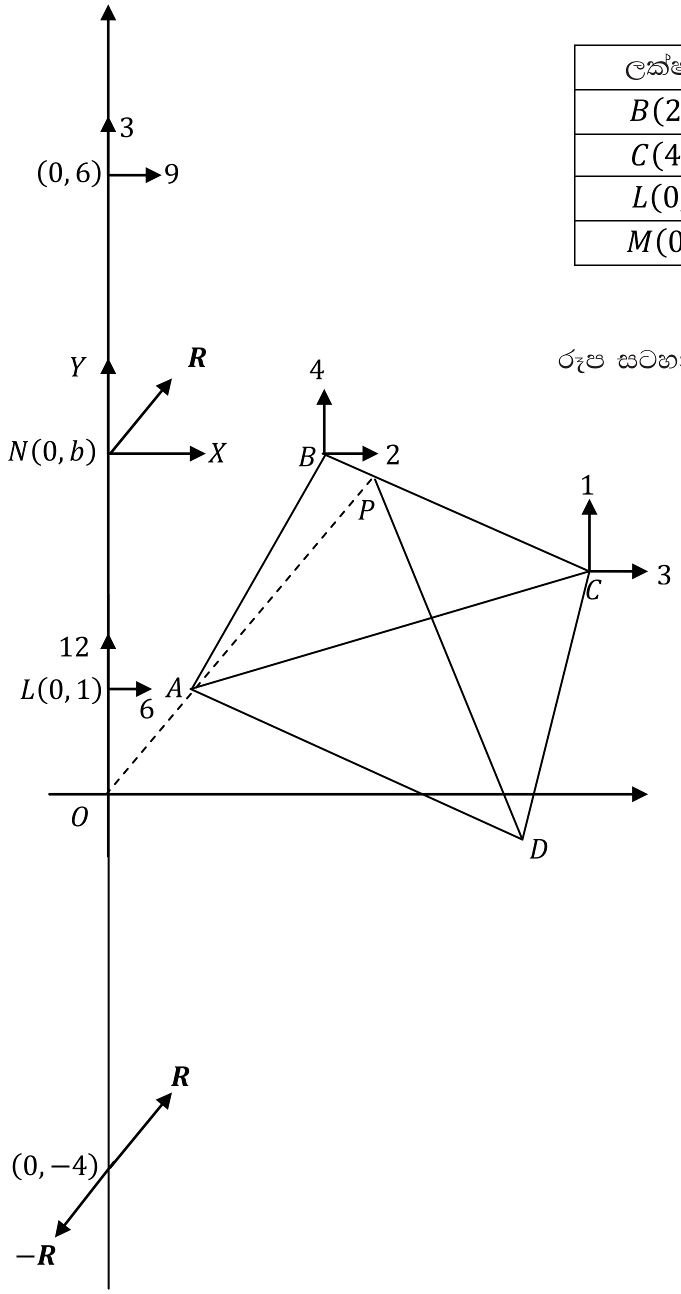
$15\mu=-5 \Rightarrow \mu=-\frac{1}{3}$ 5 හා $\lambda=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$ 5

එනයින් $\overrightarrow{OD}=\frac{11}{3}\underline{i}-\frac{1}{3}\underline{j}.$

<u>බල පද්ධතිය</u>

ලක්ෂ්‍යය	බලය
$B(2,3)$	$\boldsymbol{F}_1=(2,4)$
$C(4,2)$	$\boldsymbol{F}_2=(3,1)$
$L(0,1)$	$\boldsymbol{F}_3=(6,12)$
$M(0,6)$	$\boldsymbol{F}_4=(9,3)$

රූප සටහනට



I O වටා F_1 හා F_2 හි ඝූර්ණය $\circlearrowleft = 2.4 - 3.2 + 4.1 - 2.3 = 0$ 5

A වටා F_1 හා F_2 හි ඝූර්ණය $\circlearrowleft = 1.4 - 2.2 + 3.1 - 1.3 = 0$ 5

F_1, F_2, F_3 හා F_4 හි O වටා ඝූර්ණය $=$ F_3 හා F_4 හි O වටා ඝූර්ණය 5

$= 6.1 + 9.6 = 60 \curvearrowright Nm$

5

30

II පද්ධතිය විභේදනයෙන්

$\longrightarrow X = 2 + 3 + 6 + 9 = 20$ 5

$\uparrow Y = 4 + 1 + 12 + 3 = 20$ 5

(X, Y) සම්ප්‍රයුක්ත බලයෙහි ක්‍රියා රේඛාව හා $y-$ අක්ෂය ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය $N(0, b)$ යැයි ගනිමු. 5

එවිට, O මූලය වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$O \curvearrowright \quad b.X = 60 \implies b = \frac{60}{X} = \frac{60}{20} = 3$ 5

5

$\therefore N$ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(0, 3)$ වේ.

25

III $(0, -4)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි $-\boldsymbol{R}$ හා $\mathbf{R}$ බල ඇතුළත් කරන්න. 5

එවිට පද්ධතිය, $(0, -4)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි $\boldsymbol{R}$ බලයක් සමඟ

ඝූර්ණය වූ $G = X.(3 + 4) = 140\ Nm \circlearrowleft$ යුග්මයකට තුල්‍ය වේ. 5

$(0, -4)$ හි තනි $\underline{\boldsymbol{R}}$ බලයේ ක්‍රියා රේඛාව $y = x - 4$ වේ. 5

$\frac{-1}{3} = \frac{11}{3} - 4$ බැවින් $D\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ හි ඛණ්ඩාංක මෙම සමීකරණය සපුරාලයි. 5

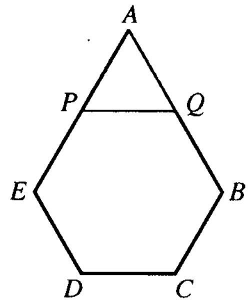
$\Rightarrow$ තනි බලයේ ක්‍රියා රේඛාව මත D පිහිටයි. 5

25

---

15 වන ප්‍රශ්නය

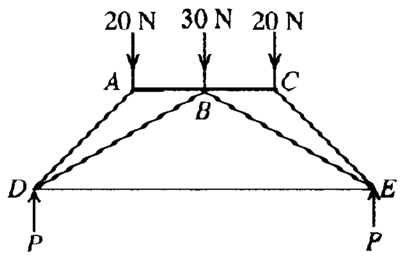
15. (*a*) AB, BC, CD, DE හා EA ඒකාකාර බර දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවලින් සුමට ලෙස සන්ධි කර රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $ABCDE$ පංචාස්‍රයක හැඩයේ රාමු සැකිල්ලක් සාදා ඇත. BC, CD හා DE දඬු එක එකක දිග l හා බර W වේ. AB හා EA දඬු එක එකක දිග $2l$ හා බර $2W$ වේ. දිග l වූ සැහැල්ලු PQ දණ්ඩක P හා Q දෙකෙළවර පිළිවෙළින් AE හා AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යවලට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. A සන්ධියෙන් නිදහස් ලෙස එල්ලා ඇති රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව පිහිටයි.



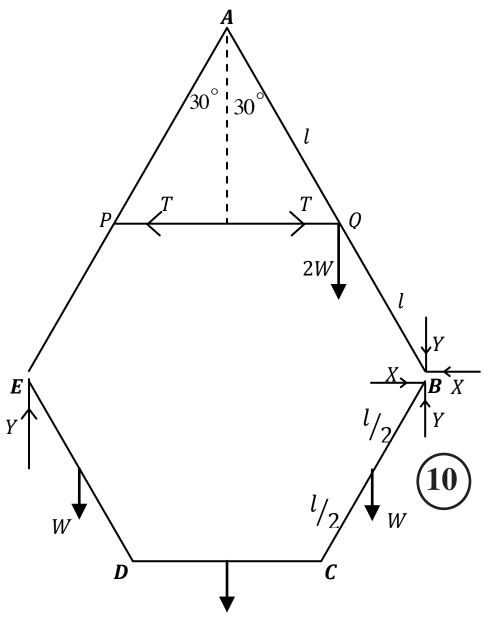
B සන්ධියෙහි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් හා සිරස් සංරචක වන (X, Y) ද PQ සැහැල්ලු දණ්ඩේ තෙරපුම වන T ද නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න. **එනයින්**, B සන්ධියේ දී AB දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයා, $T = \frac{7W}{\sqrt{3}}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) දෘඪ සැහැල්ලු දඬු හතක් ඒවායේ කෙළවරවලින් නිදහස් ලෙස සන්ධි කර සාදා ගත් **සමමිතික** රාමු සැකිල්ලක් රූපයේ දැක්වේ. AB, BC හා DE දඬු තිරස් වේ. $A\hat{D}E = C\hat{E}D = 45^\circ$ සහ $B\hat{D}E = B\hat{E}D = 30^\circ$ වේ. රාමු සැකිල්ලට A, B හා C සන්ධිවල දී රූපයේ දැක්වෙන භාර යොදා ඇති අතර, D හා E සන්ධිවල දී සමාන P සිරස් බලවලින් ආධාර කර ඇත. P හි අගය සොයන්න.

බෝ අංකනය යෙදීමෙන්, A හා D සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න. **එනයින්**, AD, AB, DE හා DB දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල සොයා, ඒවා ආතති හෝ තෙරපුම් වශයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.



(a)



BC, CD, DE දඬු සඳහා

සිරස් විභේදනයෙන්,

$$\uparrow 2Y = 3W \Rightarrow Y = \frac{3W}{2} \quad 10$$

CB සඳහා, C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$C \curvearrowleft \quad -X.l\frac{\sqrt{3}}{2} + Y.\frac{l}{2} = W\frac{l}{4} \quad 10$$

$$X\sqrt{3} = \frac{3}{2}W - \frac{1}{2}W = W \quad 5$$

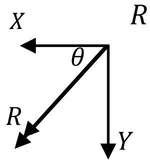
AB දණ්ඩ සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$T.l\frac{\sqrt{3}}{2} = Xl\sqrt{3} + Y.l + 2W.\frac{l}{2} \quad 15$$

$$T\frac{\sqrt{3}}{2} = W + \frac{3}{2}W + W = \frac{7}{2}W \quad 5$$

$$T = \frac{7W}{\sqrt{3}} \quad 5$$

60



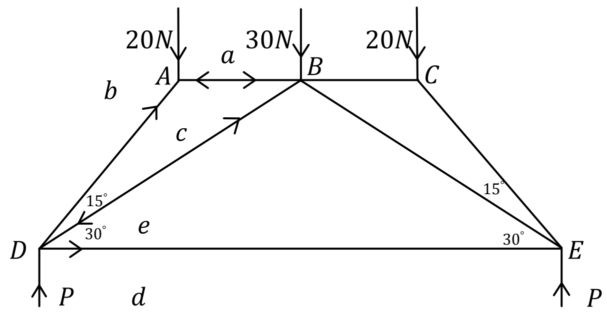
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = W\sqrt{\left(\frac{1}{3} + \frac{9}{4}\right)} = W\sqrt{\frac{31}{12}} \quad 5$$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{3W/2}{W/\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad 5$$

B හි ප්‍රතික්‍රියාව, තිරස සමග $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ කෝණයක් සාදයි. 5

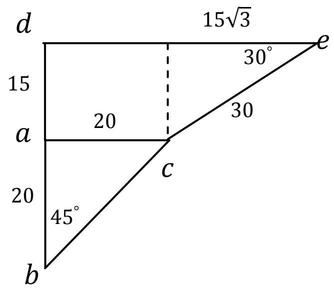
15

(b) රූප සටහන



$2P = 70$

$P = 35\ N$ 5



ප්‍රත්‍යා බල සටහනට

25

$bc = 20\sqrt{2}\ N$ 5 : AD හි තෙරපුම 5

$ca = 20\ N$ 5 : AB හි තෙරපුම 5

$de = 20 + 15\sqrt{3}\ N$ 10 : DE හි ආතතිය 5

$ec = 30\ N$ 5 : DB හි තෙරපුම 5

75

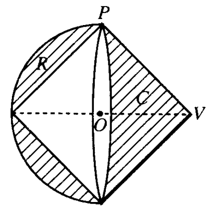
---

16 වන ප්‍රශ්නය

16. ආධාරකයේ අරය a හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන කේතුවක හා අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රවල පිහිටුම්, **අනුකලනය** භාවිතයෙන් සොයන්න.

ස්කන්ධය M, අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයකින්, ආධාරකයේ අරය a හා උස a වූ C නම් සෘජු වෘත්ත කේතුව ඉවත් කිරීමෙන් ලැබෙන ඝන වස්තුව R යැයි ගනිමු. M ඇසුරෙන් R ඝන වස්තුවේ ස්කන්ධය, හා ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.

ඊළඟට රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට S සංයුක්ත වස්තුවක් සෑදෙන පරිදි C ඝන කේතුව R ඝන වස්තුවට සම්බන්ධ කරනු ලැබේ. මෙහි දී C හි ආධාරකයේ වෘත්තාකාර දාරය R හි ගැටියට දෘඪ ලෙස සම්බන්ධ කරනු ලබන්නේ ගැටියේ O කේන්ද්‍රය C හි ආධාරකයේ කේන්ද්‍රය සමග සම්පාත වන පරිදි ය.



S සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G, එහි සමමිතික අක්ෂය මත, ආධාරකවල පොදු කේන්ද්‍රය වන O සිට $\dfrac{a}{8}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(a) S සංයුක්ත වස්තුව, දාරයේ P ලක්ෂ්‍යයකින් නිදහස් ලෙස එල්ලනු ලැබේ.

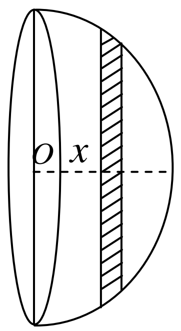
(i) සමමිතික අක්ෂය වන OV හි තිරසට ආනතිය සොයන්න; මෙහි V යනු C හි ශීර්ෂයයි.

(ii) සමමිතික අක්ෂය තිරස් ලෙස තබා ගැනීම සඳහා V ශීර්ෂයට ඇඳිය යුතු අංශුවේ m ස්කන්ධය, M ඇසුරෙන් සොයන්න.

(b) V හි දී සම්බන්ධ කරන ලද m ස්කන්ධය ද සහිත S සංයුක්ත වස්තුව, එල්ලන ලද ලක්ෂ්‍යයෙන් ඉවත් කර, එහි අර්ධගෝලීය පෘෂ්ඨය අවල සුමට තිරස් තලයක ඇතිව සමතුලිතව තබනු ලැබේ. OV අක්ෂය හා උඩු අත් සිරස අතර කෝණයේ අගය පරාසය සොයන්න.

අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලය

ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, සමමිතික අක්ෂය මත O කේන්ද්‍රයේ සිට $\bar{x}_1$ දුරකින් පිහිටයි.



$$\left(\frac{2}{3}\pi a^3\rho\right)\bar{x}_1 = \int_0^a x.\rho\pi\left(a^2-x^2\right)dx \quad 5$$

5

$$= \rho\pi\left[-\frac{\left(a^2-x^2\right)^2}{4}\right]_0^a \quad 5$$

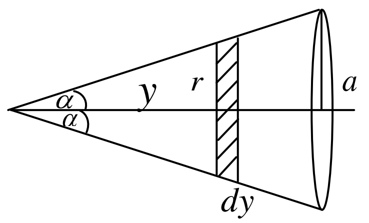
$$= \frac{\rho\pi a^4}{4} \quad 5$$

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{8}a \quad 5$$

$\boxed{25}$

ආධාරක අරය a හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන කේතුව

ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, සමමිතික අක්ෂය මත V ශීර්ෂයේ සිට y_1 දුරකින් පිහිටයි. මෙහි



$$\left(\frac{1}{3}\pi a^2\rho h\right)\bar{y}_1 = \int_0^h y.\rho\pi\left(\frac{ay}{h}\right)^2 dy \qquad \left(\tan\alpha = \frac{a}{h},\ r = y\tan\alpha\right)$$

5 5 5

$$= \frac{\rho\pi a^2}{h^2}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^h \quad 5$$

$$\Rightarrow \bar{y}_1 = \frac{3h}{4}. \quad 5$$

ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $= \dfrac{1}{4}h$

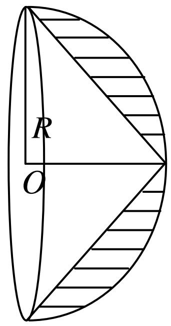
$\boxed{25}$

ඉතිරි වූ ඝන වස්තුව R

R ඝනයේ ස්කන්ධය $= \frac{2}{3}\pi a^3 \rho - \frac{1}{3}\pi a^2 . a\rho$ 5

$= M - \frac{M}{2} = \frac{M}{2}$ 5

O සිට R හි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\bar{x}$



5 5

$$\bar{x} = \frac{M\frac{3}{8}a - \frac{M}{2}\frac{a}{4}}{M/2} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)a = \frac{a}{2}$$ 5

25

$OG \equiv \bar{\bar{x}}$ යැයි ගනිමු. මෙහි G යනු S සංයුක්ත වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය වේ.

$$M\bar{\bar{x}} = \frac{M}{2}\left(\frac{a}{2}\right) - \frac{M}{2}\left(\frac{a}{4}\right) \Rightarrow \bar{\bar{x}} = \frac{a}{8}$$ 5

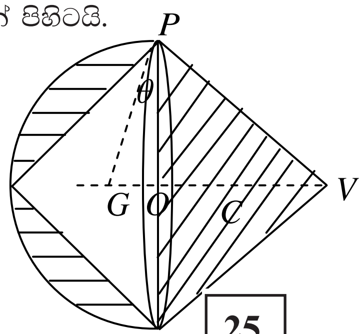
5 15

25

---

a) i) P ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලූ විට, G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය P ට සිරස්ව පහළින් පිහිටයි.
PO හා සිරස අතර θ කෝණය

$\tan\theta = \frac{a/8}{a} = \frac{1}{8}$ මගින් දෙනු ලැබේ. 10



ii) OV තිරස්ව තැබීම සඳහා (P ට සිරස්ව පහළින් O පිහිටීමට)

10

$\overset{\frown}{O}$ $mg.\, a = Mg\left(\frac{a}{8}\right) \Rightarrow m = \frac{M}{8}$ 5

25

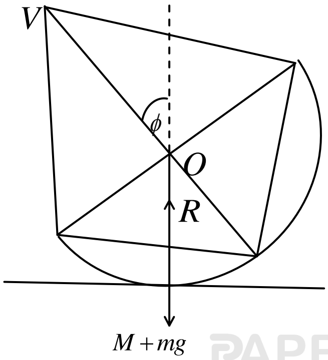
---

10 10

b) $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ තුළ සියලු ϕ සඳහා

$R = (M+m)g$ වේ.

එහි OV අක්ෂය, සිරසට ඕනෑම සුළු කෝණයක් ආනතව නිශ්චලව තිබේ.



රූප සටහනට 5

25

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) මිනිසෙක්, යතුරු පැදිය, පා පැදිය හෝ පයින් යන ගමන් ක්‍රම තුනෙන් එකක් පමණක් යොදා ගනිමින්, නිශ්චිත මාර්ගයක් දිගේ අනතුරු සහිත ගමනක් යයි.

මිනිසා මෙම ගමනාගමන ක්‍රම යොදා ගැනීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙළින් $p, 2p$ හා $3p$ වේ නම්, p හි අගය සොයන්න.

ඔහු මෙම ගමනාගමන ක්‍රම යොදා ගැනීමේ දී අනතුරක් සිදු වීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙළින් $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ සහ $\frac{1}{20}$ වේ නම්, තනි ගමනක දී අනතුරක් සිදු වීමේ සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න.

ගමන අතරතුරේ දී මිනිසාට අනතුරක් සිදු වී ඇති බව දන්නේ නම්, මිනිසා ගමන් කරමින් සිටියේ,

(i) යතුරු පැදියෙන්, (ii) පා පැදියෙන්, (iii) පයින්

වීමේ සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න.

වඩාත් ආරක්ෂිත වූයේ කුමන ගමනාගමන ක්‍රමය ද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

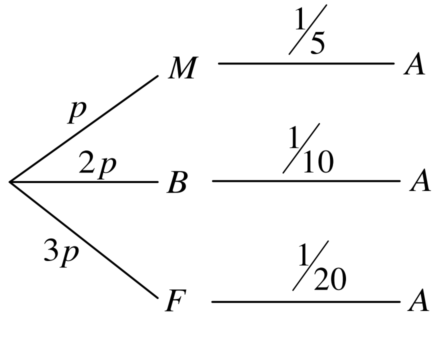
(*b*) කාර්මික විද්‍යාල සිසුන් 100 ක කණ්ඩායමක් මහා මාර්ගයක එක්තරා කොටසක් මනින ලද අතර, ඔවුන්ගේ මිනුම් පහත සඳහන් සංඛ්‍යාත වගුවේ දක්වා ඇත.

දිග (මීටර) x	99.8	99.9	100.0	100.1	100.2	100.3	100.4
සංඛ්‍යාතය f	5	7	12	33	25	15	3

උපකල්පිත මධ්‍යන්‍යය $\bar{x}_a = 100.1$ හා $d = 0.1$ සඳහා, $y = \dfrac{x - \bar{x}_a}{d}$ පරිණාමනය භාවිතයෙන්, අනුරූප y හා y^2 අගයන් ඇතුළත් කෙරෙන පරිදි ඉහත වගුව විස්තීරණය කරන්න. y හි මධ්‍යන්‍යය සොයා, **ඒනයින්** x හි මධ්‍යන්‍යය 100.123 බව පෙන්වන්න.

$\sqrt{1.917} \approx 1.385$ බව ගනිමින්, සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ සම්මත අපගමනය, ආසන්න වශයෙන් දශමස්ථාන තුනකට නිවැරදි ව, ගණනය කරන්න.

(a) M = යතුරු පැදියෙන් ගමන යෑම
B = පා පැදියෙන් ගමන යෑම
F = පා ගමනින් යෑම
A = අනතුරක් වීම



M, B හා F සිද්ධි අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර හා නිරවශේෂ බැවින්,

$P(M)+P(B)+P(F)=1$ 5

$\Rightarrow p+2p+3p=1$ එනම් $p=\frac{1}{6}$ 5

10

දැන්,

$$P(A) = P(M \cap A) + P(B \cap A) + P(F \cap A) \quad 5$$
$$= P(A \mid M) \cdot P(M) + P(A \mid B).P(B) + P(A \mid F).P(F) \quad 5$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{20} \quad 15$$
$$= \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} = \frac{4+4+3}{120} = \frac{11}{120}. \quad 5$$

$\boxed{30}$

(i) $P(M \mid A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{1/30}{11/120} = \frac{4}{11}$ 5

5

(ii) $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/30}{11/120} = \frac{4}{11}$ 5

(iii) $P(F \mid A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{1/40}{11/120} = \frac{3}{11}$ 5

අනතුරක් සිදුවීමේ අඩුතම සම්භාවිතාව, මිනිසා පා ගමනින් යන විටදී ය. ඒ අනික් සම්භාවිතා ඊට වඩා වැඩි බැවිනි. 5

∴ ආරක්ෂිතම ගමනාගමන ක්‍රමය පා ගමනයි. 5

$\boxed{30}$

---

b) x = මහා මාර්ග කොටසේ දිග, මීටරවලින්,

x	99.8	99.9	100.0	100.1	100.2	100.3	100.4
සංඛ්‍යාතය f	5	5	7	33	25	15	3

පරිණාමනය :

$$y = \frac{x - \bar{x}_a}{d} = \frac{x - 100.1}{0.1} \quad 5$$

විස්තෘත වගුව :

y	-3	-2	-1	0	1	2	3
y^2	9	4	1	0	1	4	9

10

5

$$\sum fy = -15-14-12+0+25+30+9=-41+64=23 \quad 5$$

y හි මධ්‍යන්‍යය :

$$\bar{y} = \frac{1}{100}\sum fy = 0.23 \quad 5$$

$$x = \bar{x}_a + dy \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}_a + d\bar{y} \quad 5$$

$\therefore$ x හි මධ්‍යන්‍යය : $\bar{x} = 100.1 + (0.1)0.23 = 100.123$

5

40

---

y හි විචලතාව,

$$S_y^{\ 2} = \frac{1}{100}\sum fy^2 - \bar{y}^2 \quad 5$$ හා

$$\sum fy^2 = 45+28+12+0+25+60+27=85+85+27=197 \quad 5$$

$$\frac{1}{100}\sum fy^2 = 1.97, \quad 5 \qquad \bar{y}^2 = (0.23)^2 = 0.0529 \quad 5$$

$\therefore$ y හි විචලතාව $= 1.97 - 0.0529 = 1.917$ 5

ඒකජ සම්බන්ධය : $x = dy + \bar{x}_a$

$$Var(X) = d^2 Var(Y), \ \ d = 0.1$$

$$S_x^{\ 2} = d^2 S_y^{\ 2} \quad 5$$

$$\therefore Var(X) = (0.1)^2 1.917$$

$Var(X)$ හි වර්ග මූල ගැනීමෙන්

x හි සම්මත අපගමනය = $S_x = (0.1)\sqrt{1.917}$ 5

$S_x = 0.1385$; $\quad (\because \sqrt{1.917} \approx 1.385)$

x හි සම්මත අපගමනය $\ 0.1385m \approx 0.139m.$ 5

40
