NEW/OLD

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2020

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

නව/පැරණි නිර්දේශය

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

මෙය උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි.
ප්‍රධාන/ සහකාර පරීක්ෂක රැස්වීමේ දී ඉදිරිපත්වන අදහස් අනුව මෙහි වෙනස්කම් කරනු ලැබේ.

අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතුව ඇත.

අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2020

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

(නව/පැරණි නිර්දේශ)

ලකුණු බෙදීයාම

I පත්‍රය

A කොටස :	10 × 25 =	250
B කොටස :	05 × 150 =	750

එකතුව = 1000 / 10

I පත්‍රය අවසාන ලකුණ = 100

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.
2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න. ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.
3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.
4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමඟ □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i) ....
....
.... √ $\triangle \frac{4}{5}$

(ii) ....
....
.... √ $\triangle \frac{3}{5}$

(iii) ....
....
.... √ $\triangle \frac{3}{5}$

03 (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර √ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

මෙවර සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රය සඳහා බහුවරණ පිළිතුරු පත්‍රයක් පමණක් ඇති විට ලකුණු ලැයිස්තුවට ලකුණු ඇතුළත් කිරීමෙන් පසු අකුරෙන් ලියන්න. අනෙකුත් උත්තරපත්‍ර සඳහා විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කරන්න. 51 චිත්‍ර විෂයයේ I, II හා III පත්‍රවලට අදාළ ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවල ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලිවිය යුතු වේ.

***

නව නිර්දේශය

(**b**) $x^2 h = 4500.$

ඒ නයින්, $S = 2x^2 + 3xh$

$$= 2x^2 + 3x \cdot \frac{4500}{x^2} \quad ; \quad x > 0 \text{ සඳහා}$$

5

$$\therefore \quad \frac{dS}{dx} = 4x - 3 \times 4500 \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4(x^3 - 3375)}{x^2}.$$

5

$\frac{dS}{dx} = 0$ 10 $\Leftrightarrow x = 15.$ 5

$0 < x < 15$ සඳහා, $\frac{ds}{dr} < 0$ හා $x > 15$ සඳහා $\frac{ds}{dr} > 0.$ 5

$\therefore$ $x = 15$ වන විට S අවම වේ. 5

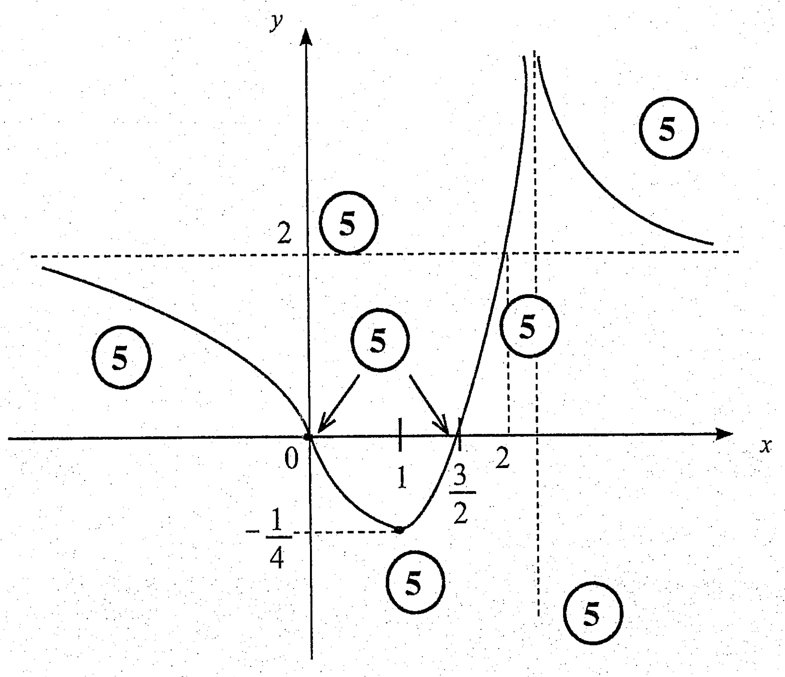
$\boxed{35}$

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය : $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ ස්ථානීය අවමයකි.

5 $\boxed{05}$

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \quad \therefore\ y = 2$ 5

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $x = 3.$ 5



$\boxed{45}$

$$\frac{1}{1+f(x)} \leq \frac{1}{3}.$$

$1 + f(x) > 0$ වේ.

$\therefore 3 \leq 1 + f(x).$

$\therefore f(x) \geq 2.$ 5

$f(x) = 2 \Leftrightarrow x(2x-3) = 2(x-3)^2.$ 5

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x = 2(x^2 - 6x + 9)$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$ 5

x හි අවශ්‍ය අගයන් $2 \leq x < 3$ හෝ $x > 3.$ 5 $\boxed{20}$

---

14. (*a*) $x \neq 3$ සඳහා $f(x)=\dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x)=\dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

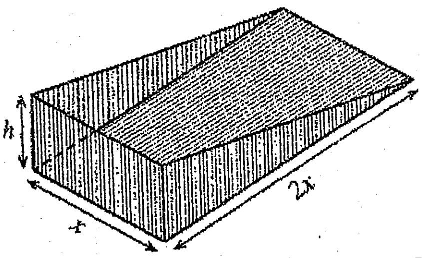
ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා $x-$අන්තඃඛණ්ඩ දක්වමින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $\dfrac{1}{1+f(x)} \leq \dfrac{1}{3}$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මිට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව x^2h cm^3 යන්න 4500 cm^3 බව දී ඇත.
එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. S අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.



(*a*) $x \neq 3$; සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

එවිට, $f'(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}\left[2x-3+2x\right] - \dfrac{2x\,(2x-3)}{(x-3)^3}$ **20**

$= \dfrac{(x-3)\,(4x-3) - 2x\,(2x-3)}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{4x^2 - 15x + 9 - 4x^2 + 6x}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}.$ **5**

25

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ **5**

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(−)	(+)	(−)
$f(x)$	↘ අඩුවේ.	↗ වැඩිවේ.	↘ අඩුවේ.

5 **5** **5**

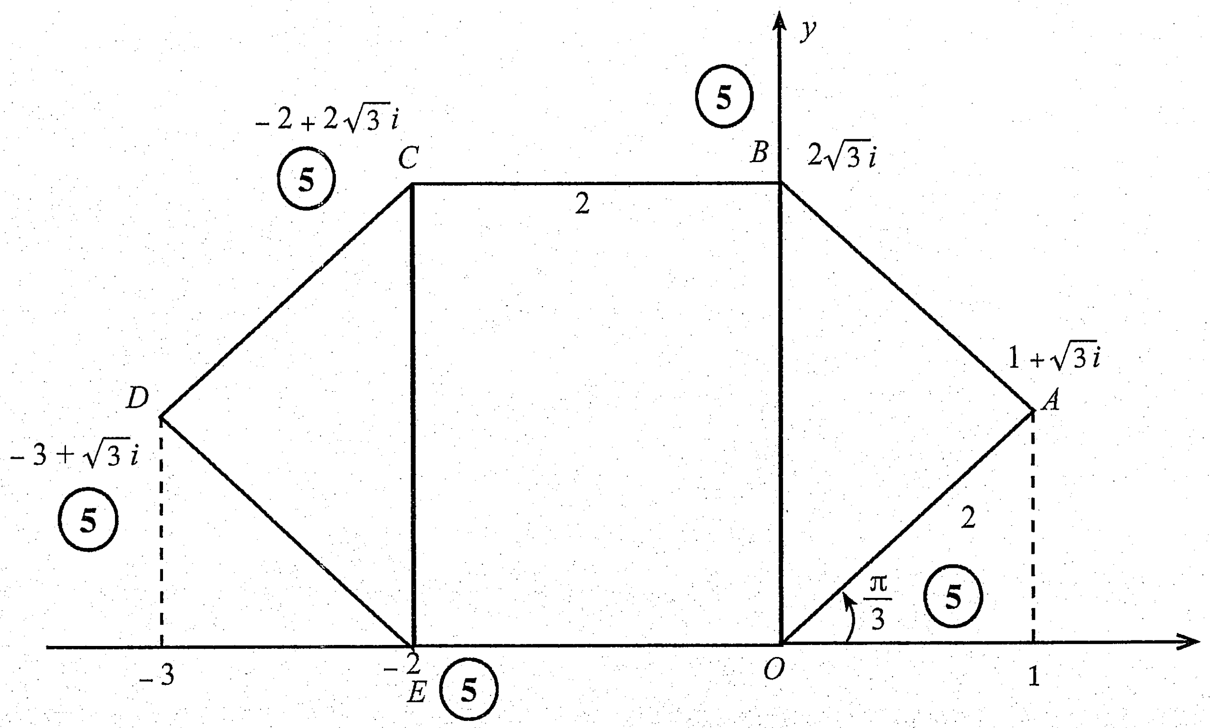
20

$\therefore f(x)$ යන්න $[1, 3)$ මත වැඩි වන අතර $(-\infty, 1]$ හා $(3, \infty)$ මත අඩුවේ.

(c) $1 + \sqrt{3}\, i \;= 2\left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$ 5

$= 2\left\{ \cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3} \right\}$. 5

10



25

$$|z-w|^2 = (z-w)\,(\overline{z-w}) \quad 5$$

$$= (z-w)\;(\bar{z}-\bar{w}) \quad 5$$

$$= z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}$$

$$= |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2 \quad 5$$

$$= |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2 \longrightarrow (1)$$

$\boxed{15}$

$$|1-\bar{z}w|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2 \longrightarrow (2) \quad 5$$

(1) – (2) මගින්;

$$|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 1 - |z\bar{w}|^2$$

$$= -\,(1 - |w|^2 - |z|^2 + |z|^2\,|w|^2) \quad 5$$

$$= -\,(1-|z|^2)\,(1-|w|^2) \quad 5 \longrightarrow (3)$$

$\boxed{20}$

$|w| = 1$, බැවින් (3) න් $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = 0$ ලැබේ. 5

$\therefore\ |z-w| = |1-z\bar{w}|$.

ඒ නයින්, $\dfrac{|z-w|}{|1-z\bar{w}|} = 1$. $\left[\begin{array}{l}\because z \neq w \\ \Rightarrow z\bar{w} \neq 1\end{array}\right]$

$$\therefore\ \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1 \quad 5$$

$\boxed{10}$

$a = 1$, වන විට $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. 5

$\therefore \ C^{-1} = \dfrac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. 5

10

$CPC \ = 2I + C$

$\Leftrightarrow PC \ = 2C^{-1} + C^{-1}C$ 5

$\Leftrightarrow PC \ = 2C^{-1} + I$

$\Leftrightarrow P \ = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1}$ 5

$\therefore \ P \ = \ 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \ 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$= \ \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \ \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ 5

20

(b) $z \ = \ x + iy$ යැයි ගනිමු.

$z\overline{z} \ = (x+iy)(x-iy)$ 5

$= \ x^2 - i^2y^2$

$= \ x^2 + y^2$

$= \ |z|^2$

$\therefore \ |z|^2 = \ z\overline{z}$. 5

10

13.(a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}-\mathbf{I}=\mathbf{C}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

$\mathbf{C}^{-1}$ පවතින්නේ $a \neq 0$ **ම නම් පමණක්** බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a=1$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{CPC}=2\mathbf{I}+\mathbf{C}$ වන පරිදි $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(b) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2=z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z-w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2=|z|^2-2\mathrm{Re}\, z\bar{w}+|w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1-z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2-|1-z\bar{w}|^2=-\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$|w|=1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|=1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(c) $1+\sqrt{3}\,i$ යන්න $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r>0$ හා $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ වේ.

ආගන්ඩ් සටහනක, O ලක්ෂ්‍යයෙන් මූලය ද A ලක්ෂ්‍යයෙන් $1+\sqrt{3}\,i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද නිරූපණය කරයි. $OABCDE$ යනු O හා A අනුයාත ශීර්ෂ ලෙස ඇතිව ශීර්ෂවල අනුපිළිවෙළ වාමාවර්ත අතට ගෙන ඇති සවිධි ෂඩස්‍රය යැයි ගනිමු. B, C, D හා E ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(a) $A^TB = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times2}$ 5

$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ 5

$\therefore A^TB - \mathrm{I} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$ 5

20

C^{-1} පවතී $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ 5

$\Leftrightarrow 2a-a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ 5

10

---

7. $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$ සඳහා $x = 2t - \cos 2t$ හා $y = 1 - \sin 2t$ මගින් පරාමිතිකව C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}$ යන්න t ඇසුරෙන් සොයන්න.
C වක්‍රයට එය මත $t = \frac{\pi}{12}$ ට අනුරූප ලක්ෂයයේ දී ඇඳි අභිලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය $6\sqrt{3}\,x - 6y - \sqrt{3}\,\pi + 12 = 0$ බව පෙන්වන්න.

$x = 2t - \cos 2t, \quad y = 1 - \sin 2t$

$\frac{dx}{dt} = 2 + 2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = -2\cos 2t.$ 5

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos 2t}{2 + 2\sin 2t} = -\frac{\cos 2t}{1 + \sin 2t}$ 5

$t = \frac{\pi}{12}$ මගින් $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ හා $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ලැබේ. 5

අවශ්‍ය අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{1 + \sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$

$= \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$ 5

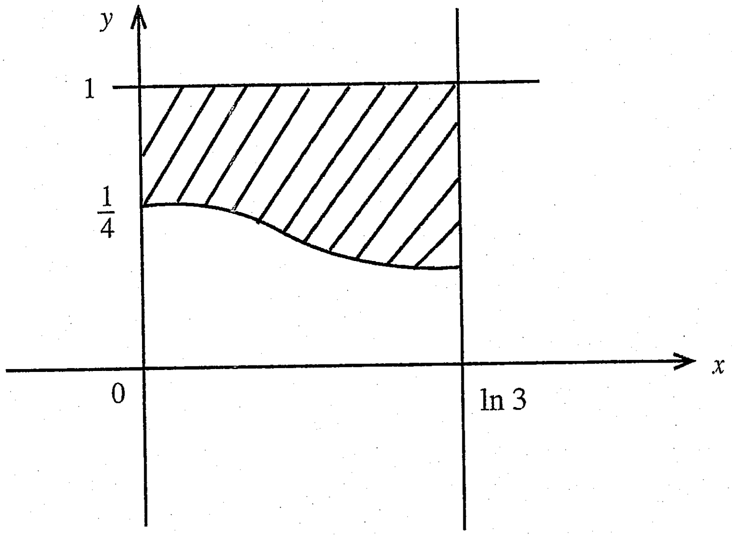
අවශ්‍ය සමීකරණය :

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

එනම්, $6\sqrt{3}\,x - 6y - \sqrt{3}\,\pi + 12 = 0.$ 5

25

6. $y = \dfrac{e^{2x}}{(1+e^{x})^2}$, $x = 0$, $x = \ln 3$ හා $y = 1$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$ බව පෙන්වන්න.



5

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \displaystyle\int_0^{\ln 3}\left\{1 - \frac{e^{2x}}{(1+e^{x})^2}\right\} dx$

$u = 1 + e^{x}$.

$= \ln 3 - \displaystyle\int_2^{4} \frac{u-1}{u^2}\, du$ 5

$= \ln 3 - \displaystyle\int_2^{4}\left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right\} du$ 5

$= \ln 3 - \left\{\ln|u| + \dfrac{1}{u}\right\}\Bigg|_2^4$ 5

$= \ln 3 - \left\{\ln 4 - \ln 2 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right\}$

$= \ln 3 - \left\{\ln 2 - \dfrac{1}{4}\right\}$

$= \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{4}.$ 5

25

පැරණි නිර්දේශය

විකල්ප ක්‍රමයක් :

$\tan(\alpha+\beta) = \tan\frac{\pi}{4}$ 5

$\therefore \quad \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = 1$ 5

$\therefore \; \cos^2 x + \sin x = 1 - \cos^2 x \; \sin x$ 5

$1 - \sin^2 x + \sin x = 1 - (1-\sin^2 x) \; \sin x$

$\sin x\,(1-\sin x)\,(2+\sin x) = 0$ 5

$\Rightarrow \sin x = 1$ හෝ $\sin x = 0$ 5 $(\because \sin x \neq -2)$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}\,;\, n \in \mathbb{Z}$ 5 හෝ $x = m\pi\,;\, m \in \mathbb{Z}$. 5

35

(a)(ii) මගින්, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20°}{\sqrt{3}\ \sin 20°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ලැබේ. 5

$\therefore\ \alpha = 30°$. 5 $(20° < \alpha < 90°)$

10

(c) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$.

$\alpha = \tan^{-1}(\cos^2 x)$ හා $\beta = \tan^{-1}(\sin x)$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha = \dfrac{\pi}{4} - \beta$.

$\therefore\ \tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right)$ 5

$= \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan\beta}{1 + \tan\dfrac{\pi}{4}\ \tan\beta}$. 5

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$. 5

$\cos^2 x\ (1 + \sin x) = (1 - \sin x)$

$(1 - \sin^2 x)(1 + \sin x) = (1 - \sin x)$ 5

$(1 - \sin x)(1 + \sin x)^2 = 1 - \sin x$

$\Rightarrow \sin x = 1$ හෝ $1 + \sin x = \pm 1$

$\Rightarrow \sin x = 1$ හෝ $\sin x = 0$ 5 $(\because \sin x \neq -2)$

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ 5 හෝ $m \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x = m\pi$ 5

35

(*b*) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, 5 + 5

මෙහි $BC = a, CA = b$ හා $AB = c$. $\boxed{10}$

සයින් නීතිය භාවිතයෙන් :

ABD ත්‍රිකෝණය සඳහා ; $\dfrac{AB}{\sin \alpha} = \dfrac{AD}{\sin 80°}$. 10

ADC ත්‍රිකෝණය සඳහා ; $\dfrac{DC}{\sin(\alpha - 20°)} = \dfrac{AD}{\sin 20°}$. 10

$\therefore \dfrac{\sin(\alpha - 20°)}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin 20°}{\sin 80°}$.

$\therefore \sin 80° \sin(\alpha - 20°) = \sin 20° \sin \alpha$. 5

$\boxed{25}$

$\sin 80° = \sin(90° - 10°) = \cos 10°$ 5 5

දැන්, $\sin 80° \sin(\alpha - 20°) = \sin 20° \sin \alpha$ මගින්,

$\cos 10° \sin(\alpha - 20°) = 2 \sin 10° \cos 10° \sin \alpha$ දෙනු ලැබේ. 5 5

$\therefore \sin\alpha \cos 20° - \cos\alpha \sin 20° = 2 \sin 10° \sin \alpha$. 5

$\therefore \tan \alpha (\cos 20° - 2 \sin 10°) = \sin 20°$ 5 හා ඒ නයින්, $\tan \alpha = \dfrac{\sin 20°}{\cos 20° - 2 \sin 10°}$. 5

$\boxed{35}$

---

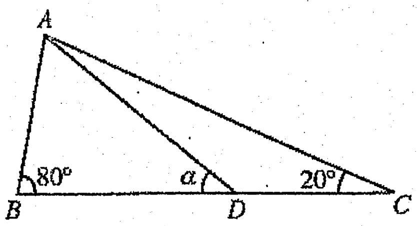
17. (a) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

(i) $\sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$, හා

(ii) $2\sin 10^\circ = \cos 20^\circ - \sqrt{3}\,\sin 20^\circ$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

(b) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.



රූපයේ දක්වා ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = 80^\circ$ හා $A\hat{C}B = 20^\circ$ වේ. D ලක්ෂ්‍යය BC මත පිහිටා ඇත්තේ $AB = DC$ වන පරිදි ය. $A\hat{D}B = \alpha$ යැයි ගනිමු.

සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා **සයින් නීතිය** භාවිතයෙන්, $\sin 80^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 20^\circ \sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$ වන්නේ ඇයිදැයි පැහැදිලි කර, **ඒ නයින්**, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ}$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත (a)(ii) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $\alpha = 30^\circ$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(c) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

(a) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A \sin B.$ (10)

10

(i) $\sin(90^\circ - \theta) = \sin 90^\circ \cos\theta - \cos 90^\circ \sin\theta$ (5)

$= \cos\theta.$ (5) $\quad (\because \sin 90^\circ = 1$ හා $\cos 90^\circ = 0.)$

10

(ii) $2\sin 10^\circ = 2\sin(30^\circ - 20^\circ)$ (5)

$= 2\sin 30^\circ \cos 20^\circ - 2\cos 30^\circ \sin 20^\circ$ (5)

$= \cos 20^\circ - \sqrt{3}\,\sin 20^\circ.$ (5) $\quad (\because \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ හා $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2})$

15

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = 2(-3)(-2) + 2(-3)\left(-\frac{5}{2}\right) = 27. \quad 5$$

5 5

$$c_1 + c_2 = \frac{31}{2} + 9 = \frac{49}{2}. \quad 5$$

$$\therefore \; 2g_1g_2 + 2f_1f_2 \neq c_1 + c_2. \quad 5$$

$\therefore$ C_1 හා C_2 ප්‍රලම්බ ඡේදනය නොවේ. 5

30

$l_1 : \ y-2 = 3(x-1)$ හා $l_2 : y-2 = -\frac{1}{3}(x-1)$.

$l_1 : \ 3x - y - 1 = 0$ හා $l_2 : \ x + 3y - 7 = 0$.

5　　5

40

$l : \ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = t$ (යැයි ගනිමු). 5

එවිට, $x = 1 + 2t$, $y = 2 + t$, මෙහි $t \in \mathbb{R}$. 5

10

C_1 සඳහා

$P \equiv (1 + 2t, 2 + t)$ සිට l_1 ට ලම්බ දුර C_1 හි අරයට සමාන වේ.

එනම්, $\frac{|3(1+2t) - (2+t) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$ 10 $= \frac{\sqrt{10}}{2}$. 5

එනම්, $|3 + 6t - 2 - t - 1| = 5$. 5

$|5t| = 5.$

$t = \pm 1$ 5

$P \equiv (3, 3) = B$, බැවින් $P \equiv (-1, 1)$ සුදුසු නොවේ.

5　　5

$C_1 : (x-3)^2 + (y-3)^2 = \frac{5}{2}$. 5

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 18 = \frac{5}{2}$

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ 5

45

C_2 හි සමීකරණය

$(x-1)(x-3) + (y-2)(y-3) = 0.$ 15

කේන්ද්‍රය 5, අරය 5, සමීකරණය 5

15

---

16. $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv (3, 3)$ යැයි ගනිමු.

A හා B ලක්ෂ්‍ය හරහා යන l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

එක එකක් l සමග $\frac{\pi}{4}$ ක සුළු කෝණයක් සාදමින් A හරහා යන l_1 හා l_2 සරල රේඛා

l මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(1 + 2t, 2 + t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙ

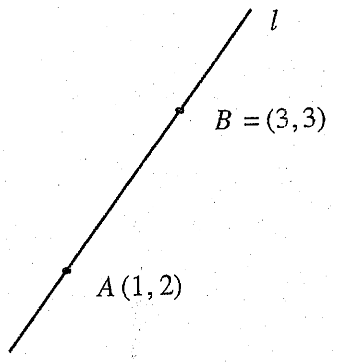
l_1 හා l_2 යන දෙකම ස්පර්ශ කරන හා කේන්ද්‍රය l මත වූ මූළුමනින්ම පළමුවන

අරය $\frac{\sqrt{10}}{2}$ වන, C_1 වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ බව ද පෙන්

විෂ්කම්භයක අන්ත A හා B වූ C_2 වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

C_1 හා C_2 වෘත්ත ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

(16)

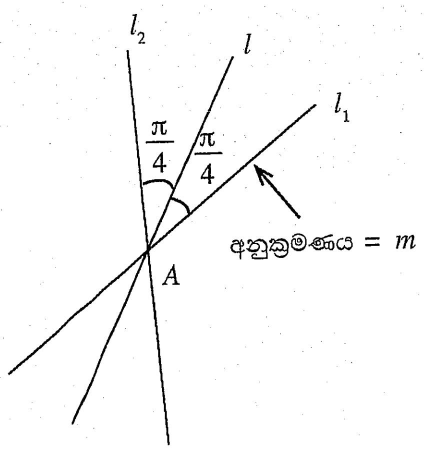


අනුක්‍රමණය $= \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$. 5

l හි සමීකරණය : $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$. 5

මෙය $x - 2y + 3 = 0$ වේ.

$\boxed{10}$



$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right| \quad 10$$

$$\therefore \quad 1 = \left|\frac{2m - 1}{2 + m}\right|$$

5

$\Leftrightarrow \quad 2 + m = \pm(2m - 1)$ 5

$\Leftrightarrow \quad 2 + m = 2m - 1$ හෝ $2 + m = -2m + 1$

$\Leftrightarrow \quad m = 3$ හෝ $m = -\frac{1}{3}$.

5 5

(c) $$I = \int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \underbrace{\cos^6(\pi - x)}_{\cos^6 x} \underbrace{\sin^3(\pi - x)}_{\sin^3 x} dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos^6 x \sin^3 x \quad 5 \quad 5$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx - \underbrace{\int_0^{\pi} x \cos^6 x \sin^3 x \, dx}_{I} \quad 5$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx . \quad 5$$

20

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^2 x \sin x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin x \, dx - \int_0^{\pi} \cos^8 x \sin x \, dx \right] \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{-\cos^7 x}{7} \Bigg|_0^{\pi} + \frac{\cos^9 x}{9} \Bigg|_0^{\pi} \right] \quad 5 \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{7} - \frac{2}{9} \right] \quad 5$$

$$= \frac{2\pi}{63} .$$

25

(b) $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x (1 - \cos 2\pi x) \ \mathrm{d}x$ 5

$$= \frac{1}{2} e^x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \ \mathrm{d}x}_{I}$$ 5

$$= \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} I. \qquad \text{———} \ (1)$$ 5

දැන්, $\displaystyle I = \int_0^1 e^x \cos 2\pi x \ \mathrm{d}x$

$$= \underbrace{e^x \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\Big|_0^1}_{} - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^x \sin 2\pi x \ \mathrm{d}x$$ 5 5

$$= 0 - \frac{1}{2\pi}\left[\left(-e^x \frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \ \mathrm{d}x}_{I}\right]$$ 5 5

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left[e-1\right] - \frac{1}{4\pi^2} I.$$ 5 5

$$\therefore I\left(1 + \frac{1}{4\pi^2}\right) = \frac{1}{4\pi^2}(e-1).$$

$$\therefore I = \frac{(e-1)}{4\pi^2+1}.$$ 5

$\therefore$ (1) න්, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2}\frac{(e-1)}{(4\pi^2+1)}$ 5 + 5

$$= \frac{(e-1)}{2}\left[\frac{4\pi^2}{4\pi^2+1}\right]$$

$$= \frac{2(e-1)\pi^2}{1+4\pi^2}.$$

60

15. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව දී ඇත.

A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x\,dx$ අගයන්න.

(*c*) a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^6 x \sin^3 x\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{2\pi}{63}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$

$x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

x හි බලවල සංගුණක සැසඳූ විට ;

$x^3 : \ 1 = A.$ 5

$x^0 : \ -16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow B = -3.$

5 5

විකල්ප ක්‍රමයක්:

ආදේශයෙන්

$x = -1 : \ -30 = 10B \Rightarrow B = -3$

$x = 0 : \ -16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow A$

$\boxed{15}$

$$\therefore \frac{x^2+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x^2+9}.$$ 10

$$\int \frac{x^2+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 3\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

$$= \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$ 5

5 5 5

$\boxed{30}$

(*b*) $x^2 h = 4500.$

ඒ නයින්, $S = 2x^2 + 3xh$

$= 2x^2 + 3x \cdot \dfrac{4500}{x^2}$; $x > 0$ සඳහා

5

$\therefore \dfrac{dS}{dx} = 4x - 3 \times 4500 \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{4(x^3 - 3375)}{x^2}.$

5

$\dfrac{dS}{dx} = 0$ 10 $\Leftrightarrow x = 15.$ 5

$0 < x < 15$ සඳහා, $\dfrac{ds}{dr} < 0$ හා $x > 15$ සඳහා $\dfrac{ds}{dr} > 0.$ 5

$\therefore x = 15$ වන විට S අවම වේ. 5

$\boxed{35}$

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය : $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ අවමයක් වේ. 5

05

$x \neq 3$; සඳහා $f''(x) = \dfrac{18x}{(x-3)^4}$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ 5

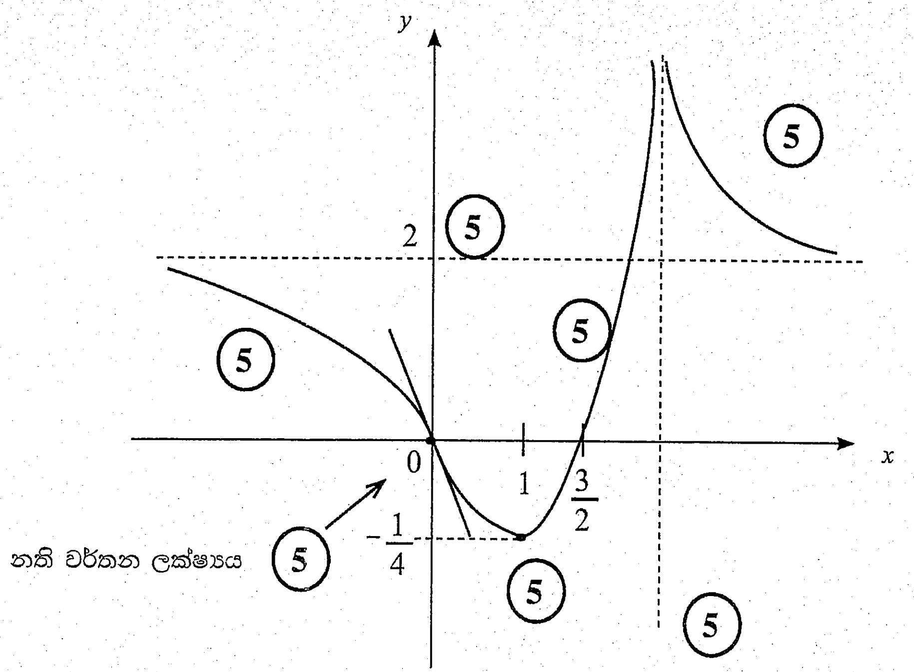
	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$
$f''(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$
අවතලභාවය	පහලට අවතල වේ. 5	ඉහලට අවතල වේ. 5

$\therefore$ නති වර්තන ලක්ෂ්‍යය $= (0, 0)$. 5

20

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \quad \therefore \ y = 2$ 5

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $x = 3$. 5



45

---

14. (*a*) $x \neq 3$ සඳහා $f(x)=\dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x)=\dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

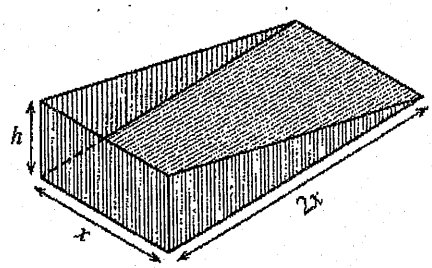
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq 3$ සඳහා $f''(x)=\dfrac{18x}{(x-3)^4}$ බව දී ඇත.

$y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මීට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව x^2h cm^3 යන්න 4500 cm^3 බව දී ඇත. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. S අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.



(*a*) $x \neq 3$; සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

එවිට, $f'(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}\left[2x-3+2x\right] - \dfrac{2x(2x-3)}{(x-3)^3}$ 20

$= \dfrac{(x-3)(4x-3)-2x(2x-3)}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{4x^2-15x+9-4x^2+6x}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$. 5

25

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ 5

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(-)$
$f(x)$ is	↘ අඩුවේ.	↗ වැඩිවේ.	↘ අඩුවේ.

5 5 5

$\therefore f(x)$ යන්න $[1, 3)$ මත වැඩි වන අතර $(-\infty, 1]$ හා $(3, \infty)$ මත අඩුවේ.

20

(c) $1+\sqrt{3}\,i = 2\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ 5

$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right\}$ 5

10

$(1+\sqrt{3}\,i)^m(1-\sqrt{3}\,i)^n = 2^m\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^m 2^n\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$ 5

$= 2^{m+n}\left(\cos\frac{m\pi}{3}+i\sin\frac{m\pi}{3}\right)\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right)$ 5

$= 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3}+i\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right)$ 5

$\therefore 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3}+i\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right) = 2^8$

$\Rightarrow m+n=8$ හා $(m-n)\frac{\pi}{3} = 2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}.$

5 5

25

$$|z-w|^2 = (z-w)\,\overline{(z-w)} \quad 5$$

$$= (z-w)\,(\bar{z}-\bar{w}) \quad 5$$

$$= z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}$$

$$= |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2 \quad 5$$

$$= |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2 \longrightarrow 1$$

$\boxed{15}$

$$|1-\bar{z}w|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2 \longrightarrow 2 \quad 5$$

1 – 2 මගින්;

$$|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 1 - |z\bar{w}|^2 \text{ ලැබේ.} \quad 5$$

$$= -\,(1 - |w|^2 - |z|^2 + |z|^2|w|^2) \quad 5$$

$$= -\,(1-|z|^2)(1-|w|^2) \quad 5 \longrightarrow 3$$

$\boxed{20}$

$|w| = 1$, බැවින් 3 න් $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = 0$ ලැබේ. 5

$\therefore\ |z-w| = |1-z\bar{w}|$.

ඒ නයින්, $\dfrac{|z-w|}{|1-z\bar{w}|} = 1.$ $\left[\begin{array}{l} \because z \neq w \\ \Rightarrow z\bar{w} \neq 1 \end{array}\right]$

$$\therefore \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1 \quad 5$$

$\boxed{10}$

$a = 1$ වන විට $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. 5

$\therefore \; C^{-1} = \dfrac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. 5

10

$CPC = 2I + C$

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + C^{-1}C$ 5

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + I$

$\Leftrightarrow P = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1}$ 5

$\therefore \; P = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ 5

20

(*b*) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු.

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy)$ 5

$= x^2 - i^2y^2$

$= x^2 + y^2$

$= |z|^2$

$\therefore \; |z|^2 = z\bar{z}$. 5

10

---

13. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

$\mathbf{C}^{-1}$ පවතින්නේ $a \neq 0$ **ම නම් පමණක්** බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a = 1$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ වන පරිදි $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(b) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2 = z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z - w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1 - z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$|w| = 1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(c) $1+\sqrt{3}i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ.

$(1+\sqrt{3}i)^m(1-\sqrt{3}i)^n = 2^8$ බව දී ඇත; මෙහි m හා n ධන නිඛිල වේ.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්, m හා n හි අගයන් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.

(a) $A^T B = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ 5

$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ 5

$\therefore A^T B - \mathrm{I} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$ 5

$\boxed{20}$

C^{-1} පවතී $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ 5

$\Leftrightarrow 2a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ 5

$\boxed{10}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \lim_{n\to\infty} U_{n+1} - U_1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r$$

$$= 0 - \frac{1}{6} - 1 \quad (5)$$

$$= -\frac{7}{6}.$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය $-\frac{7}{6}$ වේ. (5)

$\boxed{10}$

$$U_r = V_r - V_{r+1}$$

$$r=1; \quad U_1 = V_1 - \cancel{V_2}$$

$$r=2; \quad U_2 = \cancel{V_2} - \cancel{V_3}$$

5

$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$r=n-1; \quad U_{n-1} = \cancel{V_{n-1}} - \cancel{V_n}$$

$$r=n; \quad U_n = \cancel{V_n} - V_{n+1}$$

5

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 - V_{n+1}$$ 5

$$= 1 - \left(\frac{4}{(n+2)} - \frac{1}{(n+1)}\right)$$ 5

$$= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} .$$ 5

25

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\right\}$$ 5

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{(1+\frac{1}{n})\ (1+\frac{2}{n})}\right\}$$

$$= 1.$$ 5

එමනිසා $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේඪිය අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය 1 වේ. 5

15

$$W_r = U_{r+1} - 2U_r$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{r+1} - 2U_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} U_r - U_1 + U_{n+1} - 2\sum_{r=1}^{n} U_r$$ 5

$$= U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r .$$ 5

10

P	G	FS	MS	ආකාර ගණන
2	4	2	3	10 $^{5}C_{2}\,^{5}C_{4}\,^{3}C_{2}\,^{7}C_{3} = 5250$ 5
2	5	2	2	10 $^{5}C_{2}\,^{5}C_{5}\,^{3}C_{2}\,^{7}C_{2} = 630$ 5

අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 5250 + 630$

$= 5880$ 5

35

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$U_r = \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} \text{ හා } V_r = \frac{A}{(r+1)} - \frac{B}{r}.$$

එබැවින්, $U_r = V_r - V_{r+1}$ මගින් $\dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r} - \dfrac{A}{r+2} + \dfrac{B}{r+1}$ ලැබේ. 5

$$\therefore \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \frac{A}{(r+1)(r+2)} - \frac{B}{r(r+1)} \text{ හා}$$

ඒ නයින්, $3r - 2 = Ar - B(r+2)$ $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

5

r හි බලවල සංගුණක සැසඳීමෙන්:

r^1: $3 = A - B$ $A = 4$ 5

r^0: $-2 = -2B$ $B = 1$ 5

20

---

12. (*a*) පියානෝ වාදකයින් පස්දෙනකු, ගිටාර් වාදකයින් පස්දෙනකු, ගායිකාවන් තුන්දෙනකු හා ගායකයින් හත්දෙනකු අතුරෙන් **හරියටම** පියානෝ වාදකයින් දෙදෙනකු ද **අඩු තරමින්** ගිටාර් වාදකයින් හතරදෙනකු ද ඇතුළත් වන පරිදි සාමාජිකයන් එකොළොස්දෙනකුගෙන් සමන්විත සංගීත කණ්ඩායමක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත. තෝරා ගත හැකි එවැනි වෙනස් සංගීත කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.

මේවා අතුරෙන් හරියටම ගායිකාවන් දෙදෙනකු සිටින සංගීත කණ්ඩායම් ගණන ද සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)}$ හා $V_r = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $A, B \in \mathbb{R}$ වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = V_r - V_{r+1}$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

දැන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{r+1} - 2U_r$ යැයි ගනිමු. $\sum_{r=1}^{n} W_r = U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

12. (*a*) P = පියානෝ වාදකයින් (5), G = ගිටාර් වාදකයින් (5), ගායකයින් (10)

FS – ගායිකාවන් (3)

MS – ගායකයන් (7)

P	G	S	ආකාර ගණන
2	4	5	$^5C_2 \; ^5C_4 \; ^{10}C_5 = 12600$ (10) (5)
2	5	4	$^5C_2 \; ^5C_5 \; ^{10}C_4 = 2100$ (10) (5)

අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 12600 + 2100$

$= 14700$ (5)

35

(b) (x^2-1) යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් වන බැවින්,

$(x-1)$ හා $(x+1)$ යන දෙකම $h(x)$ හි සාධක වේ.

සාධක ප්‍රමේයය අනුව $h(1)=0$ හා $h(-1)=0$ වේ. 5

$h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$

$\therefore h(1) = 1 + a + b + c = 0$ —— 1 හා $h(-1) = -1 + a - b + c = 0$ —— 2 වේ.

5   5

1 − 2 මගින් $2 + 2b = 0$ ලැබේ.

$\therefore \; b = -1.$ 5

20

$h(x) = p(x).(x^2-2x) + 5x + k$ 5

$h(0) = k.$ 5

$\therefore \; k = c.$

$h(2) = 8 + 4a + 2(-1) + c = 10 + k$ 5

$4a + c = 4 + k$

$a = 1$ 5

1 + 2, මගින් $a = -c$ ලැබේ.

$\therefore c = -1.$

එනයින්, $k = -1.$ 5

25

$h(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$= (x+1)x^2 - (x+1)$

$= (x+1)\,(x^2-1)$ 5

$= (x+1)^2\,(x-1).$ 5

10

$(\lambda = -1\;,\; \mu = 1.)$

(ii) $\Delta = p^2 - 4c.$ 5

$= p^2 + 4(q-p)\ (q-2p)$ 5

$= p^2 + 4[q^2 - 3pq + 2p^2]$

$= 9p^2 - 12pq + 4p^2$

$= (3p-2q)^2.$ 5

$\boxed{15}$

$\alpha + \beta = -p.$ 5

$\alpha + \gamma = -\dfrac{q}{2}.$ 5

$\therefore \beta - 2\gamma = -p - \alpha + q + 2\alpha$

$= -p + q + \alpha$

$= 0.$ 5 $(\because \alpha = p - q)$

$\therefore \beta = 2\gamma$

විකල්ප ක්‍රමයක්

$\alpha\beta = c$ 5

$\alpha r = \dfrac{c}{2}$ 5

එබැවින් $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ වන බැවින්,

$\dfrac{\beta}{\gamma} = 2$ 5

$\beta = 2\gamma$

$\boxed{15}$

අවශ්‍ය සමීකරණය $(x-\beta)\ (x-\gamma) = 0$ වේ.

මෙය $x^2 - (\beta+\gamma)\,x + \gamma\beta = 0$ ලබා දෙයි. 10

තවද, $\beta + \gamma = -p - \dfrac{q}{2} - 2\alpha = -p - \dfrac{q}{2} - (2p-2q) = \dfrac{3}{2}\ (q-2p).$ 5

දැන්, $\alpha^2\beta\gamma = \dfrac{c^2}{2}.$

$\therefore\ \beta\gamma = \dfrac{c^2}{2(p-q)^2} = \dfrac{(q-p)^2(q-2p)^2}{2(p-q)^2} = \dfrac{1}{2}\ (q-2p)^2.$ 5

$x^2 - \dfrac{3}{2}\ (q-2p)\,x + \dfrac{1}{2}\ (q-2p)^2 = 0.$ 5

$2x^2 + 3(2p-q)\,x + (2p-q)^2 = 0.$ $\boxed{25}$

---

11. (a) $f(x) = x^2 + px + c$ හා $g(x) = 2x^2 + qx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ හා $c > 0$ වේ. $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ සඳහා α පොදු මූලයක් ඇති බව දී ඇත. $\alpha = p - q$ බව පෙන්වන්න.

p හා q ඇසුරෙන් c සොයා,

(i) $p > 0$ නම් $p < q < 2p$ බව,

(ii) $f(x) = 0$ හි විවේචකය $(3p - 2q)^2$ බව

අපෝහනය කරන්න.

β හා γ යනු පිළිවෙළින් $f(x) = 0$ හි හා $g(x) = 0$ හි අනික් මූල යැයි ගනිමු. $\beta = 2\gamma$ බව පෙන්වන්න.

තව ද β හා γ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $2x^2 + 3(2p - q)x + (2p - q)^2 = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(b) $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ. $x^2 - 1$ යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. $b = -1$ බව පෙන්වන්න.

$h(x)$ යන්න $x^2 - 2x$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $5x + k$ බව ද දී ඇත; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයා $h(x)$ යන්න $(x - \lambda)^2 (x - \mu)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ වේ.

(a) α යනු $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ හි පොදු මූලයක් බැවින්

$\alpha^2 + p\alpha + c = 0$ —— 1 හා 5 $2\alpha^2 + q\alpha + c = 0$ වේ. 5

$\therefore \alpha^2 + (q - p)\alpha = 0$ හා එබැවින් $\alpha[\alpha - (p - q)] = 0$ වේ.

5

ඒනයින්, $\alpha = p - q$. 5 $(\because c > 0 \Rightarrow \alpha \neq 0)$

$\boxed{20}$

---

1 $\Rightarrow c = -\alpha(\alpha + p)$ 5

$= -(p - q)(2p - q)$ 5 (α සඳහා ආදේශයෙන්

$= -(q - p)(q - 2p)$.

$\boxed{10}$

(i) $c > 0, \Rightarrow (q - p)(q - 2p) < 0$. 5

$\therefore$ p හා $2p$ අතර q පිහිටයි.

$p > 0$ නම් $p < 2p$ වන බැවින් $p < q < 2p$ වේ. 5

$\boxed{10}$

---

10. $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු.
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය භාවිතයෙන්, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ බව පෙන්වන්න.
$\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$ බව දී ඇත. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.
ඒ නයින්. $\cos\theta = \frac{24}{25}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ---------------- (1)

$\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යන්න $\cos^2\theta \neq 0$ ලබා දෙයි.

ඒ නයින්, (1) න්, $1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ලැබේ. (5)

$\therefore \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$. (5)

දැන්, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ මගින්

$(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ ලබා දෙයි. (5)

එබැවින් $\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$. (5)

$\therefore 2\sec\theta = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$.

$\therefore \cos\theta = \frac{24}{25}$. (5)

25

9. කේන්ද්‍රය $(-2, 0)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි තිබෙන හා $(-1, \sqrt{3})$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. $A \equiv (1, -1)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.
ඒ නයින්, A සිට S ට ඇඳි ස්පර්ශකයන්හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යවල x–ඛණ්ඩාංක $5x^2 + 8x + 2 = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

$S : (x + 2)^2 + y^2 = r^2$ 5

මෙය $(-1 , \sqrt{3})$ හරහා යයි.

$\therefore \; 1 + 3 = r^2.$

$\therefore \; 4 = r^2.$

ඒ නයින් S හි සමීකරණය $(x + 2)^2 + y^2 = 4.$ 5

එනම් $x^2 + y^2 + 4x = 0.$ ---------------- (1)

$A \equiv (1, -1)$ සිට S ට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යාය $x - y + 2(x + 1) = 0$ වේ. 5

එනම්, $3x - y + 2 = 0.$

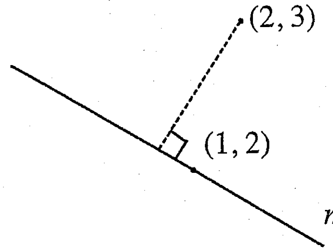
ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය සඳහා $y = 3x + 2$, (1) හි ආදේශ කරමු. 5

එවිට, $x^2 + (3x + 2)^2 + 4x = 0.$

ඒ නයින්, $10x^2 + 12x + 4 + 4x = 0$ හා එබැවින් $5x^2 + 8x + 2 = 0$ වේ. 5

25

8. $m \in \mathbb{R}$ හා l යනු $A \equiv (1,2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අනුක්‍රමණය m වූ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු.
l හි සමීකරණය m ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.
$B \equiv (2,3)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට l රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක $\frac{1}{\sqrt{5}}$ බව දී ඇත.
m හි අගයන් සොයන්න.



l හි සමීකරණය

$y - 2 = m(x - 1)$ වේ. 5

එනම් $y - mx - 2 + m = 0$ වේ.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|3 - 2m - 2 + m|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + m^2 = 5(1 - m)^2 \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + m^2 = 5(1 - 2m + m^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4m^2 - 10m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 - 5m + 2 = 0 \quad 5$$

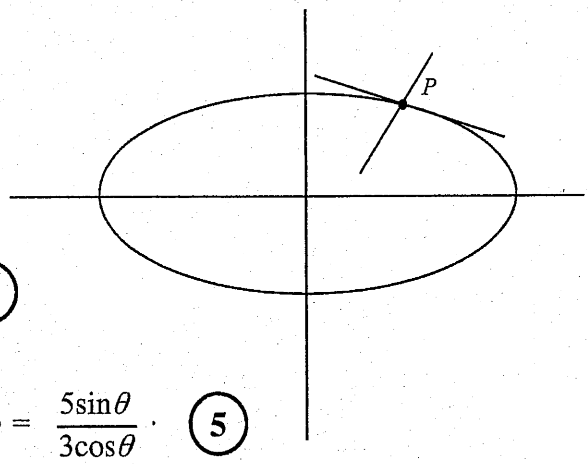
$$\Leftrightarrow \quad (2m - 1)(m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{1}{2} \text{ or } m = 2. \quad 5$$

25

7. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ඉලිප්සයට එය මත $P\equiv(5\cos\theta,\,3\sin\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී වූ අභිලම්බ රේඛාවෙහි සමීකරණය $5\sin\theta\,x-3\cos\theta\,y=16\sin\theta\cos\theta$ බව පෙන්වන්න.
ඉහත ඉලිප්සයට එය මත $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අභිලම්බ රේඛාවේ $y-$අන්තඃඛණ්ඩය සොයන්න.

$x=5\cos\theta,\ y=3\sin\theta$



$\dfrac{dx}{d\theta}=-5\sin\theta,\quad \dfrac{dy}{d\theta}=3\cos\theta.$ 5

$\sin\theta\neq0$ සඳහා $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{3\cos\theta}{-5\sin\theta}$ 5

$\cos\theta\neq0$ සඳහා P හි දී ඇඳි අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $=\dfrac{5\sin\theta}{3\cos\theta}$. 5

අවශ්‍ය සමීකරණය,

$\cos\theta\neq0$ සඳහා $y-3\sin\theta=\dfrac{5\sin\theta}{3\cos\theta}(x-5\cos\theta)$ වේ. 5

$$5\sin\theta x-3\cos\theta y=16\sin\theta\cos\theta.$$

$\cos\theta=0$ වන විට ද මෙම සමීකරණය වලංගු වේ. (P යන්න y – අක්ෂය මත පිහිටන විට)

y – අන්තඃඛණ්ඩය සඳහා : $y=-\dfrac{16}{3}\sin\theta.$

නමුත්, $3\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore\ y=-\dfrac{8}{\sqrt{3}}.$ 5

$\therefore$ අවශ්‍ය y – අන්තඃඛණ්ඩය $\left(0,\ -\dfrac{8}{\sqrt{3}}\right)$ වේ.

25

6. $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x=0$, $x=\ln 3$ හා $y=0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස $x-$අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{\pi}{4}(4\ln 2-1)$ බව පෙන්වන්න.

අවශ්‍ය පරිමාව $= \pi \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\,dx$ 5

$= \pi \displaystyle\int_2^{4} \frac{u-1}{u^2}\,du$; මෙහි $u = 1+e^x$. 5

$= \pi \displaystyle\int_2^{4} \left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right\} du$ 5

$= \pi \left\{\ln|u| + \frac{1}{u}\right\}\Big|_2^4$ 5

$= \pi \left\{\ln 4 - \ln 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right\}$

$= \frac{\pi}{4}\{4\ln 2 - 1\}$ 5

25

5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x} - \sqrt{\pi}\right)} = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{3}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin (x - \frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x} - \sqrt{\pi})}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin (x - \frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x} - \sqrt{\pi})} \times \frac{(\sqrt{3x} + \sqrt{\pi})}{(\sqrt{3x} + \sqrt{\pi})} \quad 5$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin (x - \frac{\pi}{3})}{(3x - \pi)} \cdot (\sqrt{3x} + \sqrt{\pi}) \quad 5$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin (x - \frac{\pi}{3})}{3(x - \frac{\pi}{3})} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} (\sqrt{3x} + \sqrt{\pi})$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot (\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi}) \quad 5 \quad 5$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{\pi} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad 5$$

25

විකල්ප ක්‍රමය :

$$\frac{\sin (x - \frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x} - \sqrt{\pi})}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin (x - \frac{\pi}{3})}{(x - \frac{\pi}{3})} \times \frac{(x - \frac{\pi}{3})}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

$$= \left[\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin (x - \frac{\pi}{3})}{(x - \frac{\pi}{3})}\right] \cdot \left[\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$5 \qquad 5$$

$$= \left[\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u}\right]\left[\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 1 \cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad 5$$

25

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. x හි ආරෝහණ බලවලින් $(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න. ඉහත ප්‍රසාරණයේ අනුයාත පද දෙකක සංගුණක සමාන නම්, n ඔත්තේ වන බව පෙන්වන්න.

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r, \text{ මෙහි } {}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad r = 1, 2, \ldots, n \text{ සඳහා}$$

5 5

හා ${}^nC_0 = 1.$

අනුයාත පද දෙකක් ${}^nC_r$ හා ${}^nC_{r+1}$ ලෙස ගත හැක.

${}^nC_r = {}^nC_{r+1}$; 5 මෙහි $r \in \{0, 1, \ldots n-1\}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \dfrac{n!}{(r+1)!\;(n-r-1)!}$ 5

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n-r} = \dfrac{1}{r+1}$

$\Leftrightarrow n - r = r + 1$

$\Leftrightarrow n = 2r + 1.$ 5

$\therefore n$ ඔත්තේ වේ.

25

<u>වෙනත් ක්‍රමයක් :</u>

අනුයාත පද දෙකක් ${}^nC_{r-1}$ හා ${}^nC_r$ ලෙස ගත හැක.

${}^nC_{r-1} = {}^nC_r$; 5 මෙහි $r \in \{1, 2, 3 \ldots, n\}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{[n-(r-1)]!\,(r-1)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!\;r!}$ 5

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n-(r-1)} = \dfrac{1}{r}$

$\Leftrightarrow n - r + 1 = r$

$\Leftrightarrow n = 2r - 1.$ 5

$\therefore n$ ඔත්තේ වේ.

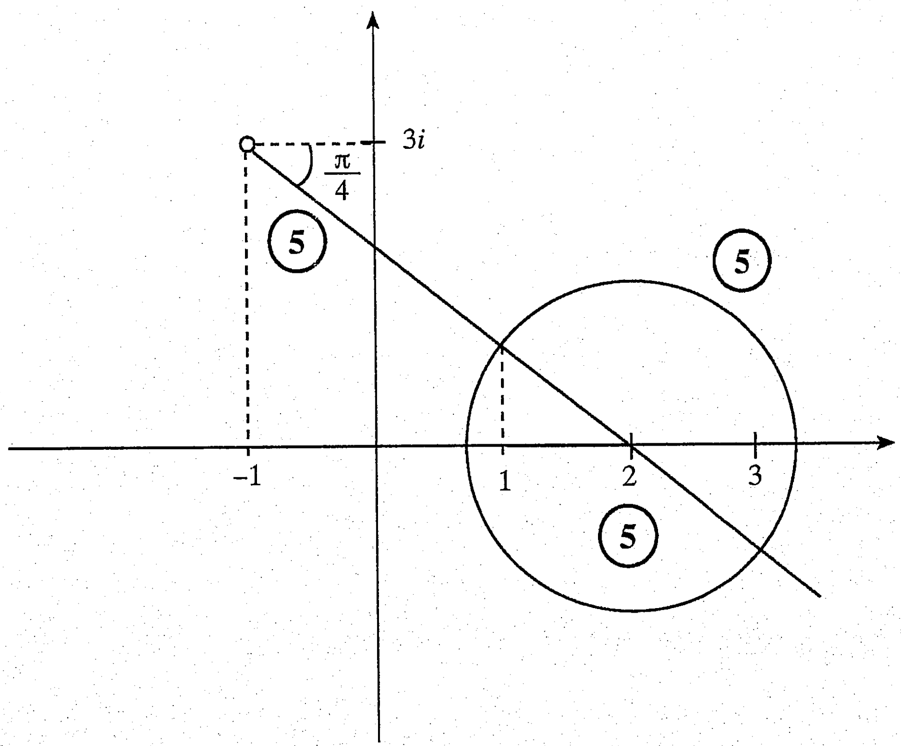
3. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක,

(i) $\mathrm{Arg}(z+1-3i) = -\frac{\pi}{4}$ හා

(ii) $|z-2| = \sqrt{2}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයන්හි දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින්, මෙම පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ලියා දක්වන්න.



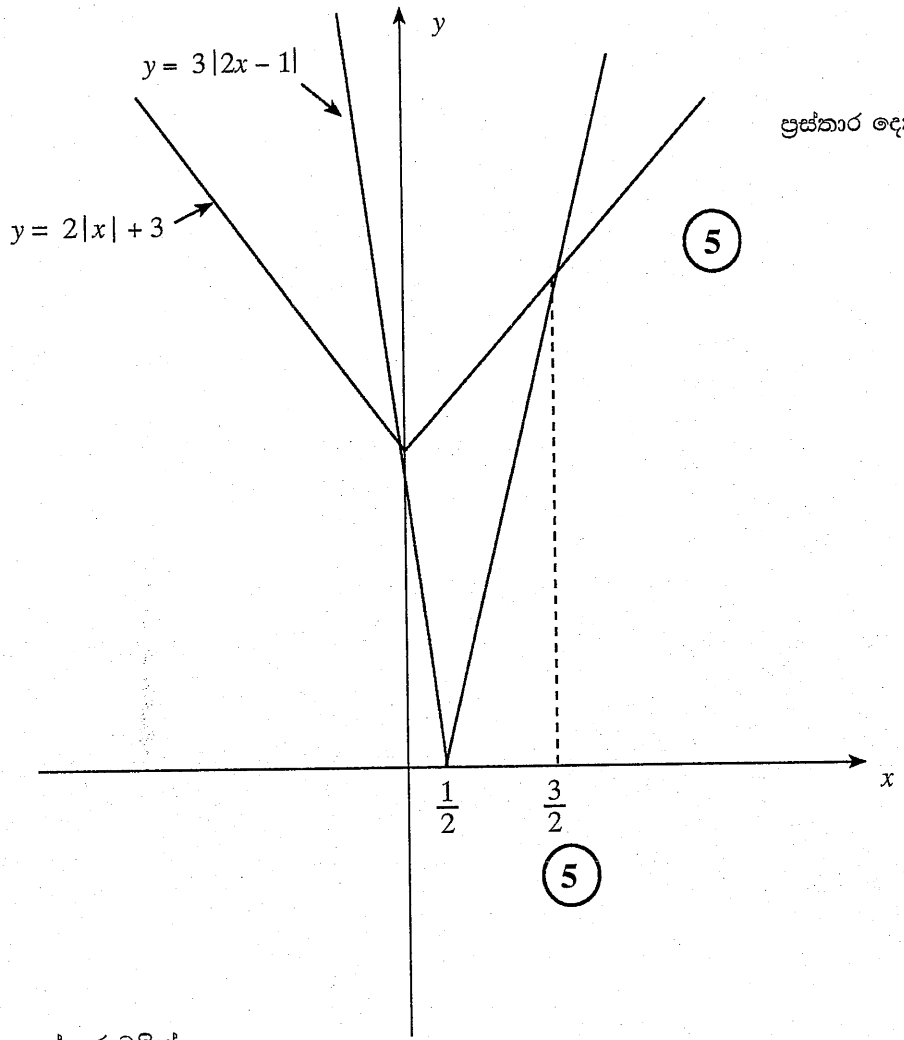
අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $1+i$ 5 හා $3-i$ වේ. 5

25

විකල්ප ක්‍රමය II :

පෙර පරිදිම ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5 .

x හි අගයන් සඳහා විකල්ප ක්‍රමයක් :



ප්‍රස්තාර දෙකම සඳහා 5

5

ප්‍රස්තාර වලින් ,

$3|2x-1| > 2|x| + 3$

$\Leftrightarrow \quad x < 0 \text{ or } x > \frac{3}{2}.$ 5

විකල්ප ක්‍රමය I :

පෙර පරිදිම ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5

x හි අගයන් සඳහා විකල්ප ක්‍රමයක් :

$3\,|2x-1| > 2\,|x|+3$

(i) අවස්ථාව $\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow 3\,(2x-1) > 2x+3$

$\Leftrightarrow 6x-3 > 2x+3$

$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් වන්නේ $x > \frac{3}{2}$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $\boxed{0 \leq x < \frac{1}{2}}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > 2x+3$

$\Leftrightarrow 0 > 8x$

$\Leftrightarrow 0 > x$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් නොමැත.

නිවැරදි විසඳුම් සමග අවස්ථා 3 ම සඳහා 10
නිවැරදි විසඳුම් සමග අවස්ථා 2ක් පමණක් සඳහා 5

(iii) අවස්ථාව $\boxed{x < 0}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > -2x+3$

$\Leftrightarrow 0 > 4x$

$\Leftrightarrow x < 0$

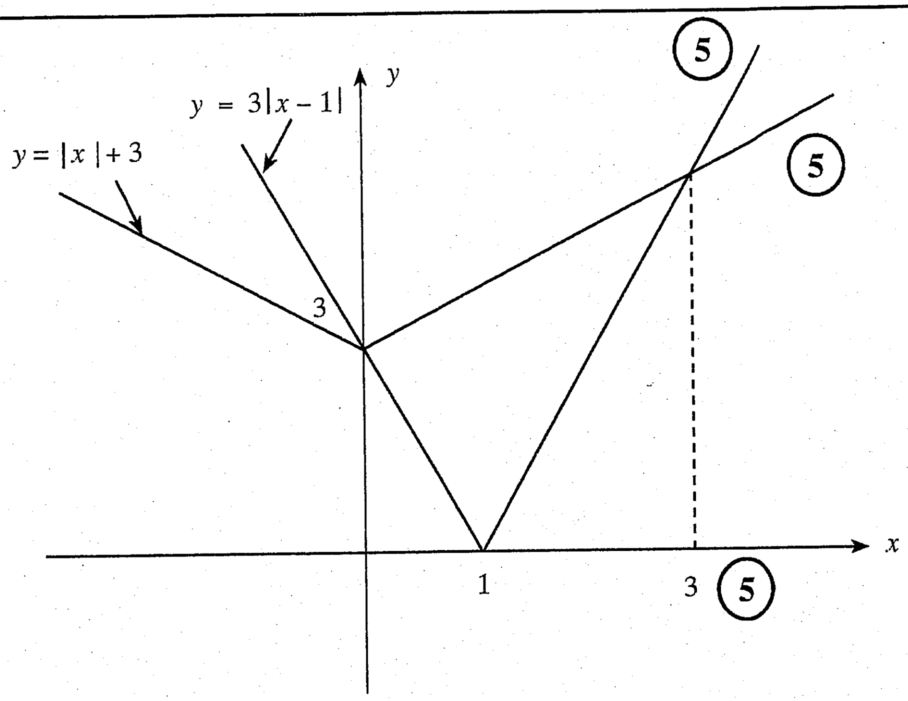
ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් වන්නේ $x < 0$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

$\therefore$ දී ඇති අසමානතාවයෙහි විසඳුම් වන්නේ $x < 0$ හෝ $x > \frac{3}{2}$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ. 5

25

2. එක ම රූප සටහනක $y=3|x-1|$ හා $y=|x|+3$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $3|2x-1|>2|x|+3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



එක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක x – ඛණ්ඩාංකය $x = 0$ වේ. අනෙක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ x – ඛණ්ඩාංකය $x > 1$ සඳහා $3(x-1) = x+3$ මගින් දෙනු ලැබේ.

මෙය $x = 3$ ලබා දෙයි.

දැන්, $3|2x-1| > 2|x| + 3$

$\Leftrightarrow \quad 3|u-1| > |u| + 3$, මෙහි $u = 2x$. 5

$\Leftrightarrow \quad u < 0$ හෝ $u > 3$ (ප්‍රස්තාරවලට අනුව)

$\Leftrightarrow \quad x < 0$ හෝ $x > \frac{3}{2}$. 5

$\boxed{25}$

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(4r+1) = n(2n+3)$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා, ව. පැ. $= 4 + 1 = 5$ හා

ද. පැ. $= 1(2+3) = 5$ වේ.

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k}(4r+1) = k(2k+3)$ වේ. 5

දැන්,
$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{k+1}(4r+1) &= \sum_{r=1}^{k}(4r+1) + \{4(k+1)+1\} \\ &= k(2k+3) + (4k+5) \quad 5 \\ &= 2k^2 + 7k + 5 \\ &= (k+1)(2k+5) \quad 5 \\ &= (k+1)[2(k+1)+3]\end{aligned}$$

ඒ නයින්, $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම්, $n = k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත.

ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

5

25

NEW/OLD

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2020

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

නව/පැරණි නිර්දේශය

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

මෙය උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි.
ප්‍රධාන/ සහකාර පරීක්ෂක රැස්වීමේ දී ඉදිරිපත්වන අදහස් අනුව මෙහි වෙනස්කම් කරනු ලැබේ.

අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතුව ඇත.

අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2020

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

(නව/පැරණි නිර්දේශ)

ලකුණු බෙදීයාම

II පත්‍රය

A කොටස : $10 \times 25 = 250$

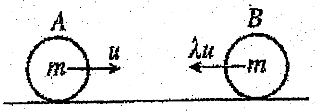
B කොටස : $05 \times 150 = 750$

එකතුව $= 1000 / 10$

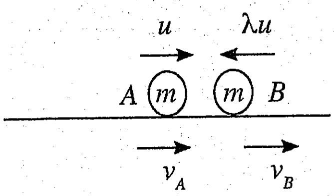
II පත්‍රය අවසාන ලකුණ $= 100$

නව නිර්දේශය

1. එක එකෙහි ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක් සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත එකම සරල රේඛාවේ එහෙත් ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමට මොහොතකට පෙර A හි හා B හි ප්‍රවේග පිළිවෙළින් u හා λu වේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. ගැටුමට මොහොතකට පසු A හි ප්‍රවේගය සොයා $\lambda > \frac{1}{3}$ නම්, A හි චලිත දිශාව ප්‍රතිවිරුද්ධ වන බව පෙන්වන්න.



A හා B සඳහා $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$, $\rightarrow$ යෙදීමෙන් :



$(mv_A + mv_B) - (mu - m\lambda u) = 0.$

$\therefore\ v_A + v_B = (1 - \lambda)u$ ——— 1   10

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයෙන් :

$v_B - v_A = \frac{1}{2}(u + \lambda u)$ ——— 2   5

1 − 2 : $2v_A = u - \lambda u - \frac{1}{2}u - \frac{\lambda}{2}u$

$v_A = \frac{1}{4}(1 - 3\lambda)u$ 5

$\lambda > \frac{1}{3}$, නම් එවිට $v_A < 0.$ 5

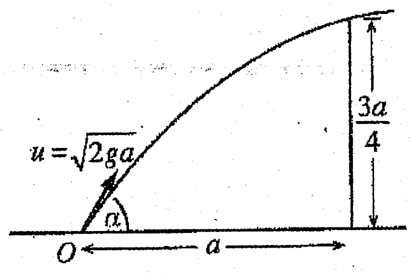
$\therefore$ A හි චලිත දිශාව ප්‍රතිවිරුද්ධ වේ.

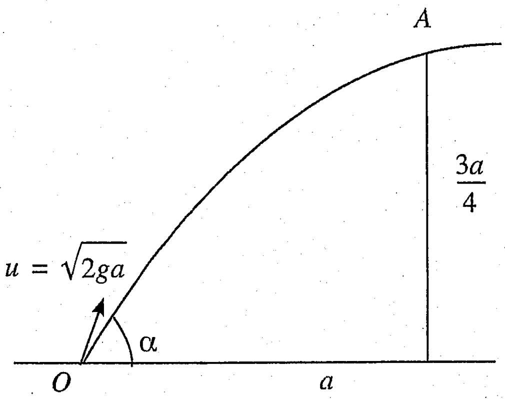
25

2. අංශුවක් තිරස් ගෙබිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට $u=\sqrt{2ga}$ ආරම්භක ප්‍රවේගයකින් හා තිරසට $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව, O සිට a තිරස් දුරකින් පිහිටි උස $\frac{3a}{4}$ වූ සිරස් බිත්තියකට යාන්තමින් ඉහළින් යයි.

$\sec^2\alpha - 4\tan\alpha + 3 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\alpha = \tan^{-1}(2)$ බව පෙන්වන්න.





O සිට A දක්වා ගතවූ කාලය t යැයි ගනිමු.

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$\rightarrow \quad a = u\cos\alpha\, t$ ——— (1) $\quad$ 5

$\uparrow \quad \frac{3a}{4} = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$ ——— (2) $\quad$ 5

(1) $\Rightarrow t = \frac{a}{u\cos\alpha}$

දැන්, (2) $\Rightarrow \frac{3a}{4} = a\tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{a^2}{2ga\cos^2\alpha}$ $\quad$ 5

$\Rightarrow \frac{3}{4} = \tan\alpha - \frac{1}{4}\sec^2\alpha$

$\Rightarrow \sec^2\alpha - 4\tan\alpha + 3 = 0$ $\quad$ 5

$\Rightarrow (1+\tan^2\alpha) - 4\tan\alpha + 3 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\alpha - 4\tan\alpha + 4 = 0$

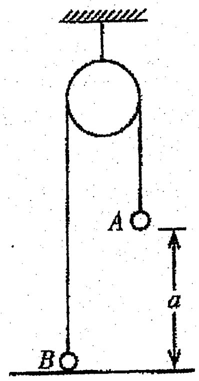
$\Rightarrow (\tan\alpha - 2)^2 = 0$

$\therefore \tan\alpha = 2$ $\quad$ 5

$\therefore \alpha = \tan^{-1}(2)$.

$\boxed{25}$

3. එක එකෙහි ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක්, අචල සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා, රූපයේ දැක්වෙන පරිදි A අංශුව තිරස් ගෙබිමක සිට a උසකින් ඇතිවද B අංශුව ගෙබිම ස්පර්ශ කරමින් ද සමතුලිතතාවයේ පිහිටා ඇත. දැන්, A අංශුවට සිරස්ව පහළට mu ආවේගයක් දෙනු ලැබේ. ආවේගයෙන් මොහොතකට පසු A අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න.
A ට ගෙබිම වෙත ළඟා වීමට ගතවන කාලය ලියා දක්වන්න.

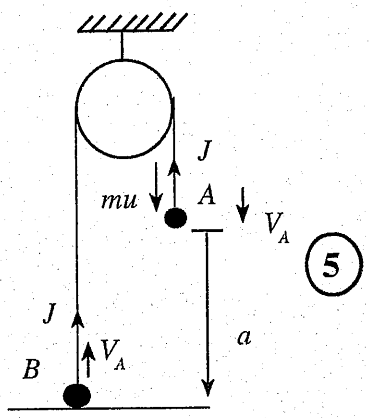


$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්,

$A \downarrow \quad mu - J = mV_A$ 5

$B \uparrow \quad J = mV_A$ 5

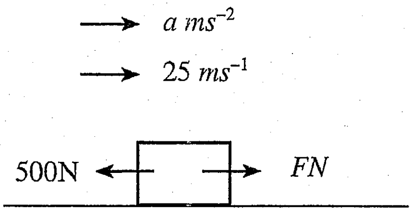
$\therefore \quad V_A = \dfrac{u}{2}$ 5



$T = \dfrac{a}{V_A} = \dfrac{2a}{u}$ 5

25

4. ස්කන්ධය 1500 kg වූ කාරයක්, විශාලත්වය 500 N වූ නියත ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව සෘජු තිරස් මාර්ගයක ධාවනය වේ. කාරයේ එන්ජිම 50 kW ජවයකින් ක්‍රියාකරමින් කාරය 25 m s^{-1} වේගයෙන් ධාවනය වන විට එහි ත්වරණය සොයන්න.
මෙම මොහොතේ දී කාරයේ එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කරනු ලැබේ. එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කළ මොහොතේ සිට තත්පර 50 කට පසු කාරයේ වේගය සොයන්න.



ජවය = 50kW නිසා,

$$50 \times 10^3 = F \times 25 \quad 5$$

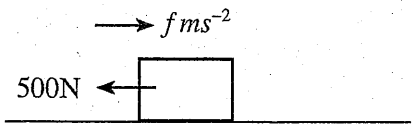
$$\therefore F = 2000$$

$\underline{F} = m\underline{a} \longrightarrow$ යෙදීමෙන්

$$F - 500 = 1500\,a. \quad 5$$

$$\therefore a = 1 \quad 5$$

කාරයේ එන්ජිම නැවතුණු විට,



$\underline{F} = m\underline{a} \longrightarrow$

$$-500 = 1500 f \quad 5$$

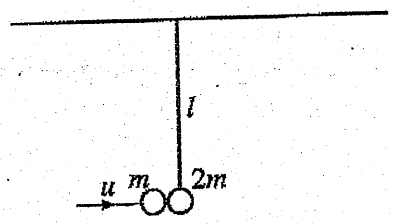
$$\therefore f = -\frac{1}{3}$$

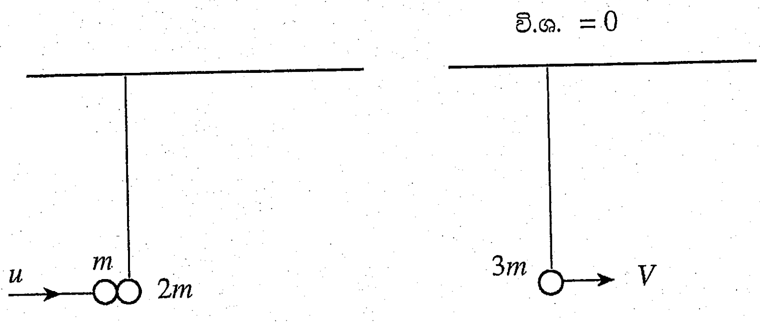
$v = u + at \longrightarrow$ යෙදීමෙන් $\quad v = 25 - \frac{1}{3} \times 50$

$$v = \frac{25}{3}\ ms^{-1} \quad 5$$

$\boxed{25}$

5. දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් තිරස් සිවිලිමක නිදහසේ එල්ලා ඇති ස්කන්ධය $2m$ වූ P අංශුවක් සමතුලිතතාවයේ පවතී. u ප්‍රවේගයෙන් තිරස් දිශාවකින් චලනය වන ස්කන්ධය m වූ තවත් අංශුවක්, P අංශුව සමග ගැටී එයට හා වේ. ගැටුමට පසුව ද තන්තුව තදව පවතින අතර සංයුක්ත අංශුව සිවිලිමට යාන්තමින් ළඟා වේ. $u = \sqrt{18gl}$ බව පෙන්වන්න.





$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන් : m හා $2m \longrightarrow$

$0 = 3mV - mu$ 5

$\therefore V = \frac{u}{3}$ 5

සංයුක්ත අංශුව සඳහා ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

$\frac{1}{2}(3m)V^2 - 3mgl = 0.$ 10

$\therefore V^2 = 2gl$

$\therefore \frac{u^2}{9} = 2gl$

ඒ නයින්, $u = \sqrt{18gl}$ 5

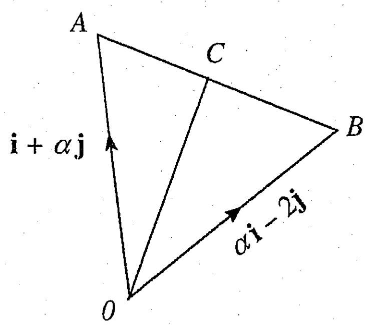
25

6. $\alpha > 0$ හා සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}$ හා $\alpha\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. C යනු $AC : CB = 1 : 2$ වන පරිදි AB මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. AB ට OC ලම්බ යැයි දී ඇත. α හි අගය සොයන්න.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$= -(\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}) + (\alpha\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \quad 5$$

$$= (\alpha - 1)\,\mathbf{i} - (\alpha + 2)\,\mathbf{j}$$



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad 5$$

$$= (\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}) + \frac{1}{3}[(\alpha - 1)\,\mathbf{i} - (\alpha + 2)\,\mathbf{j}] \quad 5$$

$$= \frac{1}{3}[(\alpha + 2)\,\mathbf{i} + 2(\alpha - 1)\,\mathbf{j}]$$

$$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad 5$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 2) - 2(\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0$$

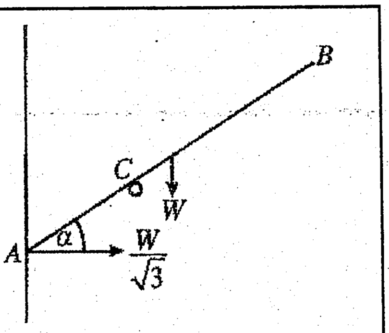
$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 2) = 0$$

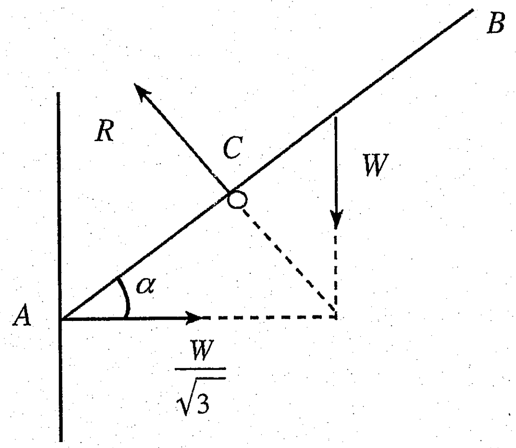
$$\Leftrightarrow \alpha = 1 \quad 5 \quad (\because \alpha > 0)$$

25

7. දිග $2a$ හා බර W වූ ACB ඒකාකාර දණ්ඩක් රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි A කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව C හි තබා ඇති සුමට නාදැත්තක් මගින් සමතුලිතතාවේ තබා ඇත. A හි දී බිත්තිය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{W}{\sqrt{3}}$ බව දී ඇත. දණ්ඩ තිරස සමග සාදන α කෝණය $\frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

$AC = \frac{3}{4}a$ බව ද පෙන්වන්න.





දණ්ඩෙහි සමතුලිතතාව සඳහා

$$\rightarrow \quad R \sin\alpha = \frac{W}{\sqrt{3}} \quad \text{——} \quad (1) \quad (5)$$

$$\uparrow \quad R\cos\alpha = W \quad \text{——} \quad (2) \quad (5)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

දැන්, $(1) \Rightarrow R = \frac{2W}{\sqrt{3}}$

$$\overset{\curvearrowleft}{A} \quad R \times AC = W \times a\cos\frac{\pi}{6} \quad (\text{හෝ } Wa\cos\alpha) \quad (5)$$

$$\frac{2W}{\sqrt{3}} \times AC = W \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AC = \frac{3}{4}a \quad (5)$$

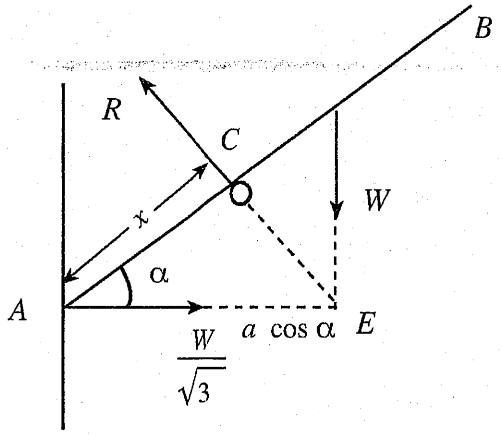
25

වෙනත් ක්‍රමයක් 1

$AB \nearrow$ 　 $\dfrac{W}{\sqrt{3}}\cos\alpha = W\sin\alpha$ 　 10

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$ 　 5



$\overset{\curvearrowleft}{C}$ 　 $\dfrac{W}{\sqrt{3}} \times x\sin\dfrac{\pi}{6} = W \times (a-x)\cos\dfrac{\pi}{6}$ 　 5 　 හෝ $x = AE\cos\alpha$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \times x \times \dfrac{1}{2} = (a-x)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 3(a-x)$

$x = \dfrac{3}{4}a$ 　 5

වෙනත් ක්‍රමයක් 2

ADE බල ත්‍රිකෝණයක් වේ. 　 5

$\dfrac{\frac{W}{\sqrt{3}}}{AE} = \dfrac{W}{AD}$

$\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 　 5

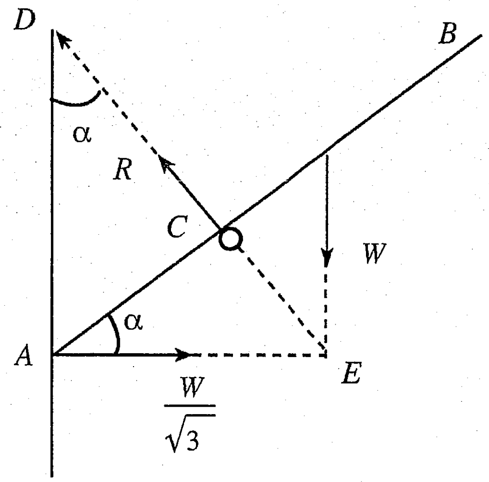
$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$ 　 5

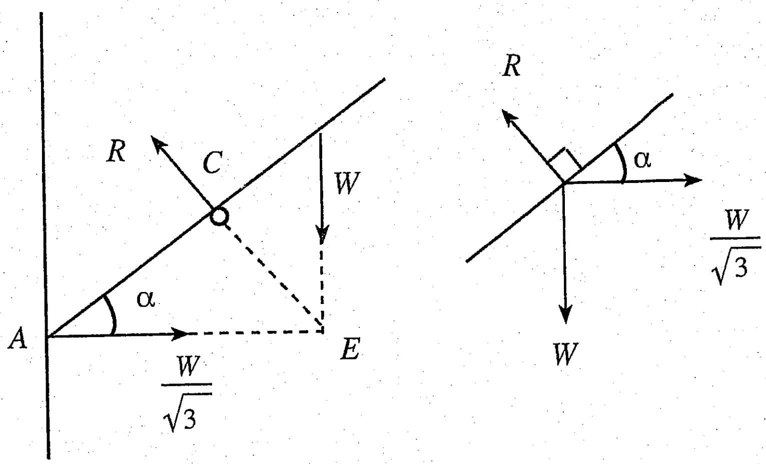
$\therefore AE = a\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ 　 5

$AC = AE\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{3}{4}a$ 　 5



වෙනත් ක්‍රමයක් 3



ලාමී නියමයෙන්,

$$\frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\frac{W}{\sqrt{3}}}{\sin(\pi-\alpha)} \quad 5$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\alpha} \quad 5$$

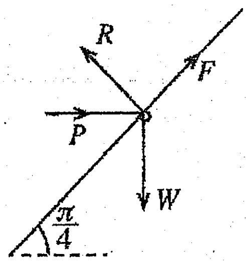
$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

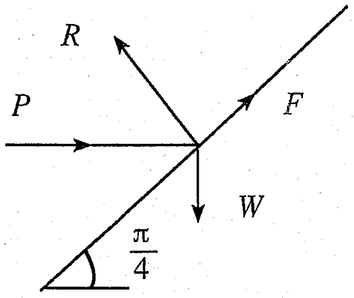
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \quad 5$$

$AC = AE\cos\alpha$ මගින් $AC = \frac{3}{4}a$ ලැබේ. 5 + 5

6

8. බර W වූ කුඩා පබළුවක් තිරසට $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් ආනත අචල, රළු, සෘජු කම්බියකට අමුණා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි විශාලත්වය P වූ තිරස් බලයක් මගින් පබළුව සමතුලිතව තබා ඇත. පබළුව හා කම්බිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. පබළුව මත ඝර්ෂණ බලය F හා අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව R නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රමාණවත් සමීකරණ P හා W ඇසුරෙන් ලබා ගන්න.
$\frac{F}{R}=\frac{W-P}{W+P}$ බව දී ඇත. $\frac{W}{3}\leq P\leq 3W$ බව පෙන්වන්න.





$$F = \frac{W-P}{W+P}$$

පබලුවේ සමතුලිතතාව සඳහා

$$F - \frac{W}{\sqrt{2}} + \frac{P}{\sqrt{2}} = 0. \quad 5 \quad \left(\cos\frac{\pi}{4} \text{ හෝ } \sin\frac{\pi}{4} \text{ සමඟ}\right)$$

$$R - \frac{W}{\sqrt{2}} - \frac{P}{\sqrt{2}} = 0. \quad 5 \quad \left(\cos\frac{\pi}{4} \text{ හෝ } \sin\frac{\pi}{4} \text{ සමඟ}\right)$$

$$\mu \geq \frac{|F|}{R}$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{|W-P|}{W+P} \quad 10$$

සංඛ්‍යාත්මක අගය නොමැති 5 පමණි.

$$\therefore |W-P| \leq \frac{1}{2}(W+P)$$

$$\therefore -\frac{1}{2}(W+P) \leq W-P \leq \frac{1}{2}(W+P)$$

ඒ නයින්, $\frac{W}{3} \leq P \leq 3W$ 5

25

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B|A)=\frac{1}{4}$ හා $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$ බව දී ඇත. $P(B)$ සොයන්න.

A හා B සිද්ධි ස්වායත්ත **නොවන** බව පෙන්වන්න.

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B) = \frac{3}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{20} \quad 5$$

දැන්, $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ මගින් 5

$$\frac{4}{5} = \frac{3}{5} + P(B) - \frac{3}{20}$$ ලැබේ.

$$\therefore P(B) = \frac{16}{20} - \frac{12}{20} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20} \quad 5$$

එවිට $P(A)\,.\,P(B) = \frac{3}{5}\times\frac{7}{20} = \frac{21}{100}$ 5

$$\therefore \quad P(A\cap B) \neq P(A)\,.\,P(B) \quad 5$$

$\therefore$ A හා B ස්වායත්ත නොවේ.

$\boxed{25}$

10. එක එකක් 10 ට අඩු හෝ සමාන ධන නිඛිලමය නිරීක්ෂණ 5 ක කුලකයක මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය හා මාතය යන එක එකක් 6 ට සමාන වේ. නිරීක්ෂණවල පරාසය 9 වේ. මෙම නිරීක්ෂණ පහ සොයන්න.

මාතය $= 6 \Rightarrow$ 6, 6 සංඛ්‍යාවලින් අවම වශයෙන් දෙකක් වේ. 5

පරාසය $= 9$ හා සංඛ්‍යා ධන නිඛිල ≤ 10 වේ. කුඩාම සංඛ්‍යාව 1 හා විශාලම සංඛ්‍යාව 10 වේ. 5

මධ්‍යස්ථය 6 වන නිසා, සංඛ්‍යා

$$\left.\begin{array}{l} 1, a, 6, 6, 10 \quad \text{හෝ} \\ 1, 6, 6, a, 10. \end{array}\right\} \text{විය යුතුය.}$$ 5

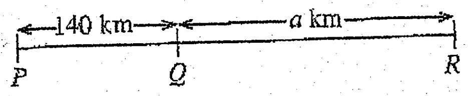
මධ්‍යන්‍යය $= \dfrac{a+23}{5} = 6$ ලබා දෙයි. 5

$\therefore \; a = 7$ 5

$\therefore$ සංඛ්‍යා 1, 6, 6, 7, 10 වේ.

$\boxed{25}$

11. (*a*) රූපයෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි P, Q හා R දුම්රිය ස්ථාන තුනක් $PQ = 140$ km හා $QR = a$ km වන පරිදි සරල රේඛාවක පිහිටා ඇත. කාලය $t = 0$ දී A දුම්රියක් P හි දී නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කර Q දෙසට f km h^{-2} නියත ත්වරණයෙන් පැය භාගයක් ගමන් කර කාලය $t = \frac{1}{2}$ h හි දී එයට තිබූ ප්‍රවේගය පැය තුනක කාලයක් පවත්වාගෙන යයි. ඉන්පසු එය f km h^{-2} නියත මන්දනයෙන් ගමන් කර Q හි දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. කාලය $t = 1$ h හි දී තවත් B දුම්රියක් R හි දී නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කර Q දෙසට පැය T කාලයක් $2f$ km h^{-2} නියත ත්වරණයෙන් ද ඉන්පසු f km h^{-2} නියත මන්දනයෙන් ද ගමන් කර Q හි දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. දුම්රිය දෙකම එකම මොහොතේ දී නිශ්චලතාවට පැමිණේ. එකම රූපසටහනක A හා B හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.



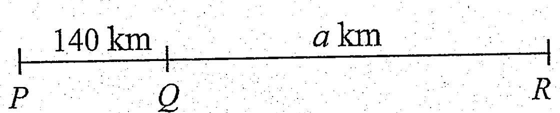
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $f = 80$ බව පෙන්වා, T හි හා a හි අගයන් සොයන්න.

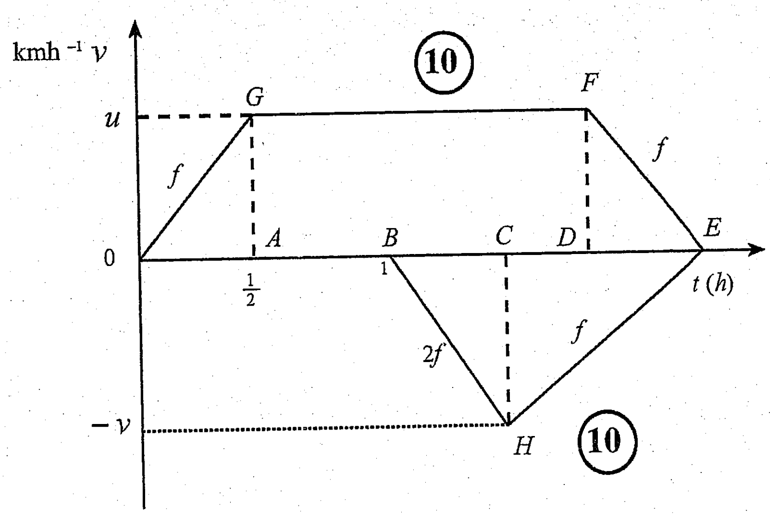
(*b*) නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව u ඒකාකාර වේගයෙන් බටහිර දෙසට යාත්‍රා කරන අතර බෝට්ටුවක් පොළොවට සාපේක්ෂව $\frac{u}{2}$ ක ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතක දී බෝට්ටුවෙන් d දුරකින් උතුරෙන් නැගෙනහිරට $\frac{\pi}{3}$ ක කෝණයකින් නැව පිහිටයි.

(i) බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව උතුරෙන් බටහිරට $\frac{\pi}{6}$ ක කෝණයක් සාදන දිශාවට යාත්‍රා කරයි නම් බෝට්ටුවට නැව අල්ලාගත හැකි බව පෙන්වා, එයට නැව අල්ලා ගැනීමට ගතවන කාලය $\frac{2d}{\sqrt{3}u}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව උතුරෙන් නැගෙනහිරට $\frac{\pi}{6}$ ක කෝණයක් සාදන දිශාවට යාත්‍රා කරයි නම් නැවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවේ වේගය $\frac{\sqrt{7}u}{2}$ බව පෙන්වා, නැව සහ බෝට්ටුව අතර කෙටිම දුර $\frac{d}{2\sqrt{7}}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*)





20

$\underline{\Delta\ OAG}$

$$f = \frac{u}{\frac{1}{2}}$$

$\therefore \quad f = 2u$ 5

$\Delta\ OAG \equiv \Delta\ DEF$

$\therefore DE = \frac{1}{2}$ 5

$OEFG$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $= 140$ 5

$\frac{1}{2}(4+3)\,u = 140$ 5

$\therefore \ u = 40$

$\therefore f = 80.$ 5

$\boxed{25}$

$\underline{\Delta\ BHC}$

$2f = \frac{V}{T} \Rightarrow 160 = \frac{V}{T}$ 5

$\underline{\Delta\ ECH}$

$f = \frac{V}{CE} \Rightarrow 80 = \frac{V}{CE}$ 5

$\therefore CE = 2T$ 5

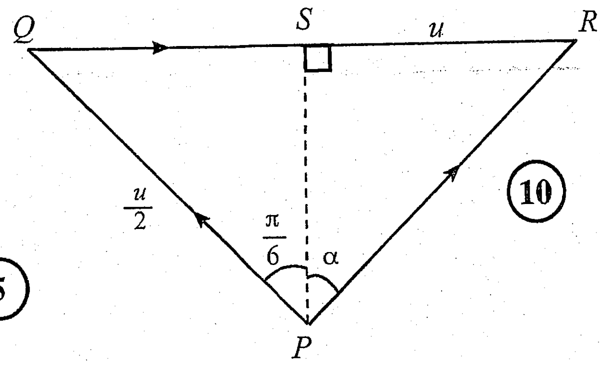
$\therefore \ 3T = 3$ හා $T = 1.$ 5 තවද $V = 160.$

$a = BHE$ ත්‍රිකෝණයෙහි වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 3 \times 160$

$= 240$ 5

$\boxed{25}$

(b) $\mathbf{V}(S, E) = \leftarrow u$ 5



(i) $\mathbf{V}(B, E) = \frac{u}{2} \nwarrow \frac{\pi}{6}$ 5

$\mathbf{V}(B, S) = \mathbf{V}(B, E) + \mathbf{V}(E, S)$ 5

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{PR}$

$$QS = \frac{u}{2} \sin\frac{\pi}{6} = \frac{u}{4}$$

$$\therefore \; SR = \frac{3u}{4}$$

$$SP = \frac{u}{2} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}u}{4}$$

$$\tan\alpha = \frac{SR}{SP} = \frac{3u}{4} \times \frac{4}{\sqrt{3}u} = \sqrt{3}$$ 5 + 5

$$\therefore \; \alpha = \frac{\pi}{3}$$ 5

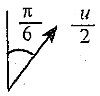
∴ බෝට්ටුවට නැව අල්ලා ගත හැකිය. $\boxed{40}$

$$Q\hat{P}R = \frac{\pi}{2}$$

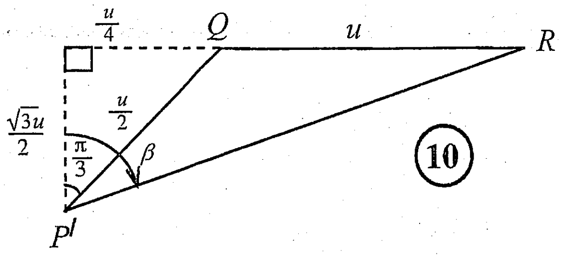
$$\therefore \; PR = \frac{\sqrt{3}\,u}{2}$$ 5

$$t = \frac{d}{PR} = \frac{2d}{\sqrt{3}\,u}$$ 5

$\boxed{10}$

(ii) $\mathbf{V}(B, E) =$ 

5

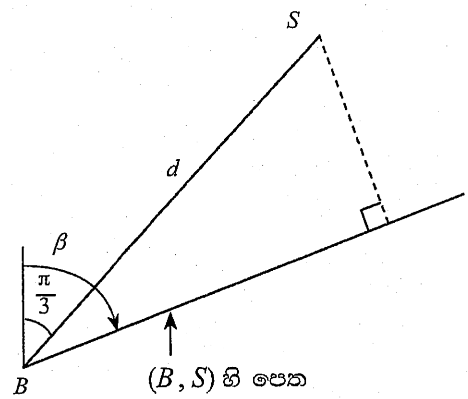


10

$\mathbf{V}(B, S) = \mathbf{V}(B, E) + \mathbf{V}(E, S)$

$= \overrightarrow{P^{l}Q} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{P^{l}R}$



ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණයෙන්,

$\sin\beta = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$ හා $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ වේ.

කෙටිම දුර $= d \sin\left(\beta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ 5

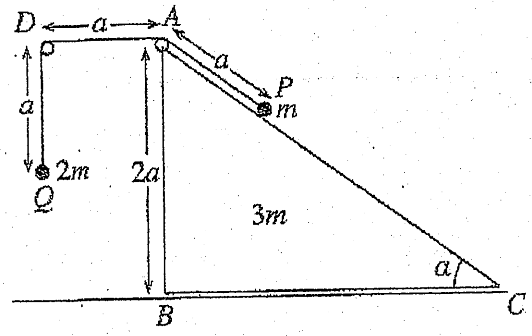
$= d\left(\sin\beta \cos\dfrac{\pi}{3} - \cos\beta \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ 5

$= d\left(\dfrac{5}{4\sqrt{7}} - \dfrac{3}{4\sqrt{7}}\right)$

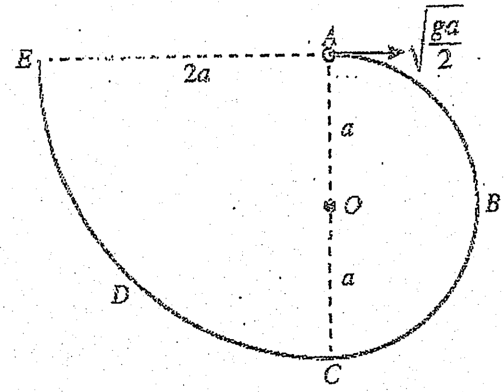
$= \dfrac{d}{2\sqrt{7}}$. 5

$\boxed{30}$

12. (a) රූපයෙහි ABC ත්‍රිකෝණය, $A\hat{C}B = \alpha$, $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ හා $AB = 2a$ වූ BC අඩංගු මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබන ලද ස්කන්ධය $3m$ වන සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ වේ. AC රේඛාව, එය අඩංගු මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වේ. D ලක්ෂ්‍යය, AD තිරස් වන පරිදි ABC තලයෙහි වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකි. A හා D හි සවිකර ඇති සුමට කුඩා කප්පි දෙකක් මතින් යන දිග $3a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට පිළිවෙළින් ස්කන්ධය m හා $2m$ වූ P හා Q අංශු දෙක ඈඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි P අංශුව AC මත අල්වා තබා $AP = AD = DQ = a$ වන පරිදි Q අංශුව නිදහසේ එල්ලෙමින් පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Q අංශුව ගෙබිමට ළඟා වීමට ගන්නා කාලය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.



(b) රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $ABCDE$ සුමට තුනී කම්බියක් සිරස් තලයක සවි කර ඇත. ABC කොටස O කේන්ද්‍රය හා අරය a වූ අර්ධ වෘත්තයක් වන අතර CDE කොටස කේන්ද්‍රය A හා අරය $2a$ වූ වෘත්තයකින් කාලකරෙන් කොටසකි. A හා C ලක්ෂ්‍ය O හරහා යන සිරස් රේඛාවේ පිහිටන අතර, AE රේඛාව තිරස් වේ. ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට P පබළුවක් A හි තබා තිරස්ව $\sqrt{\frac{ga}{2}}$ ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන අතර එය කම්බිය දිගේ චලිතය ආරම්භ කරයි.

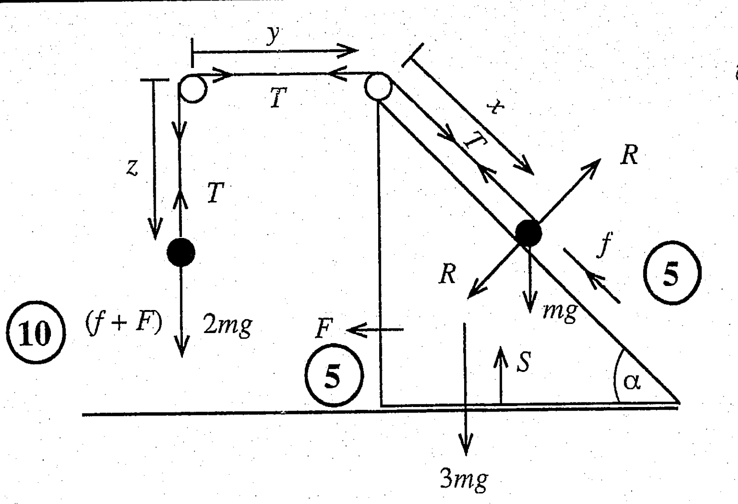


$\overrightarrow{OA}$ සමග θ $(0 \le \theta \le \pi)$ කෝණයක් $\overrightarrow{OP}$ සාදන විට P පබළුවේ v වේගය, $v^2 = \frac{ga}{2}(5 - 4\cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඉහත පිහිටීමේ දී කම්බිය මගින් P පබළුව මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයා, P පබළුව $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ වූ ලක්ෂ්‍යය පසු කරන විට එය එහි දිශාව වෙනස් කරන බව පෙන්වන්න.

P පබළුව E හි දී කම්බියෙන් ඉවත් වීමට මොහොතකට පෙර එහි ප්‍රවේගය ලියා දක්වා එම මොහොතේ දී කම්බිය මගින් P පබළුව මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

(a)



බල 15

$$x + y + z = \text{නියතයකි.}$$

$$\ddot{z} = -\ddot{x} - \ddot{y}$$

$$= f + F$$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

2m $\downarrow$ සඳහා $2mg - T = 2m(f + F)$ 10

m $\nwarrow$ සඳහා $T - mg \sin\alpha = m(f + F \cos\alpha)$ 10

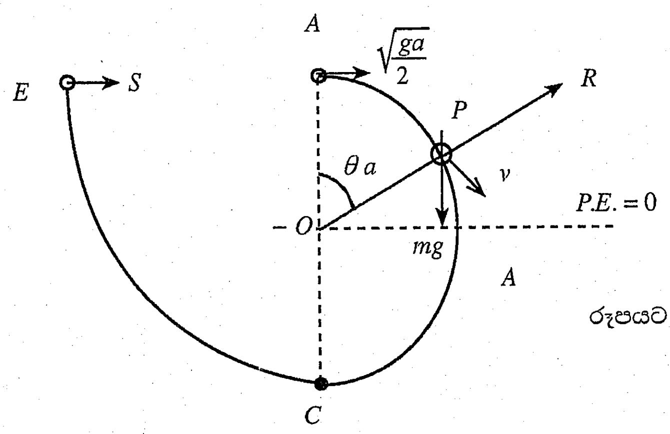
m හා 3m $\leftarrow$ සඳහා $T = 3mF + m(F + f\cos\alpha)$ 15

2m $\downarrow$ $S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$a = \frac{1}{2}(f + F)t^2$, මෙහි t යනු ගන්නා කාලය වේ. 10

$\boxed{80}$

(b)



රූපයට 10

P.E. + K.E. + සමීකරණය
5 5 5

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මමයය යෙදීමෙන්

$\frac{1}{2}mv^2 + mga\cos\theta = \frac{1}{2}m\left(\frac{ga}{2}\right) + mga.$

$\therefore\ 2v^2 + 4ga\cos\theta = 5ga$

$\therefore\ v^2 = \frac{ga}{2}(5 - 4\cos\theta)$ 5

$\boxed{30}$

වෘත්ත චලිතය සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$ $\nearrow$ යෙදීමෙන්

$R - mg\cos\theta = -m\frac{V^2}{a}$ 10

$R = mg\cos\theta - \frac{mg}{2}(5 - 4\cos\theta)$ 5

$= \frac{mg}{2}(6\cos\theta - 5)$

$0 < \theta < \alpha$; $R > 0$ හා $\alpha < \theta < \pi$; $R < 0$ මෙහි $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ 5

ඒ නයින්, පබළුව $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ ලක්ෂ්‍යය පසු කරන විට ප්‍රතික්‍රියාව එහි දිශාව වෙනස් කර ගනියි. $\boxed{20}$

E හිදී ප්‍රවේගය w ලෙස ගනිමු.

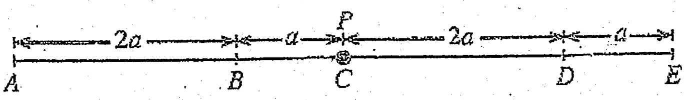
A සිට E දක්වා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්, $w = \sqrt{\frac{ga}{2}} \uparrow$. 10

$\underline{F} = m\underline{a}$ $\longrightarrow$ යෙදීමෙන්, 5

$S = \frac{mw^2}{2a} = \frac{m\left(\sqrt{\frac{ga}{2}}\right)^2}{2a} = \frac{mg}{4}$. 5

$\boxed{20}$

13. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $AB = 2a, BC = a,$ $CD = 2a$ හා $DE = a$ වන පරිදි සුමට තිරස් මේසයක් මත A, B, C, D හා E ලක්ෂ්‍ය එම පිළිවෙළින් සරල රේඛාවක් මත පිහිටා ඇත.



ස්වභාවික දිග $2a$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය kmg වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් A ලක්ෂ්‍යයට ඇඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වන P අංශුවකට ඇඳා ඇත. ස්වභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg වන තවත් සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් E ලක්ෂ්‍යයට ඇඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර P අංශුවට ඇඳා ඇත.

P අංශුව C හි අල්වා තබා මුදා හල විට, එය සමතුලිතතාවේ පවතී. k හි අගය සොයන්න.

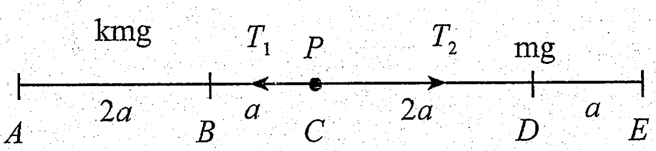
දැන්, P අංශුව D ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වන තෙක් AP තන්තුව ඇද නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. D සිට B දක්වා P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{x}+\frac{3g}{a}x=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $CP = x$ වේ. $\dot{x}^2=\frac{3g}{a}(c^2-x^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් P අංශුව B ට ළඟා වන විට එහි ප්‍රවේගය $3\sqrt{ga}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි c යනු විස්තාරය වේ.

P අංශුව B වෙත ළඟා වන විට එයට ආවේගයක් දෙනු ලබන්නේ ආවේගයෙන් මොහොතකට පසු P හි ප්‍රවේගය $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට $\sqrt{ag}$ වන පරිදි ය.

B පසු කිරීමෙන් පසු ක්ෂණික නිසලතාවට පත්වන තෙක් P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{y}+\frac{g}{a}y=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $DP = y$ වේ.

D වලින් පටන් ගත් P අංශුව දෙවන වතාවට B වෙත පැමිණීමට ගන්නා මුළු කාලය $2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)$ බව පෙන්වන්න.

13.



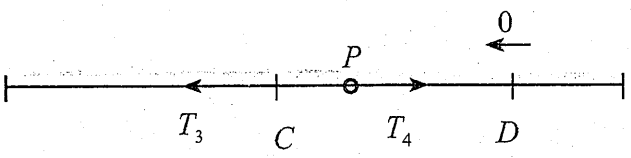
C හිදී P සමතුලිතතාවයේ පවතී.

$\therefore\ T_1 - T_2 = 0$ (5)

$\therefore \text{kmg} \cdot \frac{a}{2a} = \text{mg} \cdot \frac{2a}{a}$ (10)

$\therefore\ k = 4$ (5)

20



$\longrightarrow \underline{F} = m\underline{a}$ (P) සඳහා :

$$-T_3 + T_4 = m\ddot{x}$$

$$\therefore \quad -4mg.\frac{(a+x)}{2a} + mg.\frac{(2a-x)}{a} = m\ddot{x} \quad 10$$

5 5

එවිට, $\frac{g}{a}\left\{-2a-2x+2a-x\right\} = \ddot{x}$.

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{-3g}{a}x \quad 5$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + \frac{3g}{a}x = 0$$

මෙය $-a \leq x \leq 2a$ සඳහා වලංගු වේ.

$\boxed{25}$

මෙම ස. අ. ච. සඳහා කේන්ද්‍රය C ද $x = 2a$ වන විට $\dot{x} = 0$ වේ.

5

$\therefore$ මෙම ස. අ. ච. හි විස්තාරය $2a$ වේ. 5

$$\therefore \quad \dot{x}^2 = \frac{3g}{a}(4a^2 - x^2) \quad 5$$

$B\ (x = -a)$ හි දී ප්‍රවේගය v යැයි ගනිමු.

එවිට $v^2 = \frac{3g}{a}(4a^2 - a^2)$ 5

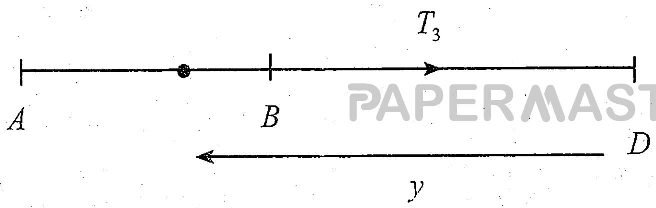
$$= 9ga$$

$$v = 3\sqrt{ga} \quad 5$$

$\therefore P$ අංශුව පළමුවරට B ට ළඟාවන විට ප්‍රවේගය $3\sqrt{ga} \longleftarrow$ වේ.

$\boxed{25}$

ආවේගය නිසා, ආවේගයට මොහොතකට පසු ප්‍රවේගය $\sqrt{ga}$ වේ.



$$-T_3 = m\ddot{y} \quad 5$$

$$-mg\frac{y}{a} = m\ddot{y} \quad 5$$

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{g}{a}y$$

හෝ $\ddot{y} + \frac{g}{a}y = 0$ 5

15

මෙම ස. අ. ච. හි කේන්ද්‍රය D වේ. 5

විස්තාරය c යැයි ගනිමු.

එවිට, $\dot{y}^2 = \frac{g}{a}(c^2 - y^2)$

$y = 3a$ වන විට $\dot{y} = \sqrt{ga}$ 5

$ga = \frac{g}{a}(c^2 - 9a^2)$. 5

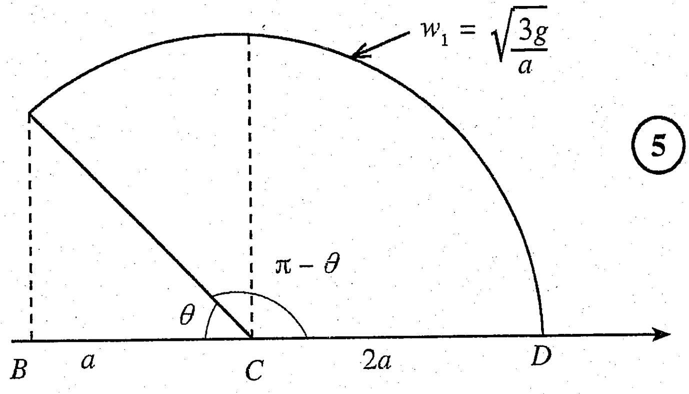
$\therefore c^2 = 10a^2$

$\therefore c = \sqrt{10}\,a$ 5

$3a < \underbrace{\sqrt{10}\,a}_{c} < 5a$ නිසා, P අංශුව B හා A අතර F ලක්ෂ්‍යයකදී ක්ෂණික නිසලතාවට පත්වේ.

20

D සිට B ට ගන්නා ලද කාලය τ_1 යැයි ගනිමු.



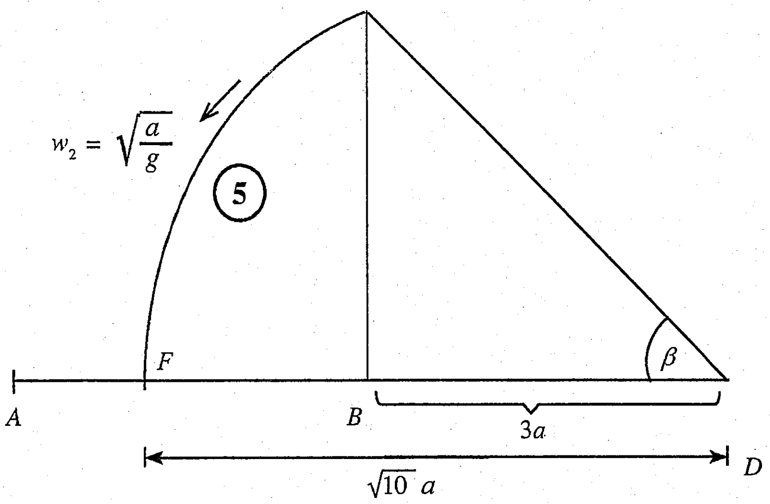
5

$\sqrt{\frac{3g}{a}}\,\tau_1 = \pi - \theta$, 5   මෙහි $\cos\theta = \frac{a}{2a}$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad 5$$

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{g}{3g}} \times \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a}{g}}. \quad 5$$



B සිට F ට ගන්නා ලද කාලය τ_2 යැයි ගනිමු.

$\sqrt{\frac{g}{a}}\,\tau_2 = \beta$ 5 හා $\cos\beta = \frac{3a}{\sqrt{10}\,a}$

$\therefore\ \tau_2 = \sqrt{\frac{a}{g}}\ \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ 5 $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

F සිට B ට ගන්නා ලද කාලය τ_3 යැයි ගනිමු. (දෙවන වතාවට B ට පැමිණීම.)

$\tau_3 = \tau_2$

$\therefore$ අවශ්‍ය කාලය $= \tau_1 + 2\tau_2$ 5

$= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right\}$ 5

45

14. (a) $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යනු ඒකක දෛශික දෙකක් යැයි ගනිමු.

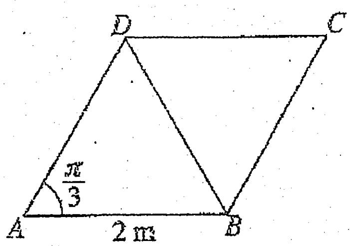
O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $12\mathbf{a}$, $18\mathbf{b}$ හා $10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ වේ.

$\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{CB}$ ප්‍රකාශ කරන්න.

A, B හා C ඒක රේඛීය බව අපෝහනය කර, $AC : CB$ සොයන්න.

$OC = \sqrt{139}$ බව දී ඇත. $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $ABCD$ යනු $AB = 2$ m හා $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ වූ රොම්බසයකි. විශාලත්වය 10 N, 2 N, 6 N, P N හා Q N වූ බල පිළිවෙළින් AD, BA, BD, DC හා CB දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය 10 N ද එහි දිශාව BC ට සමාන්තර B සිට C අතට වූ දිශාව බව ද දී ඇත. P හා Q හි අගයන් සොයන්න.



සම්ප්‍රයුක්ත බලයෙහි ක්‍රියා රේඛාව, දික් කරන ලද BA හමුවන ලක්ෂ්‍යයට A සිට ඇති දුර ද සොයන්න.

දැන්, සම්ප්‍රයුක්ත බලය A හා C ලක්ෂ්‍ය හරහා යන පරිදි වාමාවර්ත අතට ක්‍රියා කරන ඝූර්ණය M Nm වූ යුග්මයක් ද CB හා DC දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරන එක එකෙහි විශාලත්වය F N වූ බල දෙකක් ද පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. F හා M හි අගයන් සොයන්න.

(*a*)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$$

$$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \quad (5)$$

$$= 10\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 12\mathbf{a}$$

$$= -2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \quad (5)$$

$$= 18\mathbf{b} - (10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = -10\mathbf{a} + 15\mathbf{b} \quad (5)$$

$\boxed{20}$

$$\overrightarrow{CB} = 5\overrightarrow{AC} \quad (5)$$

$\therefore A, B$ හා C ඒක රේඛීය වන අතර, (5)

$$AC : CB = 1 : 5 \quad (5)$$

$\boxed{15}$

$$OC = \sqrt{139} \Rightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = 139 \quad 5$$

$$(10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = 139 \quad 5$$

$$100\,|\mathbf{a}|^2 + 60\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 9\,|\mathbf{b}|^2 = 139 \quad 5$$

$$60\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 30$$

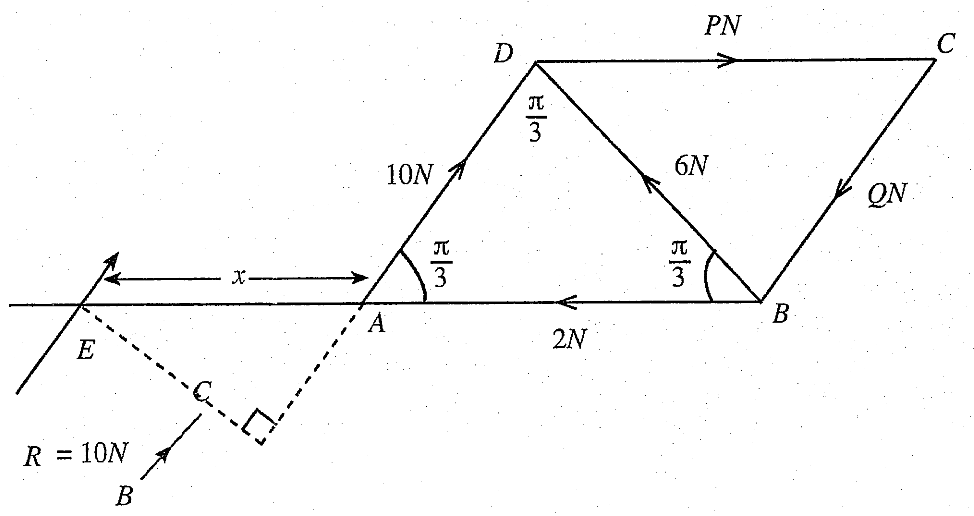
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} \quad 5$$

$$|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \cos A\hat{O}B = \frac{1}{2} \quad 5$$

$$\therefore A\hat{O}B = \frac{\pi}{3} \quad 5$$

$\boxed{30}$

(*b*)



10

$$\uparrow \quad 10 \sin\frac{\pi}{3} = 10 \sin\frac{\pi}{3} - Q \sin\frac{\pi}{3} - 6 \sin\frac{\pi}{3} \quad 10$$

$$\therefore Q = 6 \quad 5$$

$$\rightarrow \quad 10 \cos\frac{\pi}{3} = P - 2 - 6 \cos\frac{\pi}{3} - 6 \cos\frac{\pi}{3} + 10 \cos\frac{\pi}{3} \quad 10$$

$$\therefore P = 8 \quad 5$$

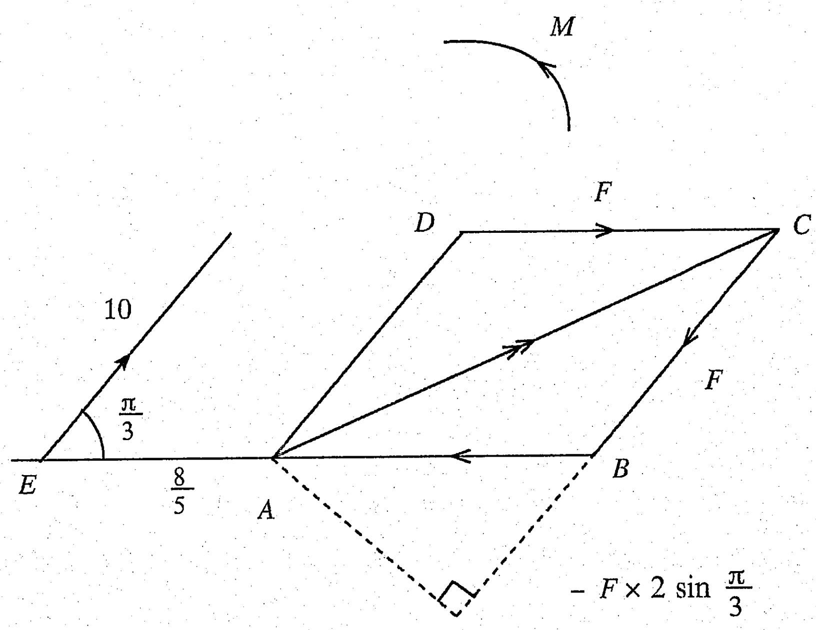
$\boxed{40}$

$E \curvearrowright$ $10x \sin\frac{\pi}{3} - 6x\ (2+x)\sin\frac{\pi}{3} - 8x2\sin\frac{\pi}{3} + 6\,(2+x)\sin\frac{\pi}{3} = 0$ **(10)**

$\therefore\ 10x\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

$\therefore\ x = \frac{8}{5}$ m **(5)**

15



$A \curvearrowleft$ $-10 \times \frac{8}{5}\sin\frac{\pi}{3} + M - F \times 2\sin\frac{\pi}{3} = 0$ **(10)**

$M = F \times 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ **(5)**

$C \curvearrowleft$ $M - 10\,(2 + \frac{8}{5})\ \sin\frac{\pi}{3} = 0$ **(5)**

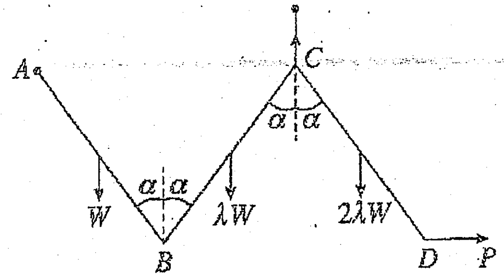
$M = 10 \times \frac{18}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 18\sqrt{3}$ **(5)**

$F = \dfrac{18\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 5.$ **(5)**

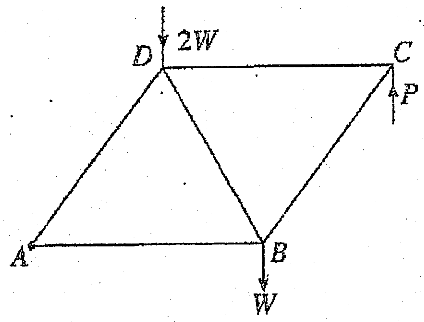
30

15.(a) එක එකෙහි දිග $2a$ වන AB, BC හා CD ඒකාකාර දඬු තුනක් B හා C අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB, BC හා CD දඬුවල බර පිළිවෙළින් W, λW හා $2\lambda W$ වේ. A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දඬු සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A හා C එකම තිරස් මට්ටමේ ද දඬු එක එකක් සිරස සමග α කෝණයක් සාදන පරිදි ද C සන්ධියට හා C ට සිරස්ව ඉහළින් වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් හා D අන්තයට යෙදූ තිරස් P බලයක් මගිනි. $\lambda = \frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.



B හි දී CB මගින් AB මත ඇති කරන බලයේ තිරස් හා සිරස් සංරචක පිළිවෙළින් $\frac{W}{3}\tan\alpha$ හා $\frac{W}{6}$ බව ද පෙන්වන්න.

(b) යාබද රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල සාදා ඇත්තේ A, B, C හා D හි දී නිදහසේ සන්ධි කරන ලද එක එකෙහි දිග $2a$ වන AB, BC, CD, DA හා BD සැහැල්ලු දඬු මගිනි. B හා D හි දී පිළිවෙළින් W හා $2W$ වන භාර ඇත. රාමු සැකිල්ල A හි දී සුමටව අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර AB තිරස්ව ඇතිව සමතුලිතතාවේ තබා ඇත්තේ C හි දී සිරස්ව ඉහළට යොදන ලද P බලයක් මගිනි. W ඇසුරෙන් P හි අගය සොයන්න.

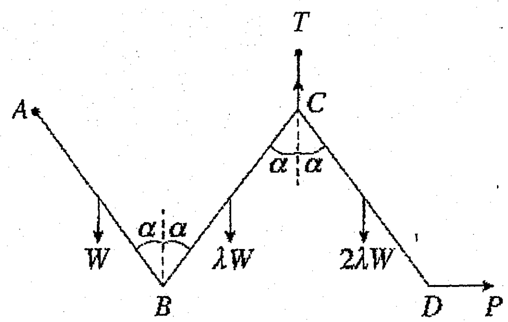


බෝ අංකනය භාවිතයෙන්, ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න සඳහන් කරමින් ඒවා සොයන්න.

(a) CD සඳහා C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$C \curvearrowright$ $2\lambda Wa\sin\alpha - P\,2a\cos\alpha = 0$ (5)

$\therefore P = \lambda W\tan\alpha$ (5)



BC හා CD සඳහා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$B \curvearrowright$ $\lambda Wa\sin\alpha - T\,2a\sin\alpha + 2\lambda W\,3a\sin\alpha = 0$ (10)

$\therefore T = \frac{7}{2}\lambda W$ (5)

AB, BC හා CD සඳහා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

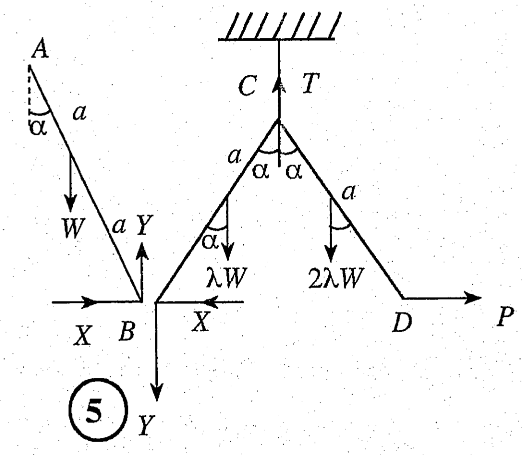
$$\overset{\curvearrowright}{A}\quad Wa\sin\alpha + \lambda W\,3a\sin\alpha - T\,4a\sin\alpha + 2\lambda W\,5a\sin\alpha - P\,2a\cos\alpha = 0 \qquad 10$$

$$W\sin\alpha + 13\lambda W\sin\alpha - 14\,\lambda W\sin\alpha - \lambda W\tan\alpha\ 2\cos\alpha = 0 \qquad 5$$

$$1 - \lambda - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \qquad 5$$

45



BC හා CD සඳහා

$$\uparrow\quad Y + 3\lambda W - T = 0$$

$$\therefore\ Y = \frac{7}{2}\lambda W - 3\lambda W \qquad 5$$

$$= \frac{\lambda W}{2}$$

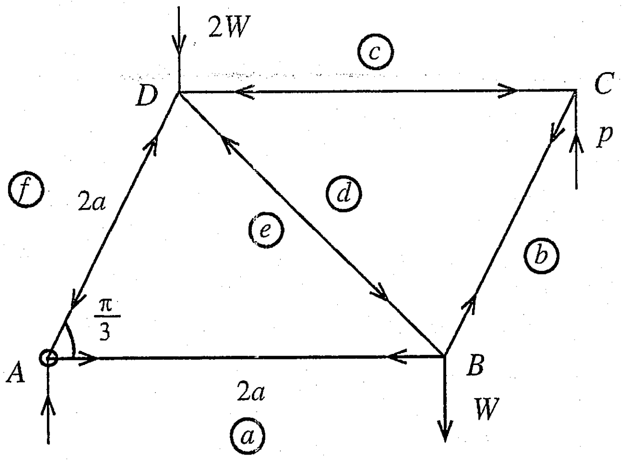
$$= \frac{W}{6}$$

$$\leftarrow\quad X - P = 0$$

$$\therefore\ X = \frac{1}{3}W\tan\alpha \qquad 5$$

15

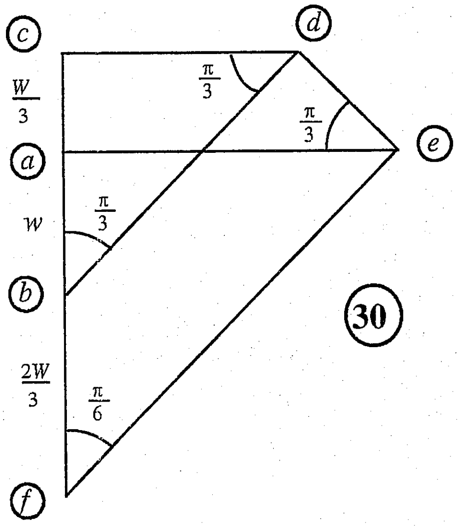
(b)



$$\overset{\curvearrowright}{A} \quad 2Wa + W\,2a - P\,3a = 0$$

$$\therefore \; P = \frac{4W}{3} \quad 10$$

10



(එක් එක් සන්ධිය සඳහා 10)

30

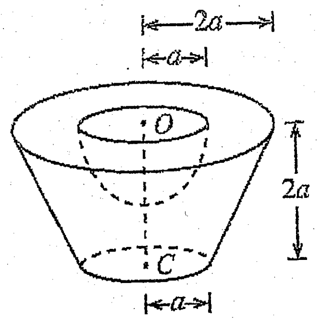
දණ්ඩ	ආතතිය	තෙරපුම	
AB	$\frac{5\sqrt{3}\,W}{9}$	–	5 + 5
BC	$\frac{8\sqrt{3}\,W}{9}$	–	5 + 5
CD	–	$\frac{4\sqrt{3}\,W}{9}$	5 + 5
DA	–	$\frac{10\sqrt{3}\,W}{9}$	5 + 5
BD	–	$\frac{2\sqrt{3}\,W}{9}$	5 + 5

50

16. (i) පතුලේ අරය r හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{h}{4}$ දුරකින් ද

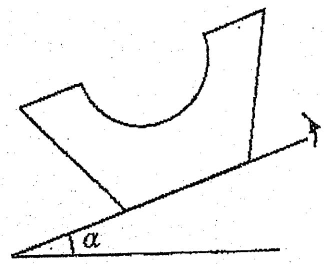
(ii) අරය r වන ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3r}{8}$ දුරකින් ද

පිහිටන බව පෙන්වන්න.



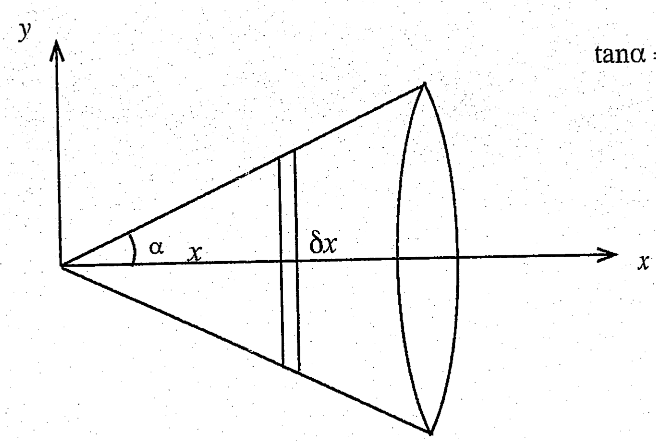
පතුලේ අරය $2a$ හා උස $4a$ වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුවක ඡින්නකයකින් ඝන අර්ධ ගෝලයක් ඉවත් කර සාදා ඇති S වංගෙඩියක් යාබද රූපයේ දැක්වේ. ඡින්නකයේ ඉහළ වෘත්තාකාර මුහුණතේ අරය හා කේන්ද්‍රය පිළිවෙළින් $2a$ හා O වන අතර පහළ වෘත්තාකාර මුහුණත සඳහා ඒවා පිළිවෙළින් a හා C වේ. ඡින්නකයේ උස $2a$ වේ. ඉවත් කළ ඝන අර්ධ ගෝලයෙහි අරය හා කේන්ද්‍රය පිළිවෙළින් a හා O වේ.

S වංගෙඩියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{41}{48}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



S වංගෙඩිය, එහි පහළ වෘත්තාකාර මුහුණත, තලය ස්පර්ශ කරමින් රළු තිරස් තලයක් මත තබා ඇත. දැන්, තලය සෙමෙන් උඩු අතට ඇල කරනු ලැබේ. වංගෙඩිය හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය 0.9 වේ. $\alpha < \tan^{-1}(0.9)$ නම්, වංගෙඩිය සමතුලිතතාවේ පවතින බව පෙන්වන්න; මෙහි α යනු තලයේ තිරසට ආනතිය වේ.

(i) ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්ත කේතුව



$\tan\alpha = \frac{r}{h}$

සමමිතියට අනුව ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$\delta m = \pi (x \tan\alpha)^2 \, \delta x \, \rho$, මෙහි ρ යනු ඝනත්වයයි.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi \tan^2\alpha \, \rho x^2 . \, x \, dx}{\int_0^h \pi \tan^2\alpha \, \rho x^2 \, dx} \quad \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix}$$

$$= \frac{\left. \frac{x^4}{4} \right|_0^h}{\left. \frac{x^3}{3} \right|_0^h} \quad \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix}$$

$$= \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4} .$$

$\therefore$ පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට දුර $= h - \frac{3h}{4}$

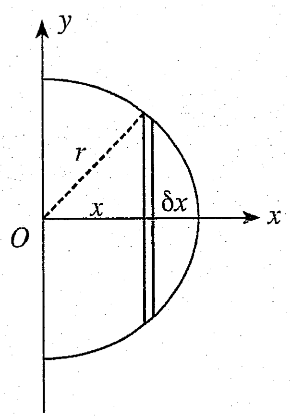
$$= \frac{h}{4} \quad 5$$

$\boxed{30}$

(i) <u>ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලය</u>

සමමිතිය අනුව ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$\delta m = \pi (r^2 - x^2) \, \delta x \, \sigma,$



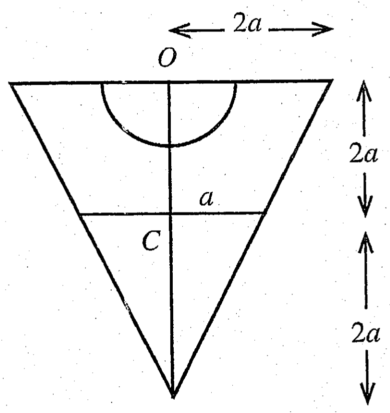
මෙහි σ යනු ඝනත්වයයි.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^r \pi (r^2 - x^2) \, \sigma x \, dx}{\int_0^r \pi (r^2 - x^2) \, \sigma \, dx} \quad \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix}$$

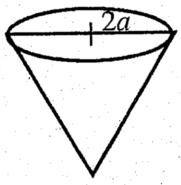
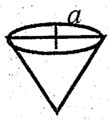
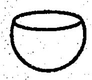
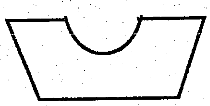
$$= \frac{\left. \left(\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \right|_0^r}{\left. \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^r} \quad \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix}$$

$$= \frac{\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}}{r^3 - \frac{r^3}{3}}$$

$$= \frac{3r}{8} \quad 5$$



ඝනත්වය σ

වස්තුව	ස්කන්ධය	O සිට දුර ↓
	$\frac{16}{3}\pi a^3\rho$ 5	a 5
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ 5	$\frac{5a}{2}$ 5
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ 5	$\frac{3a}{8}$ 5
	$4\pi a^3\rho$ 5	$\overline{x}$

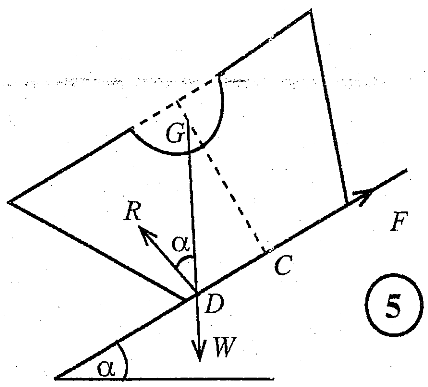
සමමිතිය අනුව ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

$$4\pi a^3\rho\,\overline{x} = \frac{16}{3}\pi a^3\rho a - \frac{2}{3}\pi a^3\rho\,\frac{5a}{2} - \frac{2}{3}\pi a^3\rho a\,\frac{3a}{8} \quad 20$$

$$4\overline{x} = \frac{16}{3}a - \frac{5a}{2} - \frac{a}{4}$$

$$\overline{x} = \frac{41a}{48} \quad 5$$

65



5

ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට	පෙරළීම වැළැක්වීමට
$\mu \geq \tan\alpha$	$CD < a$
$\therefore\ 0.9 \geq \tan\alpha$ 10	$\therefore\ CG \tan\alpha < a.$
එනම්, $\alpha \leq \tan^{-1}(0.9)$	එනම්, $\frac{55a}{48}\tan\alpha < a$ 10
	එනම්, $\alpha < \tan^{-1}\left(\frac{48}{55}\right)$

25

17. (*a*) එක්තරා කර්මාන්තශාලාවක අයිතමවලින් 50% ක් A යන්ත්‍රය නිපදවන අතර ඉතිරිය B හා C යන්ත්‍ර මගින් නිපදවනු ලැබේ. A, B හා C යන්ත්‍ර මගින් නිපදවනු ලබන අයිතමවලින් පිළිවෙළින් 1%, 3% හා 2% ක් දෝෂ සහිත බව දනිමු. සසම්භාවීව තෝරාගත් අයිතමයක් දෝෂ සහිත වීමේ සම්භාවිතාව 0.018 බව දී ඇත. B හා C යන්ත්‍ර මගින් නිපදවනු ලබන අයිතමවල ප්‍රතිශත සොයන්න.

සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් අයිතමයක් දෝෂ සහිත බව දී ඇති විට, එය A යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) එක්තරා කර්මාන්තශාලාවක සේවකයින් 100 දෙනකු තම නිවසේ සිට සේවා ස්ථානයට ගමන් කිරීමට ගනු ලබන කාලය (මිනිත්තුවලින්) පහත වගුවේ දී ඇත:

ගනු ලබන කාලය	සේවකයින් ගණන
0 – 20	10
20 – 40	30
40 – 60	40
60 – 80	10
80 – 100	10

ඉහත දී ඇති ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

පසුව, 80 – 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සිටි සියලු ම සේවකයින් කර්මාන්තශාලාව ආසන්නයේ පදිංචියට ගොස් ඇත. එයින්, 80 – 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය 10 සිට 0 දක්වා ද 0 – 20 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය 10 සිට 20 දක්වා ද වෙනස් විය.

නව ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

(*a*)

	A	B	C
නිෂ්පාදන සම්භාවිතාව	$\frac{1}{2}$	p	$\frac{1}{2} - p$
දෝෂ ඇතිවීමේ සම්භාවිතාව	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{2}{100}$

D – සම්භාවිතාව තෝරාගත් අයිතමයක් දෝෂ සහිත එකක් වීම

$$P(D) = P(D/A)\,P(A) + P(D/B)\,P(B) + P(D/C)\,P(C)$$

$$0.018 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{100} \times p + \frac{2}{100} \times \left(\frac{1}{2} - p\right) \quad 10$$

$$3.6 = 1 + 6p + 2 - 4p$$

$$\therefore p = 0.3 \quad 5$$

$\therefore$ B යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද භාණ්ඩවල ප්‍රතිශතය 30% 5

$\therefore$ C යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද භාණ්ඩවල ප්‍රතිශතය 20% 5

25

$$P(A/D) = \frac{P(D/A)\ P(A)}{P(D)} \quad 10$$

$$= \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{2}}{0.018} \quad 10$$

$$= \frac{1}{100 \times 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{18}{1000}}$$

$$= \frac{5}{18} \quad 5$$

25

ගන්නා කාලය	f	මධ්‍ය අගය x (5)	$y = \frac{1}{10}x$	y^2	fy (5)	fy^2 (5)
0 - 20	10	10	1	1	10	10
20 - 40	30	30	3	9	90	270
40 - 60	40	50	5	25	200	1000
60 - 80	10	70	7	49	70	490
80 - 100	10	90	9	81	90	810
	100				$\sum fy = 460$ (5)	$\sum fy^2 = 2580$ (5)

$$\mu_y = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{460}{100} = \frac{23}{5} \quad 5$$

හා

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum fy^2}{\sum f} - \mu_y^2$$

$$= \frac{2580}{100} - \left(\frac{23}{5}\right)^2 \quad 5$$

$$= \frac{116}{25}$$

$$\therefore \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{116}{25}} \quad 5$$

$$= \frac{2\sqrt{29}}{5}$$

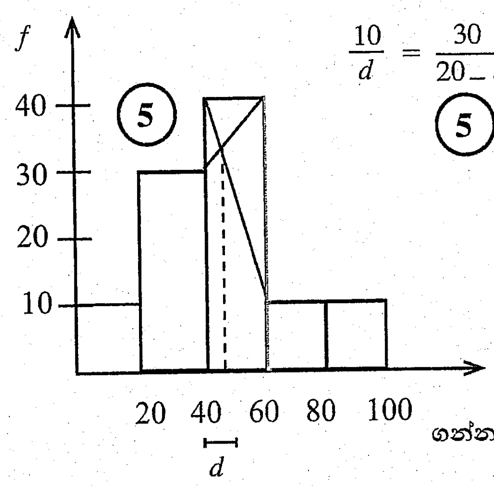
$\therefore$ මධ්‍යන්‍යය $\mu_x = 10\,\mu_y = 10 \times \dfrac{23}{5} = 46$ 5

$\therefore$ සම්මත අපගමනය $\sigma_x = 10\sigma_y = 10 \times \dfrac{2\sqrt{29}}{5} = 4\sqrt{29} \approx 21.54$ 5

මාතය

$\dfrac{10}{d} = \dfrac{30}{20-d} \Rightarrow d = 5 \quad \therefore$ මාතය $= 40 + d = 45$ 5

5



65

(b) නව ව්‍යාප්තිය සඳහා :

$$\mu_y = \frac{1}{100}\left[\sum_1^5 fy - f_1y_1 - f_5y_5 + 20\times 1\right]$$

$$= \frac{1}{100}[460 - 10 - 90 + 20] = \frac{380}{100}$$ 5

$$= \frac{19}{5}$$

$\therefore$ නව මධ්‍යන්‍යය $= 10 \times \dfrac{19}{5} = 38$ 5

$$\sigma_y^2 = \left[\sum_1^5 fy^2 - f_1y_1^2 - f_5y_5^2 + 20\times 1^2\right] - \left(\frac{19}{5}\right)^2$$

$$= \frac{1}{100}[2580 - 10 - 810 + 20] - \frac{361}{25}$$ 5

$$= \frac{1780}{100} - \frac{361}{25}$$

$$= \frac{84}{25}$$

$\therefore \quad \sigma_y = \dfrac{\sqrt{84}}{5} = \dfrac{2\sqrt{21}}{5}$ 5

$\therefore$ නව සම්මත අපගමනය $= 10 \times \dfrac{2\sqrt{21}}{5} = 4\sqrt{21} \approx 18.33$ 5

මාතය වෙනස් නොවේ. 10 ($\because$ මාත පන්තියේ දෙපස සංඛ්‍යාත වෙනස් නොවේ.)

$\boxed{35}$

පැරණි නිර්දේශය

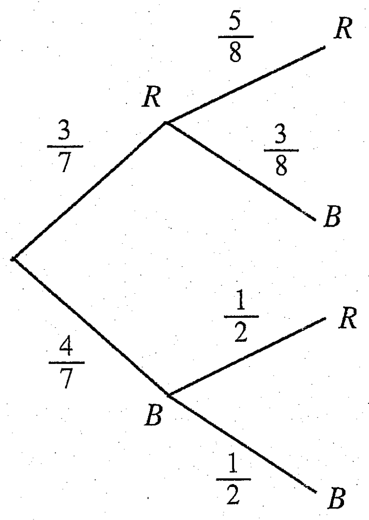
8. A බෑගයක රතු පාට බෝල 3 ක් හා කළු පාට බෝල 4 ක් ද තවත් B බෑගයක රතු පාට බෝල 4 ක් හා කළු පාට බෝල 3 ක් ඇත. A බෑගයේ හා B බෑගයේ ඇති බෝල, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සමාන වේ. A බෑගයෙන් සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගෙන B බෑගය තුළට දමනු ලැබේ. දැන්, B බෑගයෙන් සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) B බෑගයෙන් ඉවතට ගත් බෝලය කළු පාට එකක් වීමේ

(ii) A බෑගයෙන් ඉවතට ගත් බෝලය රතු පාට එකක් බව දී ඇති විට, B බෑගයෙන් ඉවතට ගත් බෝලය කළු පාට එකක් වීමේ

සම්භාවිතාව සොයන්න.

A	B
3 රතු	4 රතු
4 කළු	3 කළු



(i) $P(B$ ගෙන් ගත් බෝලය කළු පාට එකක් වීම$) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{56} + \frac{16}{56} = \frac{25}{56}$ 5 5 5

(ii) $P(B$ ගෙන් කළු $\mid A$ ගෙන් රතු$) = \dfrac{P(B \text{ ගෙන් කළු හා } A \text{ ගෙන් රතු})}{P(A \text{ ගෙන් රතු})}$

$$= \frac{\frac{3}{7} \times \frac{3}{8}}{\frac{3}{7}}$$

$$= \frac{3}{8}$$ 10

10. සංඛ්‍යානය ප්‍රශ්න පත්‍රයකට පන්තියක සිටින සිසුන් විසින් ලබාගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් 40 හා 15 වේ. $t = \frac{1}{3}(70 + 2x)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් මෙම ලකුණු පරිණාමනය කර ඇත; මෙහි x යනු මුල් ලකුණයි. පරිණාමනය කරන ලද ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.
පරිණාමිත ලකුණුවල මධ්‍යස්ථය 55 වේ. මුල් ලකුණුවල මධ්‍යස්ථය සොයන්න.

$$\mu_t = \frac{1}{3}(70 + 2\mu_0) = \frac{1}{3}(70 + 80) = 50 \quad 5$$

5

$$\sigma_t = \frac{2}{3}\ \sigma_0 = \frac{2}{3} \times 15 = 10 \quad 5$$

$$M_t = \frac{1}{3}(70 + 2M_0) \quad 5$$

$$55 = \frac{1}{3}(70 + 2M_0)$$

$$M_0 = \frac{95}{2} = 47.5$$

5

25