අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2022 (2023)

10 සංයුක්ත ගණිතය I

ලකුණු බෙදී යාමේ ආකාරය

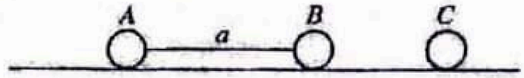
I පත්‍රය

A කොටස	**10 x 25**	**=**	**250**
B කොටස	**05 x 150**	**=**	**750**

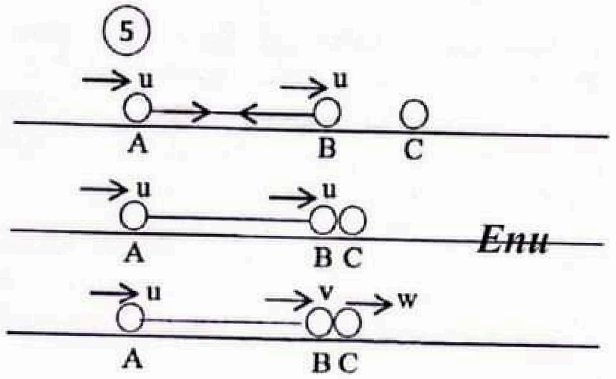
එකතුව $= \dfrac{1000}{10}$

II පත්‍රය අවසාන ලකුණු = 100

1. එක එකක ස්කන්ධය m වූ A, B හා C අංශු තුනක් සුමට තිරස් මේසයක් මත සරල රේඛාවක A හා B එකිනෙකට a දුරින්, දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් යා කර රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි තබා ඇත.



B අංශුවට $\overrightarrow{AB}$ දිශාවට ආවේගයක් දෙනු ලබන්නේ ආවේගයෙන් මොහොතකට පසුව B හි ප්‍රවේගය u වන පරිදි ය. C සමග ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු, B හි ප්‍රවේගය $\overrightarrow{AB}$ දිශාවට $\frac{1}{2}(1-e)u$ බව පෙන්වන්න; මෙහි e යනු B හා C අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය වේ.
මෙම ගැටුමෙන් පසුව, A ට B සමග ගැටීම සඳහා ගතවන කාලය ද සොයන්න.



පෙර $\xrightarrow{} u_1$ $\xrightarrow{} u_2$
(A) (B).
පසු $\xrightarrow{} v_1$ $\xrightarrow{} v_2$.
$v_2 - v_1 = e(u_1 - u_2)$

A සහ C සඳහා $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්,

$$\rightarrow \quad 0 = mv + mw - mu \quad \cancel{5}$$

$$\therefore v + w = u \quad \text{.............} \quad (1) \quad 5$$

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමය යෙදීමෙන්,

$$w - v = eu \quad \text{.............} \quad (2) \quad 5$$

$\rightarrow -w - v = eu.$
$w + v = -eu.$

$$(1) - (2) : 2v = u - eu$$

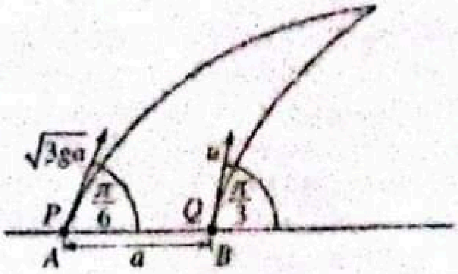
$$\therefore v = \frac{1}{2}(1-e)u \quad 5$$

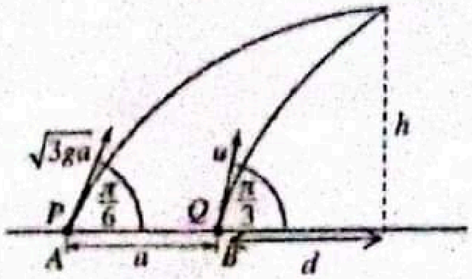
$$\text{අවශ්‍ය කාලය} \quad = \frac{a}{u-v}$$

$$= \frac{2a}{(1+e)u} \,. \quad 5$$

$V_{A,B} = u - v.$

2. A හා B යනු තිරස් පොළොවක් මත AB = a වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. P හා Q අංශු දෙකක් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍යවලින් එකම මොහොතේදී AB රේඛාව අඩංගු සිරස් තලයෙහි ප්‍රක්ෂේප කරනු ලබන්නේ T කාලයකට පසු අවකාශයේ වූ ලක්ෂ්‍යයකදී ඒවා එකිනෙක ගැටෙන පරිදි ය. P හා Q හි ආරම්භක ප්‍රවේග රූපයෙහි දී ඇත.
$u = \sqrt{ga}$ බව පෙන්වා, T යන්න a හා g ඇසුරෙන් සොයන්න.





$s = ut + \frac{1}{2}at^2$:

P ↑ $h = \sqrt{3ga} \cdot \frac{1}{2} T - \frac{1}{2}gT^2$ .... (1) (5)

Q ↑ $h = u \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot T - \frac{1}{2}gT^2$ ...Enu... (2) (5)

(1) − (2) : $u\frac{\sqrt{3}}{2}T = \sqrt{3ga} \cdot \frac{1}{2}T$ (5)

$\Rightarrow u = \sqrt{ga}$

P $\longrightarrow$ $a + d = \sqrt{3ga}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,T$ — (3)

(5) (for both)

Q $\longrightarrow$ $d = \sqrt{ag} \cdot \frac{1}{2} \cdot T$ — (4)

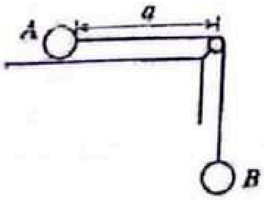
(3)−(4) ⇒ $\therefore a + \frac{\sqrt{ag}}{2}T = 3\frac{\sqrt{ag}}{2}T$

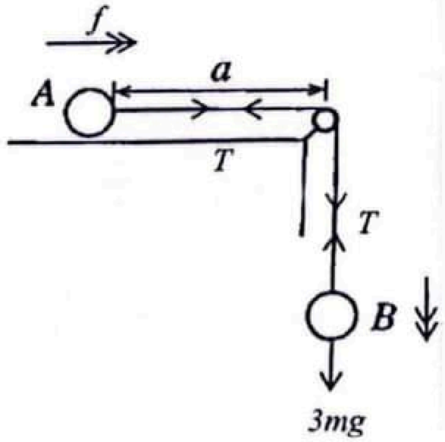
$\Rightarrow a = 2\frac{\sqrt{ag}}{2}T$

$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{a}{g}}$ (5)

25

3. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $3m$ වූ A හා B අංශු දෙකක් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක කෙළවරවලට ඈඳා ඇත. A අංශුව තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලතාවයේ අල්වා තබා ඇති අතර මේසයේ දාරයට සවි කළ කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් තන්තුව දමා ඇත. B අංශුව කප්පියට සිරස්ව පහළින් එල්ලෙයි. A අංශුව කප්පියේ සිට a දුරකින් ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. පසුව එන චලිතයේදී A මත විශාලත්වය $\frac{1}{2}mg$ වූ නියත ඝර්ෂණ බලයක් ක්‍රියාකරයි.
A හි ත්වරණය සොයන්න.
A කප්පියට ළඟාවන විට A හි වේගය ද සොයන්න.





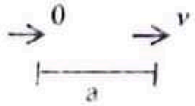
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$B \;:\; \downarrow 3mg - T = 3mf$ ....(1) 5

$A \;:\; \rightarrow T - \frac{1}{2}mg = mf$ ......(2) 5

$(1)-(2):\quad \frac{5}{2}mg = 4mf$

$$f = \frac{5}{8}g \quad 5$$



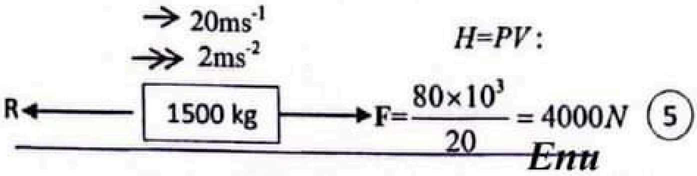
$v^2 = u^2 + 2as:$

$$v^2 = 2fa. \quad 5$$

$$\therefore v^2 = 2\times\frac{\sqrt{5ag}}{8}.$$

$$\therefore v = \frac{\sqrt{5ag}}{2}. \quad 5$$

4. ස්කන්ධය 1500 kg වූ කාරයක් 80 kW නියත ජවයකින් ක්‍රියා කරමින් නියත ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව තිරස් මාර්ගයක් මත චලනය වේ. කාරය 20 m s^{-1} වේගයකින් චලනය වන විට එහි ත්වරණය 2 m s^{-2} වේ. කාරය, තිරසට $\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ ක ආනතියක් සහිත මාර්ගයක් දිගේ ඉහළට 8 m s^{-1} වේගයකින් එම නියත ජවයෙන්ම ක්‍රියා කරමින් එම නියත ප්‍රතිරෝධයටම එරෙහිව චලනය වන විට එහි ත්වරණය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.



$\vec{F} = m\vec{a}$: $\rightarrow 4000 - R = 1500 \times 2$ (5)

$\therefore R = 1000\text{N}$

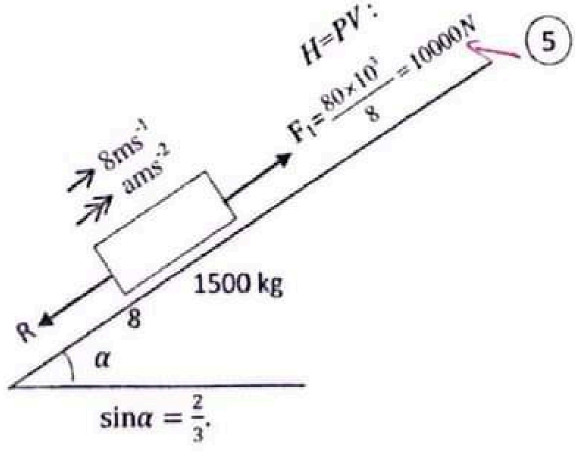
F = ma : or

$10000 - 1000 - 1500 \times \frac{2}{3}g = 1500a$ (10) 05

(PV)

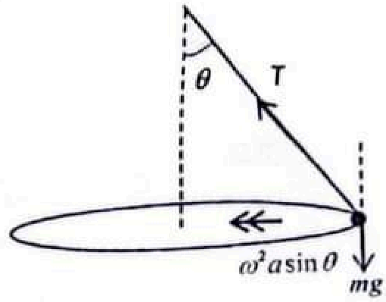
$9000 - 1000g = 1500a$ 05

$3a = 18 - 2g$



5. දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. අංශුව ω නියත කෝණික වේගයකින් තිරස් වෘත්තයක චලනය වේ. තන්තුව යටි අත් සිරස සමග $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදයි. $\omega>\sqrt{\frac{g}{a}}$ බව පෙන්වන්න.

$$\vec{F}=m\vec{a}$$



$\uparrow \; T\cos\theta = mg$ ....(1) 5

$\leftarrow T\sin\theta = m\omega^2 a\sin\theta$ --Enu--(2) 5

$\therefore T = m\omega^2 a$

(1) හා (2) : $\Rightarrow \; \cos\theta = \dfrac{g}{\omega^2 a}$ 5

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, බැවින් $\cos\theta<1$. 5

$\therefore \dfrac{g}{\omega^2 a}<1.$

$\therefore \omega > \sqrt{\dfrac{g}{a}}$ 5

6. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $3i + 2j$ හා $2i + 4j$ වේ. O, A හා B ඒක රේඛීය නොවන බව පෙන්වන්න. C යනු $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{OA}$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. i, j හා λ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{OC}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $B\hat{O}C = \frac{\pi}{2}$ නම් $\lambda = -\frac{10}{7}$ බව පෙන්වන්න.

$3:2 \neq 2:4$, එබැවින් O, A හා B ඒක රේඛීය නොවේ. (5)

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \quad (5)$$

$$= 2i + 4j + \lambda(3i + 2j)$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = (2 + 3\lambda)i + (4 + 2\lambda)j \quad (5)$$

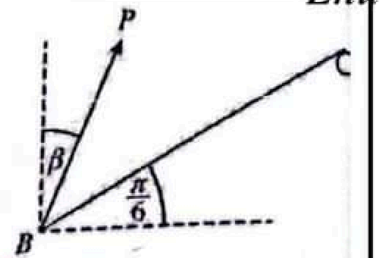
$$B\hat{O}C = \frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0.$$

$$\therefore (2i + 4j) \cdot \left((2 + 3\lambda)i + (4 + 2\lambda)j\right) = 0. \quad (5)$$

$$\therefore 4 + 6\lambda + 16 + 8\lambda = 0.$$

$$\therefore \lambda = \frac{-10}{7}. \quad (5)$$

7. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, AB ඒකාකාර දණ්ඩක් එහි ඉහළ කෙළවර A සුමට නාදැත්තක් මත රඳවා සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ එහි පහළ කෙළවර B ට, සිරස සමග β කෝණයක් සාදන, P බලයක් යෙදීමෙනි. දණ්ඩ තිරස සමග $\frac{\pi}{6}$ කෝණයක් සාදයි. $\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}$ බව පෙන්වන්න.



$$\triangle BMN;\ BM = a\cos\frac{\pi}{6} = a\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 5$$

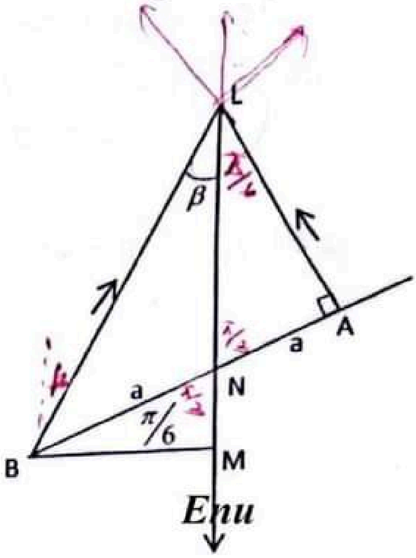
$$MN = a\sin\frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} \quad 5$$

$$\triangle ALN;\ LN = \frac{a}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2a \quad 5$$

$$\therefore LM = 2a + \frac{a}{2} = \frac{5a}{2}. \quad 5$$

$$\triangle BLM;\ \tan\beta = \frac{BM}{LM} = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{5\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}. \quad 5$$

$$\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$



$(1+1)\cot 60 = 1\cdot\cot\beta - 1\cot$

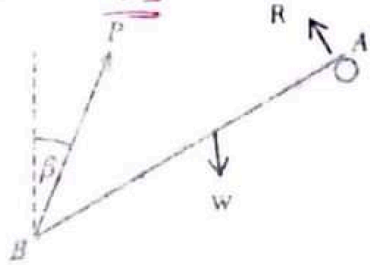
$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\tan\beta} - \sqrt{3}$

$\tan\beta = \sqrt{3}/5$

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$5$$

$$B \circlearrowleft \quad W a \cos\frac{\pi}{6} = R.(2a) \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}W}{4}.$$



$$\uparrow \quad P\cos\beta + R\cos\frac{\pi}{6} = W \quad 5$$

$$P\cos\beta = W - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}W}{2} = \frac{5W}{8} \quad 5$$

$$\rightarrow \quad P\sin\beta = R\sin\frac{\pi}{6} \quad 5$$

$$= \frac{\sqrt{3}W}{4}\left(\frac{1}{2}\right)$$

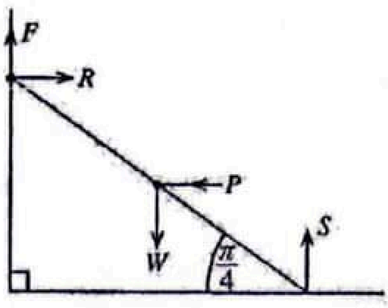
$$= \frac{\sqrt{3}W}{8}$$

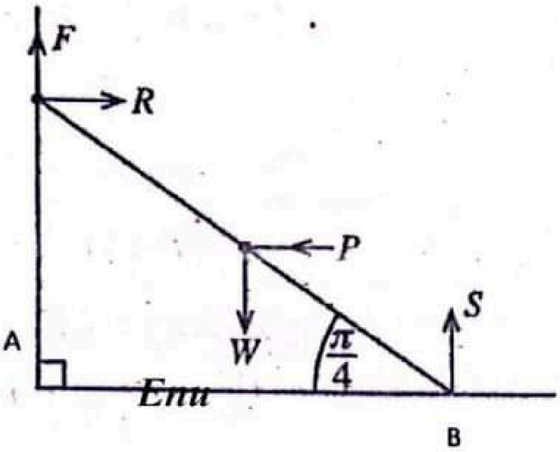
$$\therefore \tan\beta = \frac{\sqrt{3}W}{8} \div \frac{5W}{8} = \frac{\sqrt{3}}{5} \quad 5$$

cot සූත්‍රය යෙදීමට

25

8. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, බර W හා දිග $2a$ වූ ඒකාකාර ඉණිමගක් රළු සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව එහි පහළ කෙළවර සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත ඇතිව සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ ඉණිමගේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේදී යෙදූ විශාලත්වය P වූ තිරස් බලයක් මගිනි. ඉණිමග ගෙබිම සමග $\frac{\pi}{4}$ ක කෝණයක් සාදයි. ඉණිමග හා බිත්තිය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{6}$ වේ. $\frac{3W}{4} \le P \le \frac{3W}{2}$ බව පෙන්වන්න.





$\uparrow \quad F + S = W$ (5)

$\leftarrow \quad P = R$ (5)

$A\circlearrowleft \quad W a \cos\frac{\pi}{4} + P \cdot a \cdot \sin\frac{\pi}{4} - S \cdot 2a\cos\frac{\pi}{4} = 0$ (5)

(B වටා ඝූර්ණ ගැනීම නිවැරදි නම් (10) ක් දෙන්න)

$\therefore \quad S = \frac{W+P}{2},$

$F = \frac{W-P}{2}.$

$\frac{1}{6} \ge \frac{|F|}{R}$

$\mu \ge \frac{|F|}{R}$ සම්බන්ධය ලියා ඇත්නම් - (05)

$\Rightarrow -\frac{1}{6} \le \frac{W-P}{2P} \le \frac{1}{6}$

නැත

$\Rightarrow -P \le 3(W-P) \le P$

$\Rightarrow \frac{3W}{4} \le P \le \frac{3W}{2}.$ (10)

මාපාංකය සලකා නැතිනම් - (05)

25

Enu

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. $P(A)=\frac{2}{7}$, $P(A\cup B)=\frac{11}{14}$ හා $P(A'\cup B')=\frac{4}{5}$ බව දී ඇත. $P(B)$ සොයා A හා B ස්වායත්ත සිද්ධි බව පෙන්වන්න.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad 5$$

$$\Rightarrow \frac{11}{14}=\frac{2}{7}+P(B)-\frac{1}{5}.$$

$$\therefore P(B)=\frac{7}{10}. \quad 5$$

$$P(A\cap B)=1-P(A'\cup B') \ 5 \ =\frac{1}{5} \quad 5$$

$$\mathrm{P(A)P(B)}=\frac{2}{7}\times\frac{7}{10}=\frac{1}{5}=P(A\cap B). \quad 5$$

Enu

$\therefore A$ හා B ස්වායත්ත වේ.

$p(A'\cup B')=P(A\cap B)'$
$=1-P(A\cap B$
$\frac{4}{5}=1-P(A\cap B)$
$P(A\cap B)=1/5$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A$
$\frac{11}{14}=\frac{2}{7}+P(B)-1/5$
$P(B)=7/10$
$P(A)\ P(B)=1/5$

25

10. සිසුන් 100 දෙනෙකු පරීක්ෂණයකදී ලබාගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය, පිළිවෙළින් 60 හා 20 වේ. මෙම පරීක්ෂණය සඳහා ලකුණු 56 ක් ලබාගත් සිසුවෙකුගේ z-ලකුණ සොයන්න. මෙම 56 ලකුණ වැරදි ලෙස ඇතුළත් කර ඇති බවත් එය, ඒ වෙනුවට 65 ක් විය යුතු බවත් පසුව සොයා ගන්නා ලදී. මෙම පරීක්ෂණය සඳහා ලබාගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යයේ නිවැරදි අගය සොයන්න.

(පු) ✓ → 5

$$z=\frac{56-60}{20}=\frac{-4}{20}=\frac{-1}{5}=-0.2 \quad 5$$

$$60=\mu_{old}=\frac{\sum_{i=1}^{100}x_i}{100} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{100}x_i\right)_{old}=6000 \quad 5$$

$$\therefore \mu_{correct}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{100}x_i\right)_{correct}}{100}=\frac{6000-56+65}{100} \ 5 \ =\frac{6009}{100}=60.09 \quad 5$$

$\sum x_{i} = 60\times 100-56+65$
$\bar{x} = 60+\frac{9}{100}=60+0.09$
$\bar{x} = 60.09$

25

Enu

11. (*a*) සෘජු තිරස් මාර්ගයක වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට නිශ්චලතාවයෙන් ගමන ආරම්භ කරන P කාරය $2f$ m s^{-2} ක නියත ත්වරණයකින් එම මාර්ගයේ වූ A ලක්ෂ්‍යය දක්වා ගමන් කරයි; මෙහි $OA = a$ m වේ. එය A හිදී ලබාගත් ප්‍රවේගය, ගමනේ ඉතිරි කොටස පුරාවටම පවත්වා ගනී. P කාරය A ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වන මොහොතේ, තවත් Q කාරයක් එම මාර්ගයේම එම දිශාවටම O ලක්ෂ්‍යයේ සිට නිශ්චලතාවයෙන් ගමන ආරම්භ කර, f m s^{-2} ක නියත ත්වරණයකින් චලනය වේ. එකම රූපයක, P හා Q හි චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින්, P හා Q හි ප්‍රවේග සමාන වන මොහොත දක්වා Q ගන්නා ලද කාලය $2\sqrt{\frac{a}{f}}$ s බව පෙන්වන්න.

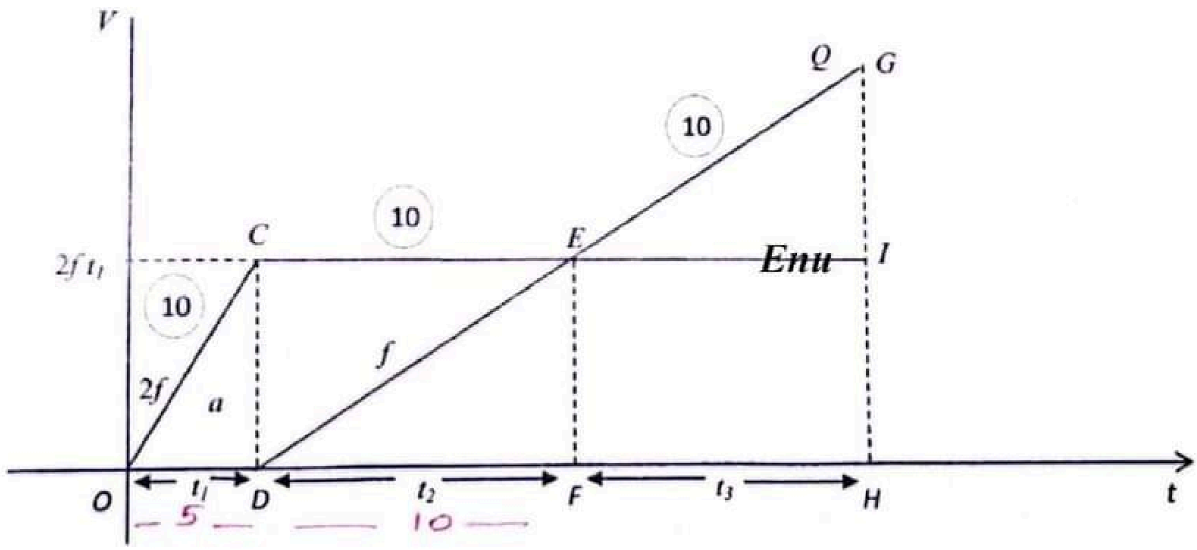
දැන්, $a = 50$ ද $f = 2$ ද හා Q කාරය P කාරය පසු කරන මාර්ගයේ ලක්ෂ්‍යය B යැයි ද ගනිමු.

$AB = 50\left(5+2\sqrt{6}\right)$ m බව පෙන්වන්න.

(*b*) P නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව 60 m s^{-1} ක ඒකාකාර වේගයකින් දකුණු දෙසට යාත්‍රා කරන අතර, Q නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව $30\sqrt{3}$ m s^{-1} ක ඒකාකාර වේගයකින් නැගෙනහිර දෙසට යාත්‍රා කරයි. තෙවන R නැවක්, එය P හි සිට නිරීක්ෂණය කරනු ලැබූ විට, නැගෙනහිරින් $30°$ ක් උතුරට වූ දිශාවට චලනය වන ලෙස පෙනෙන අතර, R නැව එය Q හි සිට නිරීක්ෂණය කරනු ලැබූ විට දකුණු දෙසට චලනය වන ලෙස පෙනෙයි. R නැව, පොළොවට සාපේක්ෂව, 60 m s^{-1} ක වේගයකින් නැගෙනහිරින් $30°$ ක් දකුණට වූ දිශාවට චලනය වන බව පෙන්වන්න.

ආරම්භයේදී R නැව, P ගෙන් 24 km ක් ඈතින්, බටහිරින් $60°$ ක් දකුණට වූ දිශාවෙන් තිබෙන අතර Q ගෙන් 6 km ක් ඈතින් බටහිර දිශාවෙන් තිබේ යැයි සිතමු. P හා R, ඒවා අතර කෙටිම දුරින් පිහිටන විට Q හා R අතර දුර 12 km ක් බව පෙන්වන්න.

(*a*)



30

Enu

Δ OCD :

$$\frac{1}{2}(t_1)(2f\,t_1)=a \quad 5$$

$$\Rightarrow \quad t_1^2=\frac{a}{f}$$

$$\therefore \quad t_1=\sqrt{\frac{a}{f}} \quad as\ \ t_1>0. \quad 5$$

Δ DEF :

$$f=\frac{2f\,t_1}{t_2}. \quad 5$$

$$\therefore t_2=2t_1.$$

$$=2\sqrt{\frac{a}{f}} \quad 5$$

20

Enu

$$a=50, \quad f=2.$$

$$t_1=\sqrt{\frac{50}{2}}=5 \qquad t_2=10. \quad 5$$

area of $OCED$ = area of EGI.

$$\therefore \frac{1}{2}(5+10)(2\cdot 2\cdot 5)=\frac{1}{2}+3\cdot 2t_3 \quad 5$$

$$t_3^2=150$$

$$t_3=\sqrt{150}=5\sqrt{6}. \quad 5$$

15

$$AB=\frac{1}{2}(t_2+t_3)(2f\,t_1+f\,t_3) \quad 5$$

$$=\frac{1}{2}\left(10+5\sqrt{6}\right)\left(5\times 2+5\sqrt{6}\right)\cdot(2)=50\left(5+5\sqrt{6}\right) \quad 5$$

10

Enu

(b)

$$\left.\begin{aligned} \underline{V}(P,E) &= \downarrow 60 \\ \underline{V}(Q,E) &= \rightarrow 30\sqrt{3} \\ \underline{V}(R,P) &= \swarrow\!\!\nearrow 30^0 \\ \underline{V}(R,Q) &= \downarrow \end{aligned}\right] \quad 10$$

මනසාර - 05

රූපයේ ලකුණු කර ඇතිනම් 10

$$\underline{V}(R,E) = \underline{V}(R,P) + \underline{V}(P,E)$$

$$= \underline{V}(P,E) + \underline{V}(R,P)$$

$$= \underline{V}(R,P) + \underline{V}(P,E)$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

ΔABC 15

$$= \overrightarrow{AC}.$$

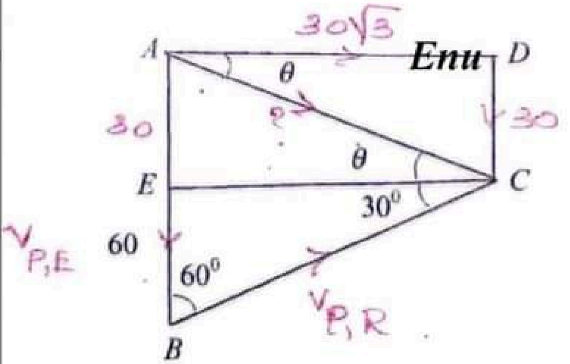
$$\underline{V}(R,E) = \underline{V}(R,Q) + \underline{V}(Q,E)$$

$$= \underline{V}(Q,E) + \underline{V}(R,Q)$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

ΔADC 15

$$= \overrightarrow{AC}$$



$$BE = 30\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= 30.$$

$$\therefore AE = 30.$$

$$CE = 30\sqrt{3}.$$

$$\tan\theta = \frac{AE}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

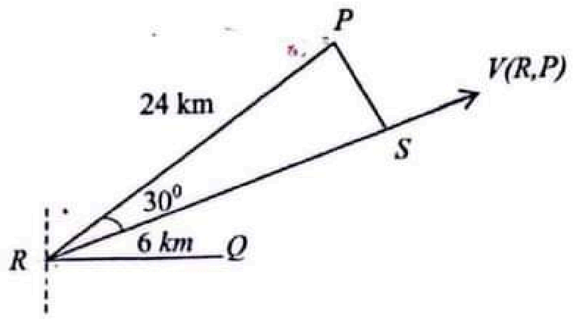
$$\therefore \theta = 30^0 \quad 5$$

$$V^2 = \left(30\sqrt{3}\right)^2 + 30^2 \quad (5)$$

$$V^2 = 30^2(4)$$

$$\therefore V = 60\text{ms}^{-1} \quad (5)$$

60



$$RS = 24000\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 12000\sqrt{3}$$

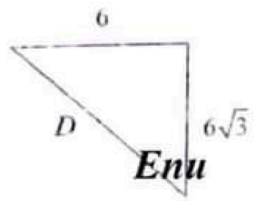
$$t = \frac{12000\sqrt{3}}{60}$$

$$= 200\sqrt{3}\ \text{S} \quad (5)$$

Let $d = 30 \times 200\sqrt{3} = 6000\sqrt{3}$

$$= 6\sqrt{3}km \quad (5)$$

∴ අවශ්‍ය දුර D km දෙනු ලබන්නේ



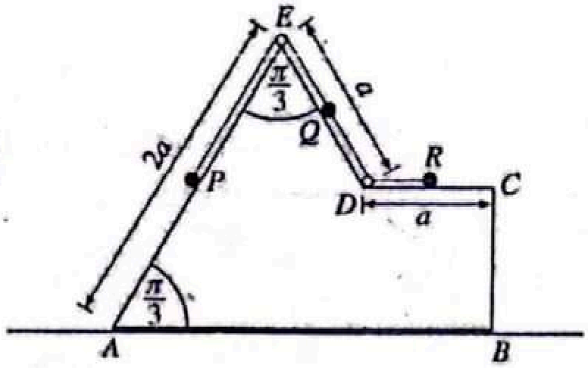
$$D^2 = 6^2 + 6^2(3).$$

$$= 6^2(4)$$

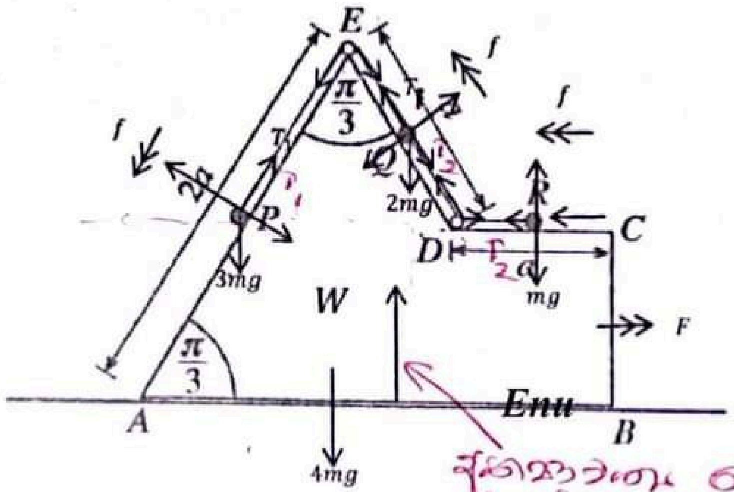
$$\therefore D = 12\text{ km.} \quad (5)$$

---

12. (*a*) ස්කන්ධය $4m$ වූ සුමට ඒකාකාර කුට්ටියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා වූ $ABCDE$ සිරස් හරස්කඩ රූපයෙහි පෙන්වා ඇත. AB අඩංගු මුහුණත සුමට සිරස් ගෙබිමක් මත තබා ඇත. AE හා ED ඒවා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. තවද, $AE = 2a$, $ED = a$, $DC = a$ හා $E\hat{A}B = A\hat{E}D = \frac{\pi}{3}$ වේ. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් $3m, 2m$ හා m වන P, Q හා R අංශු තුනක් AE, ED හා DC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන්හි තබා ඇත. P හා Q අංශු, E හිදී කුට්ටියට සවිකර ඇති සුමට සැහැල්ලු කුඩා කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා ඇති අතර, Q හා R අංශු, D හිදී කුට්ටියට සවිකර ඇති සුමට සැහැල්ලු කුඩා මුද්දක් තුළින් යන තවත් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පිහිටුමේදී තන්තුව තදව තිබෙන අතර මෙම පිහිටුමේ සිට පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Q අංශුව E වෙත ළඟා වීමට ගන්නා කාලය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.



(*a*)



(10) for the forces.

අභ්‍යන්තර බල. (R_1, R_2)

$\vec{V}(W,E) = \rightarrow F$

$\vec{V}(P,W) = \swarrow f.$

එවිට $\vec{V}(Q,W) = \nwarrow f$ (5)

$\vec{V}(R,W) = \leftarrow f$ (5)

F_1, F_2 ත්වරණ [illegible]

$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a}$:

$P: \swarrow 3mg\cos\frac{\pi}{6} - T_1 = 3m(f - F\cos\frac{\pi}{3})$ (15)

[illegible]

$Q: \nwarrow T_1 - T_2 - 2mg\cos\frac{\pi}{6} = 2m(f - F\cos\frac{\pi}{3})$ (15)

$R: \leftarrow T_2 = m(f - F)$ (10)

එකම T නම් 05ක් අඩු කරන්න.

පද්ධතියට

$\rightarrow$

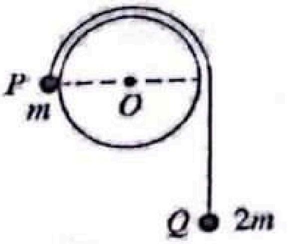
$$0 = 4mF + m(F - f) + 2m(F - f\cos\frac{\pi}{3}) + 3m(F - f\cos\frac{\pi}{3})$$ 20

Q: $\nwarrow s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

$\Rightarrow \quad \frac{a}{2} = \frac{1}{2}ft^2.$ 10 or

90

(b) අරය a වූ සිලින්ඩරයක් එහි අක්ෂය තිරස්ව සවි කර ඇති අතර එහි අක්ෂයට ලම්බක සිරස් හරස්කඩක් යාබද රූපයෙන් දැක්වේ. සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් යා කළ ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $2m$ වූ P හා Q අංශු දෙකක් තන්තුව තදව ද OP තිරස්ව ද ඇතිව රූපයේ පෙන්වා ඇති පිහිටුමෙහි අල්වා තබා නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Q අංශුව සිරස්ව පහළට චලනය වන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, $\overrightarrow{OP}$ යන්න θ $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{6})$ කෝණයකින් හැරුණු විට P හි වේගය v යන්න $v^2 = \frac{2ga}{3}(2\theta - \sin\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.



$\theta = \frac{\pi}{6}$ විට තන්තුව කපා දමන අතර, P අංශුව සිලින්ඩරය මත චලනය වෙමින් සිලින්ඩරයේ ඉහළම ලක්ෂයට ළඟා වීමට පෙර ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පත් වන බව දී ඇත. පසුව එන චලිතයේදී, P එහි ආරම්භක පිහිටුමේ සිට a දුරක් සිරස්ව පහළින් වන විට, P හි වේගය සොයන්න.

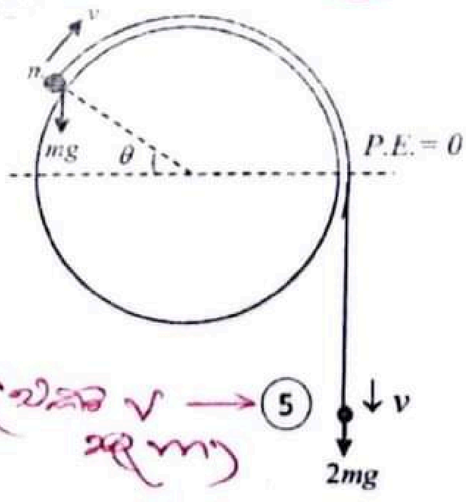
(b) ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්,

05 05 05 05

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}2mv^2 + mga\sin\theta - 2ma\theta g = 0.$$ 25 05

$$\Rightarrow 3v^2 = 2ag(2\theta - \sin\theta)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2ag}{3}(2\theta - \sin\theta).$$ 5

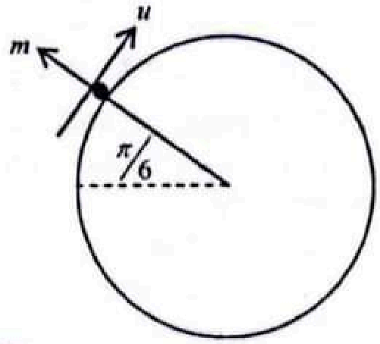


5

35

$v = u$ when $\theta = \frac{\pi}{6}$ is given by $u^2 = \frac{2ag}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\right)$. 10

$= \frac{ag}{9}(2\pi - 3).$



ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්,

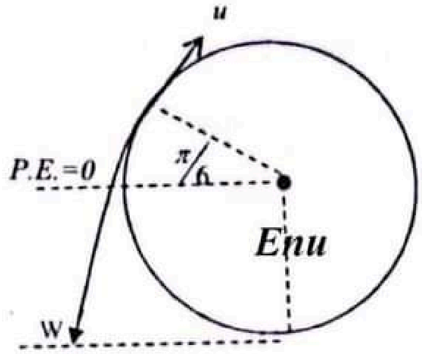
$$\frac{1}{2}mw^2 - mga = mg\frac{a}{2} + \frac{1}{2}mu^2$$ 10 or 00

$$\frac{1}{2}mw^2 = \frac{3mga}{2} + \frac{1}{2}m\frac{ag}{9}(2\pi - 3)$$

$$\frac{1}{2}mw^2 = \frac{1}{2}mag\left[3 - \frac{1}{3} + \frac{2\pi}{9}\right]$$

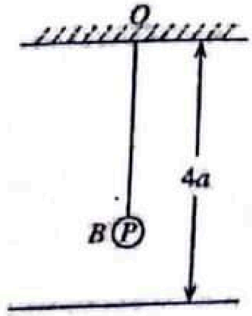
$$w^2 = ag\left[\frac{8}{3} + \frac{2\pi}{9}\right] = \frac{ag}{9}[24 + 2\pi]$$

$$w = \frac{\sqrt{2ga(\pi + 12)}}{3}.$$ 5



25

13. ස්වභාවික දිග $2a$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $2mg$ වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක්, සුමට තිරස් ගෙබිමකට $4a$ දුරක් ඉහළින් වූ O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද, අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. P අංශුව B හි සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. තන්තුවේ විතතිය a බව පෙන්වන්න.



දැන්, P හට mv ආවේගයක් සිරස්ව පහළට දෙනු ලැබේ. P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{a}}$ හා $BP=x$ වේ.

c විස්තාරය වන, $\dot{x}^2=\omega^2(c^2-x^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් $v>\sqrt{ag}$ නම්, P ගෙබිමේ වදින බව පෙන්වන්න;

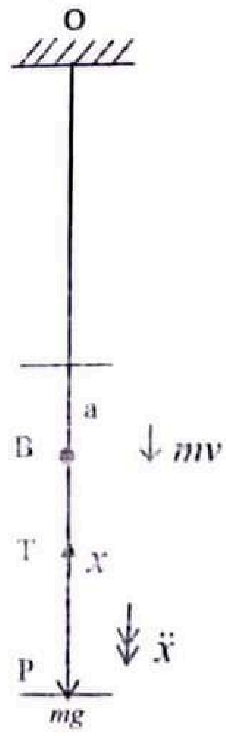
දැන්, $v=3\sqrt{ag}$ යැයි සිතමු.

P ගෙබිමේ වදින ප්‍රවේගය සොයන්න.

P සහ ගෙබිම අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. $e<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ නම්, P අංශුව O ට ළඟා නොවන බව පෙන්වන්න.

$e=\dfrac{1}{2}$ බව දී ඇති විට, තන්තුව පළමුවරට බුරුල් වන විට P හි ප්‍රවේගය සොයන්න.

B හිදී P ට ආවේගය දුන් මොහොතේ සිට, එය පළමුවරට ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පැමිණීමට ගතවන මුළු කාලය සොයන්න.



සමතුලිත පිහිටුවීමේදී

$$2mg\cdot\frac{x}{2a}=mg. \quad (5)$$

$$\therefore\ x=a. \quad (5)$$

$\boxed{10}$

$\underline{F}=m\underline{a}$:

$$\downarrow m\ddot{x}=mg-2mg\frac{(a+x)}{2a} \quad (15) \quad 08 \quad 00$$

$$\ddot{x}=-\frac{g}{a}x \quad (5)$$

$$\therefore\ \ddot{x}+\omega^2x=0,\ \text{where}\ \ \omega=\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

$\boxed{20}$

$\dot{x} = v$ when $x = 0$

$\therefore v^2 = \omega^2(c^2 - 0)$ (5)

$\therefore v = c\omega$

$\therefore c = \dfrac{v}{\omega}$. (5)

$v \geq \sqrt{ag}$ $c > \sqrt{ag} \cdot \sqrt{\dfrac{a}{g}} = a$ නම් වේ. (10)

$\therefore$ අංශුව බිමෙහි ගැටේ.

20

$x = a$ විට $\dot{x} = u$ යැයි ගනිමු (5)

$u^2 = \dfrac{g}{a}(9a^2 - a^2) = 8ag$, $\because$ $c = \dfrac{v}{w} = 3a$. (10)

10

$\therefore u = \sqrt{8ag}$. (5)

05

20

පොළවේ ගැටීමෙන් මොහොතකට පසු P හි ප්‍රවේගය $= eu \uparrow$. (5)

$\therefore \dot{x} = eu$, when $x = a$.

ස.අ.ච. හි කේන්ද්‍රය වටා සමමිතියෙන් $x = -a$ විට $\dot{x} = eu$. (15)

ගුරුත්වය යටතේ චලිතය සඳහා $v^2 = u^2 + 2as$:

$\uparrow 0 = v_1^2 - 2gs$ (5)

$\therefore s = \dfrac{8e^2ag}{2g} = 4e^2a$ (5)

$e < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ නම් $s < 2a$ බැවින් P, O ට ළඟා නොවේ. (10)

$\dot{x} = 2\sqrt{2ga}$

$\frac{1}{2}m(2e\sqrt{2ga})^2 + \frac{1}{2}2mg$

$= mgh$

$h = 2a(2e^2 + 1)$

$h < 4a$

$2a(2e^2+1) < 4a$

$e^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow e < \frac{1}{\sqrt{2}}$

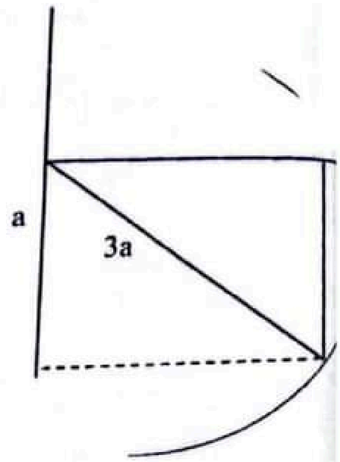
40

$e = \frac{1}{2}$ විට $v_1 = \sqrt{8e^2ag} = \sqrt{2ag}$ (10)

10

බිමෙහි ගැටීමට ගතවන කාලය $T_1 = \dfrac{\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{g}{a}}}$ 10

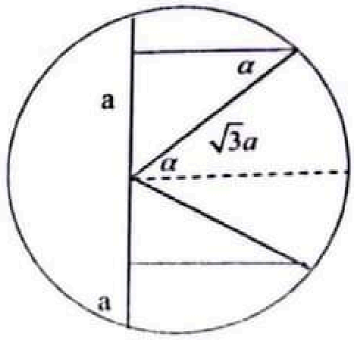
$= \sqrt{\dfrac{a}{g}}\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$



$e = \dfrac{1}{2}$ යැයි ගනිමු. එවිට $C_1 = \sqrt{3}a.$

ස්වභාවික දිගට ඒමට ගතවන කාලය

$T_2 = \dfrac{2\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\frac{g}{a}}}.$ 10



ගුරුත්වය යටතේ චලිතයට : $\uparrow\ V = u + at.$

$T_3 = \dfrac{\sqrt{2ag}}{g} = \sqrt{\dfrac{2a}{g}}$ 5

ගතවුන මුළු කාලය $T_1+T_2+T_3 = \sqrt{\dfrac{a}{g}}\left(\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{2}\right).$ 5

30

14. (*a*) A, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය හතරක පිහිටුම් දෛශික, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙළින් $\mathbf{a}, \mathbf{b}, 3\mathbf{a}$ හා $4\mathbf{b}$ වේ; මෙහි $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යනු ශූන්‍ය නොවන හා සමාන්තර නොවන දෛශික වේ. E යනු AD හා BC හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ. OAE ත්‍රිකෝණය සඳහා ත්‍රිකෝණ ආකලන නියමය භාවිතයෙන්,

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $\overrightarrow{OE} = \mathbf{a} + \lambda(4\mathbf{b} - \mathbf{a})$ බව පෙන්වන්න.

එලෙසම, $\mu \in \mathbb{R}$ සඳහා $\overrightarrow{OE} = \mathbf{b} + \mu(3\mathbf{a} - \mathbf{b})$ බව ද පෙන්වන්න.

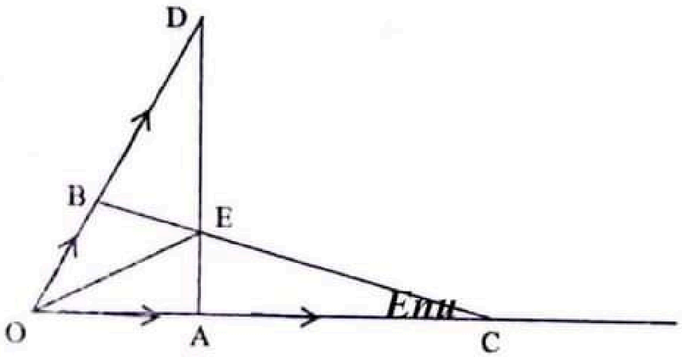
ඒ නයින්, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{11}(9\mathbf{a} + 8\mathbf{b})$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\alpha\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, -3\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$ හා $\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ යන බල තුන, පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i} + \mathbf{j}, 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ හා $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ වූ ලක්ෂ්‍ය හරහා ක්‍රියාකරයි; මෙහි $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ වේ. මෙම බල පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය වන බව දී ඇත. α හා β හි අගයන් ද මෙම යුග්මයෙහි ඝූර්ණය ද සොයන්න.

දැන්, O මූලය හරහා ක්‍රියාකරන $3\gamma\mathbf{i} + 4\gamma\mathbf{j}$ අලුත් බලයක් ඉහත බල පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ; මෙහි $\gamma > 0$ වේ. මෙම බල 4 කින් සමන්විත නව බල පද්ධතිය සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා එහි විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

ඊළඟට, පිහිටුම් දෛශිකය $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ වූ ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියාකරන $p\mathbf{i} + q\mathbf{j}$ බලයක් එකතු කළ විට, බල 5 කින් සමන්විත මෙම පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ ඇති බව දී ඇත. γ, p හා q හි අගයන් සොයන්න.

(*a*)



$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$$
$$= \underline{a} + \lambda\overrightarrow{AD} \quad 5$$
$$= \underline{a} + \lambda\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}\right) \quad 5$$
$$= \underline{a} + \lambda(4\underline{b} - \underline{a}) \quad 5$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE}$$
$$= \underline{b} + \mu\overrightarrow{BC} \quad 5$$
$$= \underline{b} + \mu\left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}\right) \quad 5$$
$$= \underline{b} + \mu(3\underline{a} - \underline{b}) \quad 5$$

$\boxed{30}$

$$\therefore\ \underline{a}+\lambda(4\underline{b}-\underline{a})=\underline{b}+\mu(3\underline{a}-\underline{b}) \quad 5$$

$$(1-\lambda)\underline{a}+4\lambda\underline{b}=3\mu\underline{a}+(1-\mu)\underline{b} \quad 5$$

$$\Rightarrow 1-\lambda=3\mu \ \ \& \ \ 1-\mu=4\lambda \quad 5$$

$$\therefore\ \lambda=\frac{2}{11} \quad 5$$

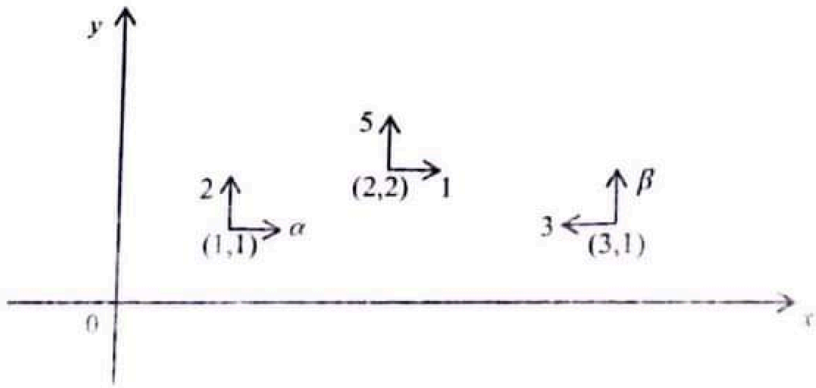
$$\therefore \overrightarrow{OE}=a+\frac{2}{11}(4\underline{b}-\underline{a}) \quad 5$$

$$=\frac{1}{11}(9\underline{a}+8\underline{b}). \quad 5$$

$\boxed{60}$

$\boxed{30}$

(*b*)



පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය බැවින්

$$\rightarrow X=0, \quad \uparrow Y=0 \ \text{ and } \ G\neq 0.$$

$$X=\alpha-3+1=0. \quad 5$$

$$\Rightarrow \alpha=2 \quad 5$$

$$Y=2+\beta+5=0. \quad 5$$

$$\Rightarrow \beta=-7 \quad 5$$

$\boxed{20}$

$$O\circlearrowleft\ G=2(1)-2(1)+3(1)-7(3)+5(2)-1(2) \quad 5$$

$$=3-21+10-2$$

$$=13-23$$

$$=-10. \quad 5$$

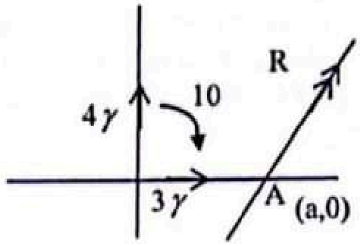
$\boxed{10}$

Enu

$$R^2 = 9\gamma^2 + 16\gamma^2 \quad 5$$
$$= 25\gamma^2$$
$$\therefore R = 5\gamma. \quad 5$$

$$\tan\theta = \frac{4\gamma}{3\gamma} = \frac{4}{3} \quad 5$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \quad 5$$

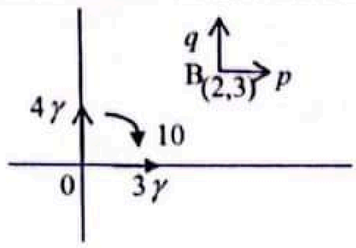


A↻ $4\gamma a = -10$

$$\therefore a = \frac{-5}{2\gamma} \quad 5$$

ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය $4x - 3y - \frac{10}{\gamma} = 0.$ 5

30



$\rightarrow p + 3\gamma = 0$ 5 $\qquad \uparrow q + 4\gamma = 0$ 5

$\therefore p = -3\gamma \qquad \therefore q = -4\gamma$

B↻ $(3\gamma \times 3) - (4\gamma \times 2) - 10 = 0$ 5

$\therefore \gamma = 10.$ 5

$\therefore p = -30$ 5 & $q = -40$ 5

30

Enu

වෙනත් ක්‍රමයක්

O↻ $q(2) - 3p - 4r(x) = 0$ 5

$$2q - 3p - 4r\left(\frac{5}{2r}\right) = 0 \quad 5$$

$$2q - 3p - 10 = 0$$

O↻ $\uparrow q + 4\gamma = 0 \Rightarrow q = -4\gamma$ 5

$\rightarrow p + 3\gamma = 0 \Rightarrow p = -3\gamma$ 5

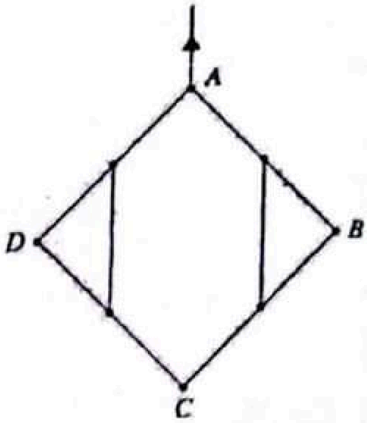
$$2(-4\gamma) - 3(-3\gamma) = 10$$
$$-8\gamma + 9\gamma = 10$$
$$\gamma = 10$$

$p = -30$ 5 & $q = -40$ 5

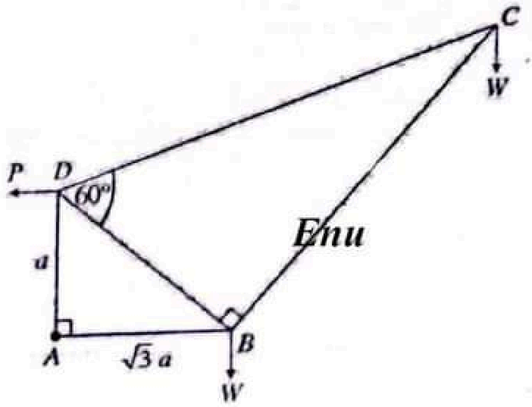
30

Enu

15. (a) එක එකක දිග $2a$ හා බර W වූ AB, BC, CD හා DA ඒකාකාර දඬු හතරක් ඒවායේ A, B, C හා D අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා BC හි මධ්‍යලක්ෂ්‍ය දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් යා කර ඇත. එලෙසම, AD හා DC හි මධ්‍යලක්ෂ්‍ය ද දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් යා කර ඇත. පද්ධතිය A ලක්ෂ්‍යයෙන් සිරස් තලයක එල්ලා ඇති අතර රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි සමතුලිතතාවේ පවතී. තන්තුවල ආතති ද BC මගින් AB මත B සන්ධියෙහිදී යොදන ප්‍රතික්‍රියාවද සොයන්න.



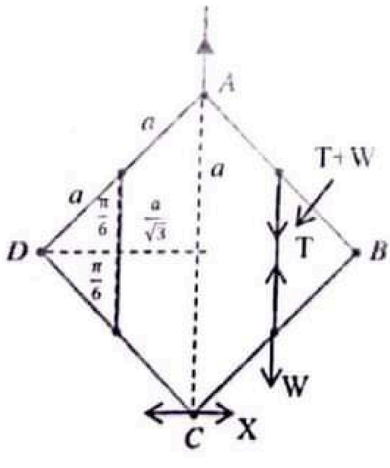
(b) රූපයේ දැක්වෙන, AB, BC, CD, DA හා DB සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ල. ඒවායේ අන්තවලදී සුමටව සන්ධි කර ඇත. $AD = a$, $AB = \sqrt{3}\,a$, $B\hat{A}D = 90^\circ$, $C\hat{B}D = 90^\circ$ හා $B\hat{D}C = 60^\circ$ බව ද ඇත. B හා C සන්ධි එක එකක W භාරය බැගින් එල්ලා රාමු සැකිල්ල A හිදී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමටව සන්ධි කර AB තිරස්ව ඇතිව සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ, D සන්ධියෙහිදී යෙදූ තිරස් P බලයක් මගිනි.



(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන්, C, B හා D සන්ධි සඳහා, ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න. **ඒ නයින්**, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් සොයන්න.

(a)



සමමිතියෙන් C හිදී DC මගින් CB මත ප්‍රතික්‍රියාව තිරස් වේ. 5

For $\triangle ABC$,

A $\circlearrowright$: $X \cdot 2a - 2W \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$ (5)

$$X = \frac{\sqrt{3}W}{2} \quad (5)$$

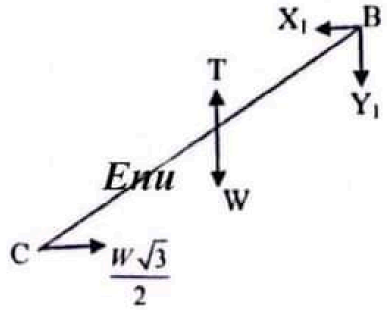
(on error ok)

For BC:

B $\circlearrowright$: $\frac{W\sqrt{3}}{2} \cdot a + W \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - T \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$ (10)

$T = 2W.$ (5)

For BC:



$\rightarrow \quad X_1 = \frac{W\sqrt{3}}{2}$; (5)

45 (05) — $\uparrow T - W - Y_1 = 0.$ (5)

$\therefore Y_1 = W$ (5)

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}W}{2}\right)^2 + W^2}$$

$$= \frac{\sqrt{7}w}{2} \quad (5)$$

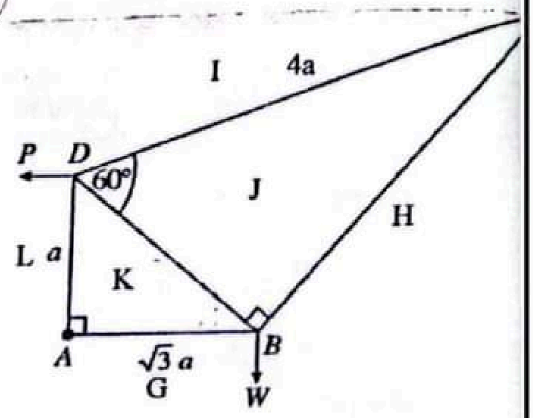
$$\tan\theta = \frac{Y_1}{X_1} = \frac{W}{\frac{W\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

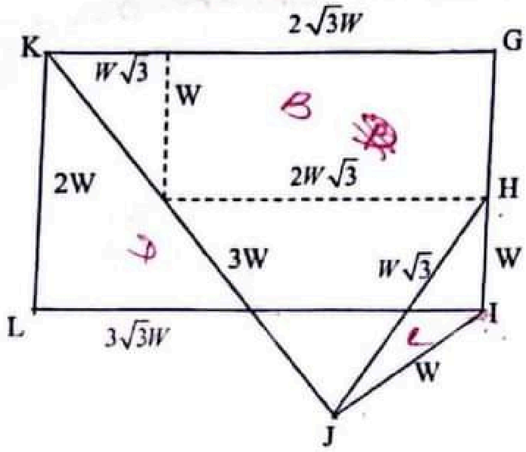
$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad (5)$$

55

(b) $A \circlearrowright \quad P\times a - W\times\sqrt{3}a - W\times 2\sqrt{3}a = 0$ (10)

$\therefore \quad P = 3\sqrt{3}W.$ (5)





C සන්ධිය: (10)

D සන්ධිය: (10)

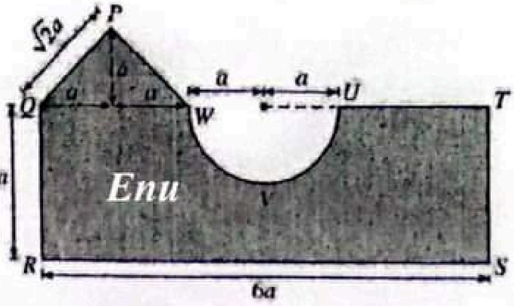
B සන්ධිය: (10)

දණ්ඩ	තෙරපුම	ආතතිය	විශාලත්වය	
AB	✓	-	$P = 3\sqrt{3}W$	10
BC	✓	-	$\sqrt{3}W$	10
CD	-	✓	W	10
BD	-	✓	5W	10
AD	✓	-	2W	10

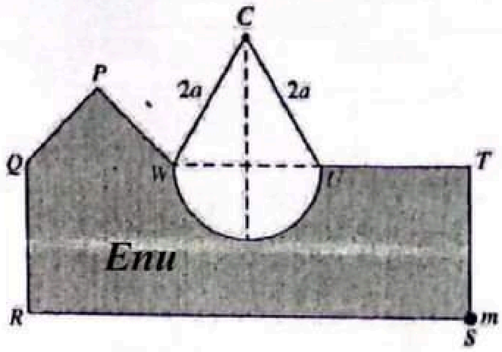
95

16. අරය r හා කේන්ද්‍රය O වන ඒකාකාර අර්ධවෘත්තාකාර ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, O සිට $\frac{4r}{3\pi}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

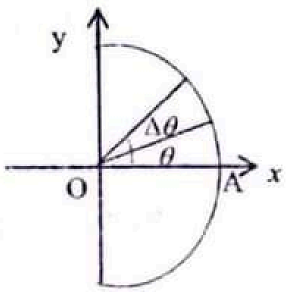
යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, $QRST$ සෘජුකෝණාස්‍රයෙන් අරය a වූ අර්ධ වෘත්තයක් ඉවත් කර, සමාන පැතිවල දිග $\sqrt{2}a$ වූ PQW සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් එක් කර පෘෂ්ඨික ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර තුනී ලෝහ තහඩුවකින් තල ආස්තරයක් සාදා ඇත. $QR = 2a, RS = 6a$ හා $QW = 2a$ වේ. මෙම ආස්තරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය QR සිට $\bar{x}$ දුරකින්ද RS සිට $\bar{y}$ දුරකින්ද පිහිටයි. $\bar{x} = \frac{(74-3\pi)}{(26-\pi)}a$ හා $\bar{y} = \frac{2(15-\pi)}{(26-\pi)}a$ බව පෙන්වන්න.



රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, S හිදී ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් සවි කළ ඉහත ආස්තරය, කුඩා සුමට අවල C නාදැත්තක් මතින් යන, U හා W ට කෙළවරවල් ඈඳා ඇති දිග $4a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් RS තිරස්ව ඇතිව සමතුලිතතාවේ එල්ලෙයි. a හා σ ඇසුරෙන් m හි අගය හා තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.



සමමිතියෙන් $\bar{y} = 0$ (5)



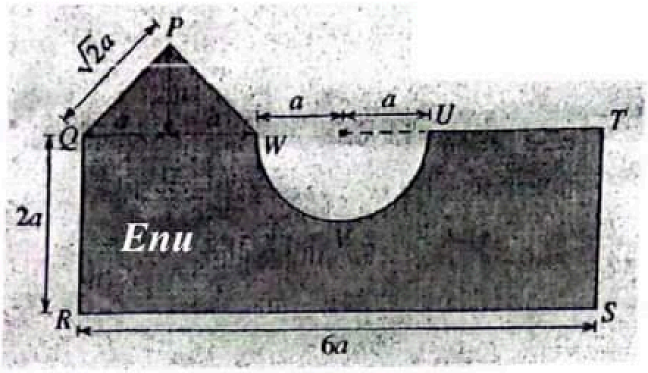
$$\Delta m = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta \times \sigma$$

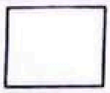
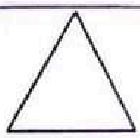
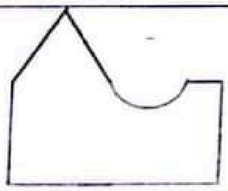
$$\bar{x} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}r^2\sigma \cdot \frac{2}{3}r\cos\theta d\theta \quad (5)}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}r^2\sigma \cdot d\theta \quad (5)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}r^3 \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad (5)}{\frac{1}{2}r^2\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad (5)}$$

$$= \frac{4r}{3\pi} \quad (5)$$

30



වස්තුව	ස්කන්ධය 05	QR සිට දුර 05	RS සිට දුර 05
	$12a^2\sigma$	$3a$	a
	$\frac{1}{2}\pi a^2\sigma$	$3a$	$2a-\frac{4a}{3\pi}$
	$\frac{1}{2}(2a)a\sigma$ $=a^2\sigma$	a	$2a+\frac{1}{3}a=\frac{7a}{3}$
	$12a-\frac{1}{2}\pi i+a^2\sigma$ $\left(13-\frac{\pi}{2}\right)a^2\sigma$ (5)	$\bar{x}$	$\bar{y}$

$$\left(13-\frac{\pi}{2}\right)a^2\sigma\bar{x}=12a^2\sigma(3a)-\frac{1}{2}\pi a^2\sigma(3a)+a^2\sigma(a) \quad (15)$$

(පොදු ...) [illegible]

$$\Rightarrow \quad (26-\pi)a^2\sigma\bar{x}=72a^3\sigma 3\pi a^3\sigma+2a^3\sigma$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}=\frac{(74-3\pi)a}{(26-\pi)} \quad (5)$$

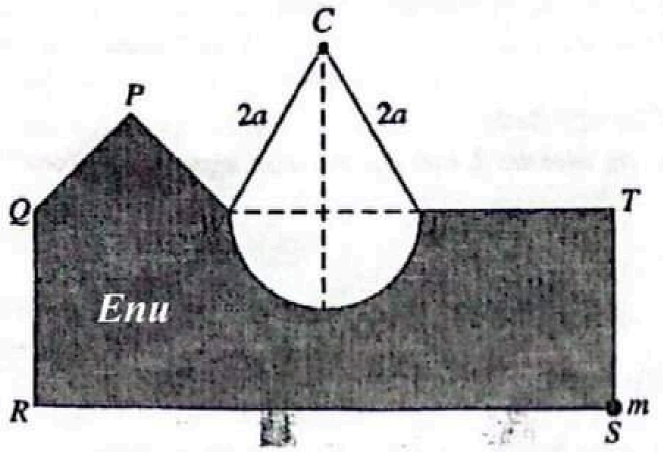
$$\left(13-\frac{\pi}{2}\right)a^2\sigma\bar{y}=12a^2\sigma(a)-\frac{1}{2}\pi a^2\sigma\left(2a-\frac{4a}{3\pi}\right)+a^2\sigma\left(\frac{7a}{3}\right) \quad (15)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{26-\pi}{2}\right)a^2\sigma\bar{y}=12a^3\sigma-\pi a^3\sigma+\frac{2a^3\sigma}{3}+\frac{7a^3\sigma}{3} \quad (5)$$

$$=\frac{45a^3\sigma-3\pi a^3\sigma}{3}$$

$$\bar{y}=\frac{2(15-\pi)a}{(26-\pi)} \quad (5)$$

9(



C ↻ :

$$mg(3a) = \left(13 - \frac{\pi}{2}\right)a^2\sigma g\,(3a - \bar{x}) \quad 10$$

$$m = \frac{(26-\pi)}{6}a\,\sigma\left(3a - \frac{(74-3\pi)a}{26-\pi}\right) \quad 5$$

$$= \frac{a^2\sigma}{2}(4a + 3\pi a - 3\pi a)$$

$$m = \frac{2a^2\sigma}{3}. \quad 5$$

$$\uparrow \quad 2T\cos\frac{\pi}{6} = mg + \left(13 - \frac{\pi}{2}\right)a^2\sigma g \quad 5$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}\,T = \frac{2}{3}a^2\sigma g + 13a^2\sigma g - \frac{\pi}{2}a^2\sigma g$$

$$= \frac{41a^2\sigma g}{3} - \frac{\pi a^2\sigma g}{2}$$

$$T = \frac{(82-3\pi)a^2\sigma g}{6\sqrt{3}} \quad 5$$

30

17. (a) B_1, B_2, B_3 හා B_4 සර්වසම පෙට්ටි හතරක, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම පෑන් 4 බැගින් අඩංගු වේ. $k = 1, 2, 3, 4$ සඳහා, එක් එක් B_k පෙට්ටියක රතු පෑන් k හා කළු පෑන් $4 - k$ බැගින් අඩංගු වේ. පෙට්ටි හතරෙන් එක් පෙට්ටියක් සසම්භාවී ලෙස තෝරාගෙන, එම පෙට්ටියෙන් පෑන් 2 ක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) ඉවතට ගත් පෑන් දෙක රතු පෑන් වීමේ,

(ii) ඉවතට ගත් පෑන් දෙක රතු පෑන් බව දී ඇති විට, එම පෑන් දෙක B_4 පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගෙන තිබීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ හා $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ දත්ත කුලකයන්ට එකම මධ්‍යන්‍යය ඇති අතර ඒවායේ සම්මත අපගමන පිළිවෙළින්, σ_x හා σ_y වේ. $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ සංයුක්ත දත්ත කුලකයේ විචලතාව $\dfrac{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}{n+m}$ බව පෙන්වන්න.

කම්හලක නිෂ්පාදිත පොට ඇණවල විෂ්කම්භ පහත වගුවේ සාරාංශගත කර ඇත.

විෂ්කම්භය (mm)	පොට ඇණ සංඛ්‍යාව (දහසේ ඒවායින්)
2 – 6	2
6 – 10	5
10 – 14	8
14 – 18	4
18 – 22	1

ඉහත දී ඇති ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය හා විචලතාව නිමානය කරන්න.

අසල ඇති කම්හලක නිෂ්පාදිත වෙනත් පොට ඇණ 40 000 ක විෂ්කම්භවලට එම මධ්‍යන්‍යයම ඇති අතර විචලතාව 22.53 mm^2 වේ. කම්හල් දෙකෙහිම නිෂ්පාදිත පොට ඇණවල විෂ්කම්භයන්හි සංයුක්ත විචලතාව නිමානය කරන්න.

(a)

$$P(RR) = P(RR|B_1)P(B_1) + P(RR|B_2)P(B_2) + P(RR|B_3)P(B_3) + P(RR|B_4)P(B_4)$$

$$= 0\cdot\frac{1}{4} + \frac{{}^2C_2}{{}^4C_2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{{}^3C_2}{{}^4C_2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{{}^4C_2}{{}^4C_2}\cdot\frac{1}{4} \quad 20$$

$$= \frac{1}{4\cdot{}^4C_2}[1+3+6]$$

$$= \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \quad 5$$

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} +\right.$$

$$\frac{2}{12} + \frac{6}{12} + 1$$

$$\cancel{12}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1$$

$$\frac{20}{12} \times \frac{1}{4} =$$

$$P(B_4|RR) = \frac{P(B_4|RR)P(B_4)}{P(RR)} \quad 10$$

$$= \frac{1\cdot\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} \quad 5 \quad 5$$

$$= \frac{12}{20} = \frac{3}{5}. \quad 5$$

60

Enu

(b)

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ සහ $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ දත්ත කුලක එක එකක මධ්‍යන්‍යය μ යැයි ගනිමු.
එවිට සංයුක්ත දත්ත කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය μ ම වේ. 5

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i^2}{n+m} - \mu^2 \quad 5$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\mu^2}{n+m}\right] + \left[\frac{\sum_{i=1}^{m} y_i^2 - m\mu^2}{n+m}\right] \quad 5$$

$$= \frac{1}{n+m}\left[n\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \mu^2}_{\sigma_x^2}\right) + m\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}{m} - \mu^2}_{\sigma_y^2}\right)\right] \quad 5$$

$$= \frac{n^{\sigma}x^2 + m^{\sigma}y^2}{n+m} \quad 5$$

25

Enu

විෂ්කම්භය (mm)	$f(10^3)$	මධ්‍ය අගය x	xf	$x^2 f$
2 - 6	2	4	8	32
6 - 10	5	8	40	320
10 -14	8	12	96	1152
14 -18	4	16	64	1024
18 -22	1	20	20	400
	20		228	2928
	5		10	10

මධ්‍යන්‍යය $= \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{228}{20} = 11.4\text{mm}$ 5

5

විචලතාව $= \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \mu^2 = \frac{2928}{20} - (11.4)^2 = 146.4 - 129.96$

5 5

$= 16.44\ \text{mm}^2.$

මධ්‍යස්ථය $= 10 + \frac{(10-7)}{8} \times 4$ ~~5~~

$= 11.5\text{mm}$ 05

Enu

(10) [illegible]

සංයුක්ත විචලතාව $= \dfrac{1}{20+40}\{20\sigma_1^2 + 40\sigma_2^2\} = \dfrac{1}{60}\{20\times 16.44 + 40\times 22.53\}$ (5)

(05) (05) [illegible]

$= 20.5 \text{ mm}^2.$

65

$\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ $\qquad$ $\{y_1, y_2, \ldots y_n\}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{m}.$$

$\therefore$

$$\bar{x} = \bar{y}$$

$$\therefore \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{m}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}{m} - \bar{y}^2}$$

සංයුක්ත දත්ත කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය $\bar{Z}$ නම්,

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_i}{m+n}.$$

$$= \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{m+n} = \frac{n\bar{x} + m\bar{x}}{m+n}. = \frac{\bar{x}(m+n)}{(m+n)}$$

$$\bar{Z} = \bar{x}$$

විචලතාව $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i^2}{m+n} - \bar{Z}^2$

$$= \frac{n(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) + m(\sigma_y^2 + \bar{y}^2)}{m+n} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{n\sigma_x^2 + n\bar{x}^2 + m\sigma_y^2 + m\bar{y}^2 - m\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{m+n}$$

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා ව: පැ: $= \frac{1}{2}$ හා ද: පැ: $= \frac{1}{2}$.

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{k}{k+1}$. .... (1) 5

දැන්, $$\sum_{r=1}^{k+1} \frac{1}{r(r+1)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$ 5

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

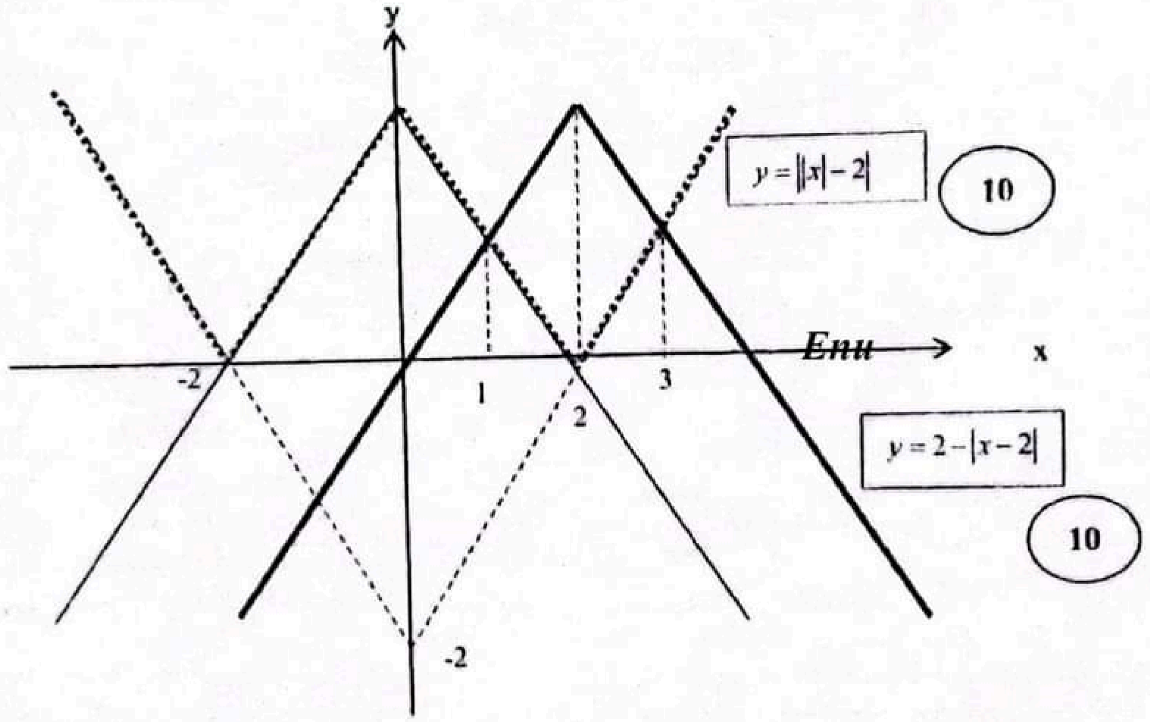
$$= \frac{k+1}{k+2}$$ 5

ඒ නයින්, $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n = k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මඟින් $n \in \mathbb{Z}^+$. සඳහාම ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

25

ක ම රූප සටහනක $y = 2 - |x-2|$ හා $y = \left||x| - 2\right|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
කයින් හෝ අන් ආකාරයකින් හෝ, $\left||x| - 2\right| + |x-2| \leq 2$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



$\left||x|-2\right| + |x-2| \leq 2$

$\Leftrightarrow \left||x|-2\right| \leq 2 - |x-2|$

5

ප්‍රස්තාරයෙන් $1 \leq x \leq 3$ බව ලැබේ.

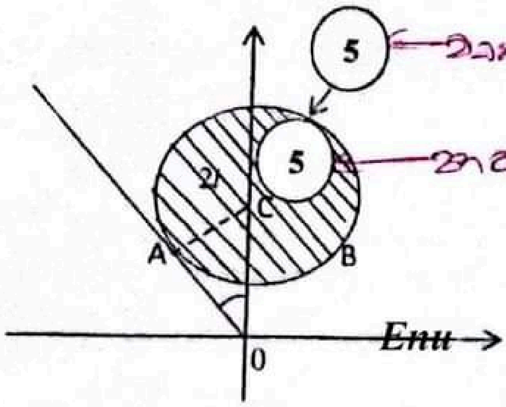
හෝ
ප්‍රස්තාරයේ $x=1$, $x=3$ ලකුණු කර ඇත් නම් - 05
(වෙනම ලකුණක් දෙනු නැත)

25

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $|\bar{z} + 2i| \leq 1$ යන අසමානතාව සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවලින් සමන්විත පෙදෙස අඳුරු කරන්න.
මෙම අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සඳහා Arg z හි වැඩිතම අගය සොයන්න.

$|\bar{z}+2i| = |z-2i|$. 5

ඒ නයින් $|z-zi| \leq 1$ මගින් දෙනු ලබන පෙදෙස දී ඇති පෙදෙසම වේ.



5 — වෘත්තය ඇඳීමට.

5 — පාට කිරීමට.

(වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය x අක්ෂයෙන් ඉහළ y අක්ෂය මත තිබිය යුතුය.)

* වෘත්තය x අක්ෂය ස්පර්ශ නොවිය...

A මගින් නිරූපනය කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව z_0 යැයි ගනිමු.

ΔOAC මගින් $A\hat{O}C = \frac{\pi}{6}$ ලැබේ. 5

Arg z හි අවශ්‍ය වැඩිතම අගය $=$ Arg z_0

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{2\pi}{3}. \quad 5$$

පලමුවන 5 සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක්:

$z = x + iy$, යැයි ගනිමු; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$.

Then $|\bar{z}+2i|^2 = |x-(y-z)i|^2$

$$= x^2 + (y-2)^2 \quad 5$$

ඒ නයින්, දී ඇති පෙදෙස $x^2 + (y-2)^2 \leq 1$ මගින් දෙනු ලබන පෙදෙසම වේ

25

$a \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. x හි ආරෝහණ බලවලින් x^2 පදය දක්වා එය ද ඇතුළුව $(2 + ax)^5$ හි ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.
එනයින්, $(4 - 5x)(2 + ax)^5$ ප්‍රසාරණයේ x^2 හි සංගුණකය -80 වන a හි අගයන් සොයන්න.

අවශ්‍ය ප්‍රකාශනය $= {}^5C_0 2^5 + {}^5C_1 2^4 (ax) + {}^5C_2 2^3 (ax)^2$ 5

$= 32 + 5 \times 16ax + 10 \times 8a^2x^2$ 5

$= 32 + 80ax + 80a^2x^2$

$(4 - 5x)(2 + ax)^5 = 4(2 + ax)^5 - 5x(2 + ax)^5$

x^2 සංගුණකය $= 4 \times 80a^2 - 5 \times 80a$ 5

$4 \times 80a^2 - 5 \times 80a = -80$, බව දී ඇත. 05

$\therefore \; 4a^2 - 5a + 1 = 0.$

$\therefore \; (4a - 1)(a - 1) = 0.$

$\therefore \; a = \frac{1}{4} \text{ or } a = 1.$ 5

25

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left((1+x)\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x\right)}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}} = \dfrac{1}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left((1+x)\operatorname{cosec}2x - \cot 2x\right)}{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 2x} \cdot \frac{(1+x-\cos 2x)}{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}\right)} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 2x} \cdot \frac{(1+x-\cos 2x)}{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{(1+2x)}+\sqrt{1-2x}\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{\left(2\sin^2 x + x\right)}{\left[(1+2x)-(1-2x)\right]} \cdot \left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \left(\frac{2\sin^2 x}{4x} + \frac{1}{4}\right)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right) \quad 5$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} \times 2 \quad 10$$

$$= \frac{1}{4}.$$

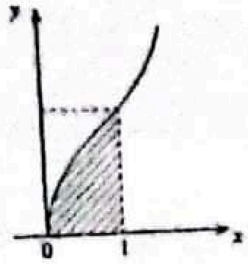
(05)

සීමාවන් තුනම නිවැරදි නම්	10
ඕනෑම දෙකක්	5

25

6. $\frac{d}{dx}\left\{x(x^2+1)\tan^{-1}x\right\} = (3x^2+1)\tan^{-1}x + x$ භාවිතයෙන්, $\int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\,dx = \frac{1}{2}(\pi-1)$ බව පෙන්වන්න.

$y = \sqrt{2(3x^2+1)\tan^{-1}x}$, $x = 1$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙස x-අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙසේ ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\pi(\pi-1)$ බව පෙන්වන්න.



$$\frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)\tan^{-1}x\right\} = (3x^2+1)\tan^{-1}x + x$$ භාවිතයෙන්

5

$$\int_0^1 \left[(3x^2+1)\tan^{-1}x + x\right]dx = x(x^2+1)\tan^{-1}x\Big|_0^1$$ බව ලැබේ.

$$\therefore \int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\,dx + \int_0^1 x\,dx = 2\tan^{-1}1$$

$$\therefore \int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\,dx + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2\frac{\pi}{4}$$ 5

$$\therefore \int_0^1 (3x^2+1)\tan^{-1}x\,dx = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\pi-1).$$ 5

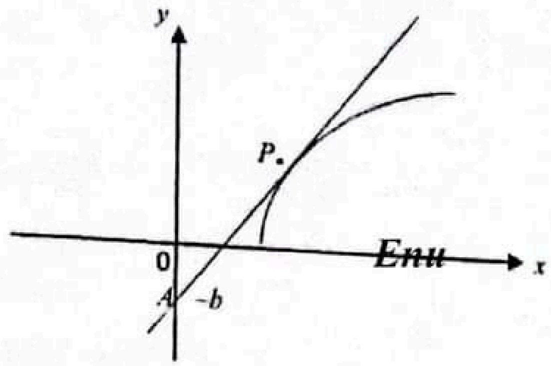
අවශ්‍ය පරිමාව $= \pi\int_0^1 2\left(3x^2+1\right)\tan^{-1}x\,dx$ 5 $\qquad \pi\int_0^1 y^2\,dx$ — 05

$= 2\pi\frac{1}{2}(\pi-1)$ 5

$= \pi(\pi-1).$

25

7. $a, b > 0$ යැයි ගනිමු. වක්‍රයක් $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $x = a\sec\theta$ හා $y = b\tan\theta$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලැබේ. වක්‍රයට $P \equiv (a\sec\theta, b\tan\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේදී වූ ස්පර්ශ රේඛාව, $(0, -b)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. P හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$x = \mathrm{a}\sec\theta,$ $\qquad y = b\tan\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = a\sec\theta\tan\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = b\sec^2\theta \qquad 5$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{b\sec^2\theta}{a\sec\theta\tan\theta} \qquad 5$$

$$\therefore \quad = \frac{b\sec\theta}{a\tan\theta}.$$

AP හි අනුක්‍රමණය $= \dfrac{b + b\tan\theta}{a\sec\theta}.$

දී ඇති තත්වයට මගින් $\dfrac{b\sec\theta}{a\tan\theta} = \dfrac{b(1+\tan\theta)}{a\sec\theta}$ ලැබේ. $\qquad 5$

$$\therefore \ \sec^2\theta = \tan\theta + \tan^2\theta$$

$$\therefore \ \tan\theta = 1 \qquad 5$$

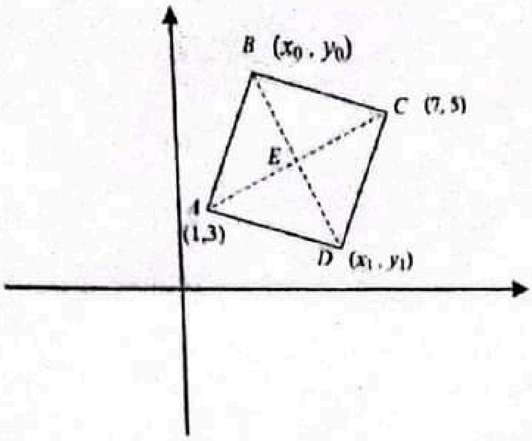
$$\therefore \ \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \ P \equiv \left(\sqrt{2}a, \ b\right) \qquad 5$$

25

Enu

$ABCD$ යනු $A \equiv (1,3)$ හා $C \equiv (7,5)$ වන සමචතුරස්‍රයක් යැයි ගනිමු. B හා D හි x-ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$B = (x_0, y_0)$ හා $D = (x_1, y_1)$ යැයි ගනිමු.

E යනු AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය බැවින්, $E \equiv (4,4)$ ලැබේ. 5

එවිට, $AE^2 = 3^2 + 1^2 = 10$

$ABCD$ සමචතුරස්‍රයක් නිසා $BE = AE$ වේ.

ඒ නයින්, $(x_0 - 4)^2 + (y_0 - 4)^2 = 10.$ ---------------- (1) 5

තවද, $AE \perp BE.$ වේ.

$$\therefore \left(\frac{4-3}{4-1}\right) \times \left(\frac{y_0 - 4}{x_0 - 4}\right) = -1.$$

ඒ නයින්, $y_0 - 4 = -3(x_0 - 4)$ -----Enu------ (2) 5

(1) සහ (2) $\Rightarrow (x_0 - 4)^2 + 9(x_0 - 4)^2 = 10.$ 5

ඒ නයින්, $y_0 - 4 = -3(x_0 - 4).$

$\therefore \ (x_0 - 4)^2 = 1.$

$\therefore \ (x_0 - 4) = \pm 1.$

$\therefore \ x_0 = 5$ or $x_0 = 3.$ 5

(x_1, y_1) ද (1) සහ (2) හි (x_0, y_0) යන්න (x_1, y_1) මගින්

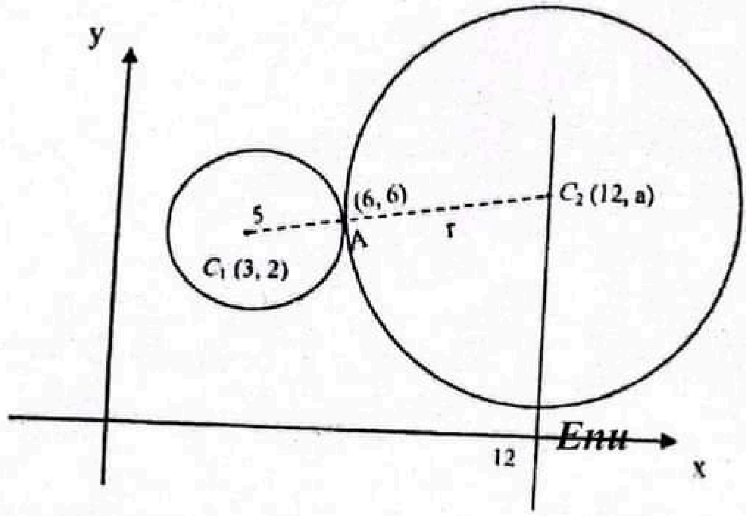
ඒ නයින් B හා D හි X-ඛණ්ඩාංකය 3 හා 5 වේ. තෘප්ත කරයි.

25

05

Enu

9. $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ වෘත්තය (6, 6) ලක්ෂ්‍යයේදී බාහිරව ස්පර්ශ කරන හා $x=12$ රේඛාව මත කේන්ද්‍රය පිහිටන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.



දී ඇති වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය C_1 හා අවශ්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය C_2 යැයි ගනිමු.

එවිට $C_1 \equiv (3,2),\ C_2 \equiv (12,a);$ මෙහි $a \in \mathbb{R}$ 5

C_2 වෘත්ත බාහිරව ස්පර්ශ කරන බැවින් C_2 ලක්ෂ්‍යය C_1A රේඛාව මත පිහිටයි.

$\therefore \dfrac{6-2}{6-3} = \dfrac{a-6}{12-6}.$ 5

$\therefore 3a-18=24.$

$\therefore a=14.$ 5

S(6,6)=0

([illegible]) 01

අවශ්‍ය වෘත්තයේ අරය $C_2 = \sqrt{(12-6)^2+(14-6)^2}$ 5

[illegible]

$=10$

ඒ නයින්, අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $(x-12)^2+(y-14)^2=100$ වේ. 5

$r_2=10$, $C_2=(\overset{+9}{12}, \overset{+f}{14})$

$10 = \sqrt{12^2+14^2-c}$

$c=260$

25

වෘත්තයේ සමී: $\Rightarrow x^2+y^2-24x-28y+240=0$

$\cos 5\theta = \cos 3\theta$ වන්නේ $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta = \frac{n\pi}{4}$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$\in \mathbb{Z}$ හා $\theta \neq \frac{n\pi}{4}$ සඳහා $\frac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot 4\theta$ බව ද පෙන්වන්න.

$\cos 5\theta = \cos 3\theta$

$\Leftrightarrow \quad 5\theta = 2n\pi \pm 3\theta$ for $n \in \mathbb{Z}$. 5

$\Leftrightarrow \quad 8\theta = 2n\pi$ or $2\theta = 2n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{n\pi}{4}$ or $\theta = n\pi$ for $n \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{n\pi}{4}$ for $n \in \mathbb{Z}$. 5

$$\frac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = \frac{2\cos 4\theta \sin\theta}{-2\sin 4\theta \sin\theta}$$ 5 5

$$= -\cot 4\theta$$ 5

$\cos 5\theta - \cos 3\theta = 0$

$-2\sin 4\theta \cdot \sin\theta = 0$

$\sin 4\theta = 0$ $\quad$ $\sin\theta = 0$

$\sin 4\theta = \sin 2\pi$ $\quad$ $\sin\theta = \sin\pi$

$4\theta = n\pi + (-1)^n 2\pi$ $\quad$ $\theta = n\pi + (-1)^n \pi$

$\theta = \frac{n\pi}{4}$ $\quad$ $\theta = n\pi$

25

B කොටස

* ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11.(a) $0 < |p| < 1$ යැයි ගනිමු. $p^2x^2 - 2x + 1 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල ඇති බව පෙන්වන්න. මෙම මූල α හා $\beta\ (> \alpha)$ යැයි ගනිමු. α හා β යන දෙකම ධන වන බව පෙන්වන්න.
p ඇසුරෙන් $(\alpha - 1)(\beta - 1)$ සොයා, $\alpha < 1$ හා $\beta > 1$ බව අපෝහනය කරන්න.
$\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}$ බව පෙන්වන්න.
$\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} = \frac{1}{|p|}\sqrt{2(1+|p|)}$ බව දී ඇත. $|\sqrt{\alpha}-1|$ හා $|\sqrt{\beta}-1|$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය
$|p|x^2 - \sqrt{2(1-|p|)}.x + \sqrt{2(1+|p|)} - |p| - 1 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(b) $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 4$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. $(x + 2)$ යන්න $p(x)$ හා $p'(x)$ යන දෙකෙහිම සාධකයක් බව දී ඇත; මෙහි $p'(x)$ යනු x විෂයයෙන් $p(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය වේ. a හා b හි අගයන් සොයන්න. a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා $p(x) - 3p'(x)$ සම්පූර්ණයෙන් සාධකවලට වෙන් කරන්න.

(a)

$0<|p|<1$.

$p^2x^2-2x+1=0$ හි නිශ්චායකය Δ යැයි ගනිමු.

$p^2<1$ නිසා $\Delta = 4-4p^2 = 4(1-p^2)>0$

5 5

$\therefore$ සමීකරණයට ප්‍රභින්න තාත්වික මූල ඇත 5

15

α හා $\beta\ (>\alpha)$ මෙම මූල යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha\beta = \frac{1}{p^2} > 0.$ 5

$(\alpha+\beta)$ හා $\alpha\beta$ ලියා තිබීම (05)

α හා β යන දෙකම ධන හෝ දෙකම සෘණ වේ.

නමුත් $\alpha+\beta = \frac{2}{p^2} > 0$ නිසා α හා β යන දෙකම ධන වේ. 5

5

15

$(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1 = \frac{1}{p^2}-\frac{2}{p^2}+1 = \frac{p^2-1}{p^2} < 0$ හා $\alpha-1<\beta-1$.

5 5 5

$\therefore \alpha-1<0$ හා $\beta-1>0$. 5

$\therefore\ \alpha<1$ හා $\beta>1$.

20

$(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=\dfrac{2}{p^2}-2\dfrac{1}{|p|}=\dfrac{2}{p^2}(1-|p|).$

5 (ප්‍රසාරණයට) 5 (ආදේශයට)

$\therefore \sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=\dfrac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}$ 5

15

අවශ්‍ය සමීකරණය $\left(x-\left|\sqrt{\alpha}-1\right|\right)\left(x-\left|\sqrt{\beta}-1\right|\right)=0$ වේ. 10

$x^2-\left(\left|\sqrt{\alpha}-1\right|+\left|\sqrt{\beta}-1\right|\right)x+\left|\sqrt{\alpha}-1\right|\left|\sqrt{\beta}-1\right|=0$

$\left|\sqrt{\alpha}-1\right|=1-\sqrt{\alpha}$ හා $\left|\sqrt{\beta}-1\right|=\sqrt{\beta}-1$ නිසා,

$x^2-(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})x+\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha\beta}-1=0$ 5

$\therefore\ x^2-\dfrac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}\,x+\dfrac{1}{|p|}\sqrt{2(1+|p|}-\dfrac{1}{|p|}-1=0$

$\therefore |p|x^2-\sqrt{2(1-|p|}\ x+\sqrt{2(1+|p|}-|p|-1=0$ 5

20

(b) $p(x)=2x^3+ax^2+bx-4$

$\therefore p'(x)=6x^2+2ax+b.$ 5

$(x+2)$ යන්න, $p(x)$ හි සාධකයක් වන නිසා

$p(-2)=0$ වේ. 5

දැන්, $p(-2)=-16+4a-2b-4=0.$ 5

$\therefore\ 2a-b=10$ ---------------- (1)

$(x+2)$ යන්න, $p'(x)$ හි සාධකයක් වන නිසා

$p'(-2)=0.$ 5

දැන්, $p'(-2)=24-4a+b=0.$ 5

$\therefore 4a-b=24.$ ---------------- (2)

(1) හා (2) $\Rightarrow a = 7$ හා $b = 4.$

5 5

35

$$p(x) - 3p'(x) = (2x^3 + 7x^2 + 4x - 4) - 3(6x^2 + 14x + 4) \quad 5$$

$$= (x+2)(2x^2 + 3x - 2) - 3(x+2)(6x+2) \quad 5$$

$$= (x+2)\left[2x^2 + 3x - 2 - 18x - 6\right]$$

$$= (x+2)\ (2x^2 - 15x - 8) \quad 5$$

$$= (x+2)(2x+1)(x-8)$$

5 5 5

30

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 4$$

$(x+2)$ යන්න, $p(x)$ හි හා $p'(x)$ යන දෙකෙහිම සාධකයක් වන නිසා

$p(x) = (x+2)^2(2x+k).$ 5 මෙහි k නියතයකි.

10

නියත පද සංසන්දනය කිරීමෙන් $4k = -4$

$\therefore k = -1$ 5

$\therefore p(x) = (x+2)^2(2x-1).$

$\therefore p(x) = (x^2 + 4x + 4)(2x - 1) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4.$ 5

x හි බලවල සංගුණක සංසන්දනය කිරීමෙන් $b = 4$ හා $a = 7.$

5 5

35

$\therefore p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$

$\therefore p'(x) = 6x^2 + 14x + 4 = 2(3x^2 + 7x + 2) = 2(x+2)(3x+1)$ 5

$\therefore p(x) - 3p'(x) = (x+2)^2(2x-1) - 3(2(x+2)(3x+1))$ 5

$= (x+2)[(x+2)(2x-1) - 6(3x+1)]$

$= (x+2)(2x^2 - 15x - 8)$ 5

$= (x+2)(2x+1)(x-8)$ 5

5 5

30

12. (a) අවම වශයෙන් එක් සිසුවෙකුට එක් පලතුරක්වත් ලැබෙන පරිදි, අඹ ගෙඩි හයක් හා දොඩම් ගෙඩි හතරක් සිසුන් අට දෙනෙකු අතරේ බෙදා දිය යුතුව ඇත.

(i) සිසුන් හය දෙනෙකුට එක් පලතුරක් බැගින් හා ඉතිරි දෙදෙනාගෙන් එක් අයෙකුට අඹ ගෙඩි දෙකක් හා අනිත් කෙනාට දොඩම් ගෙඩි දෙකක්,

(ii) සිසුන් හත් දෙනෙකුට එක් පලතුර බැගින් හා අනිත් සිසුවාට අඹ ගෙඩි තුනක්,

(iii) සිසුන් හත් දෙනෙකුට එක් පලතුර බැගින් හා අනිත් සිසුවාට පලතුරු තුනක්,

ලැබෙන පරිදි වූ වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$ යැයි ගනිමු. තවද, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) = \dfrac{A}{(2r+1)} + \dfrac{B}{(2r+3)}$ යැයි ගනිමු; මෙහි A හා B යනු තාත්ත්වික නියත වේ. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{4}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} (U_r + kU_{r+1}) = 1$ වන පරිදි k තාත්ත්වික නියතයෙහි අගය සොයන්න.

(a) (i)

සිසුන් දෙදෙනෙක්		සිසුන් හයදෙනෙක්
2M 2OR		4M 2OR
${}^8C_2$	x	${}^6C_4 \times {}^2C_2$
2OR 2M		4M 2OR
${}^8C_2$	x	${}^6C_4 \times {}^2C_2$

5 5 5

පිළිතුර : $2 \times {}^8C_2 \times {}^6C_4 \times {}^2C_2$

$$= 2 \times \frac{8!}{6!2!} \times \frac{6!}{4!2!} = 2 \times 28 \times 15 = 840 \quad 5$$

5

25

(ii) එක් සිසුවෙක් | සිසුන් හත්දෙනෙක්

3M | 3M 4OR

$^8C_1$ x $^7C_3 \times {}^4C_4$

5

පිළිතුර: $^8C_1 \times {}^7C_3 \times {}^4C_4 = 8 \times 4 \frac{7!}{4!3!} = 8 \times 35 = 280$

5 5

$\boxed{15}$

(iii) පළතුරු 3ක්: $\underline{3M + 3OR \quad 2M + 1OR \quad 1M + 2OR}$ 5

අවස්ථා 4 ක්

3M (ii) හි පරිදි විධි 280 යි

3OR $^8c_1 \times {}^7c_6 \times {}^1c_1 = 8 \times 7 = 56$ 5

2M + 1OR $^8c_1 \times {}^7c_4 \times {}^3c_3 = 8 \times 35 = 280$ 5

1M + 2OR $^8c_1 \times {}^7c_5 \times {}^2c_2 = 8 \times 21 = 168$ 5

^nC_r භාවිතය සඳහන් කර ඇත් නම් - 05 ✓

පිළිතුර $= 280 + 56 + 280 + 168$

$= 784$ 5

$\boxed{25}$

වෙනත් ක්‍රමයක්

(a) අඹ 6 යි. දොඩම් 4යි. සිසුන් 8යි.

(i) එක් සිසුවෙකුට අඹ දෙකකුත් තවත් සිසුවෙකුට දොඩම් දෙකකුත් දෙන නිසා ඉතිරි සිසුන් 6 දෙනාට අඹ හතරකුත් දෙඩම් දෙකකුත් ඉතිරිව ඇත.

						2Ma	2Or

සිසුන් 6

සිසුන් 6 දෙනෙකු අතර අඹ 4ක් හා දොඩම් 2ක්, පළතුරු එක බැගින් බෙදා දිය හැකි ක්‍රම ගණන

$= \frac{6!}{4!2!}$ 10

$^6C_2 \rightarrow$ 05 ✓

$\frac{6!}{4!2!} \rightarrow$ 05 ✓

සිසුන් 8 දෙනෙකු අතරින් එක් සිසුවෙකු තෝරා අඹ 2ක් දිය හැකි විධි ගණන $= {}^8C_1$

5 සිසුන් 7 දෙනෙකු අතරින් එක් සිසුවෙකු තෝරා දොඩම් 2ක් දිය හැකි විධි ගණන $= {}^7C_1$

පිළිතුර $= \dfrac{6!}{4!2!} \times {}^8C_1 \times {}^7C_1$ 5

$= 840$ 5

හෝ

$$= \frac{6!}{4!2!} \times {}^8P_2$$

$$= 840$$

25

(ii) එක් සිසුවෙකුට අඹ 3කුත් අනෙක් සිසුන් 7 දෙනාට එක පළතුර බැගිනුත්:

							3Ma

සිසුන් 7 දෙනෙකු අතර අඹ 3ක් හා දොඩම් 4ක්, පළතුරු එක බැගින් බෙදා දිය හැකි ක්‍රම ගණන

$$= \frac{7!}{4!3!}$$

සිසුන් 8 දෙනෙකු අතරින් එක් සිසුවෙකු තෝරා අඹ 3ක් දිය හැකි විධි ගණන $= {}^8C_1$

$\therefore$ පිළිතුර $= {}^8C_1 \times \dfrac{7!}{4!3!}$

$= 280$

(iii)

පළතුරු 3 ක් එක් සිසුවෙකුට		පළතුරු 7 ක් සිසුන් 7 දෙනාට		විධි ගණන	
අඹ	දොඩම්	අඹ	දොඩම්		
3	0	3	4	$= {}^8C_1 \times \dfrac{7!}{3!4!} = 280$	5
2	1	4	3	$= {}^8C_1 \times \dfrac{7!}{4!3!} = 280$	5
1	2	5	2	$= {}^8C_1 \times \dfrac{7!}{5!2!} = 168$	5
0	3	6	1	$= {}^8C_1 \times \dfrac{7!}{6!} = 56$	5

මුළු විධි ගණන

$$= 280 + 280 + 168 + 56$$

$$= 784$$ 5

25

(b). $r \in \mathbb{Z}^+$

$$U_r = \frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$$

$$U_r \quad = \quad f(r) \quad - \quad f(r+1)$$

$$\frac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)} = \frac{A}{2r+1} + \frac{B}{2r+3} - \frac{A}{2r+3} - \frac{B}{2r+5} \quad 5$$

$$\therefore 4(2r+7) = A(2r+3)(2r+5) + (B-A)(2r+1)(2r+5) - B(2r+1)(2r+3)$$

$$= (4A+4B)r + 10A + 2B$$

ඕනෑම ක්‍රමයක් 10

r :හි බල සංසන්දනය කිරීමෙන්

r : $\quad 8 = 4A + 4B \Rightarrow 2 = A + B$

r^0 : $\quad 28 = 10A + 2B \Rightarrow 14 = 5A + B$

$\Big\} \; A = 3, \quad B = -1$ 5 5

25

$U_r = f(r) - f(r+1)$ මෙහි $f(r) = \dfrac{3}{2r+1} - \dfrac{1}{2r+3}$ 5

$r = 1;\ U_1 = f(1) - f(2)$

$r = 2;\ U_2 = f(2) - f(3)$ 5

A හා B ලැබී නම් සියලු ලකුණු 25 ✓

. .

. .

. .

$r = n-1;\ U_{n-1} = f(n-1) - f(n)$

$r = n;\quad U_n = f(n) - f(n+1)$ 5

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1) \quad 5$$

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$$

5 ← ආදේශනය

$$= 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5}$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} \quad 5 \quad r \in \mathbb{Z}$$

අනවශ්‍යයි ×

30

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r \quad 5$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} \right)$$

$$= \frac{4}{5} \quad 5$$

5

∴ මෙම $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ යන අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන අතර එහි එකතුව $\frac{4}{5}$ වේ.

$\boxed{15}$

$$1 = \sum_{r=1}^{\infty} (U_r + kU_{r+1})$$

$$= (1+k)\left(\sum_{r=1}^{\infty} U_r \right) - kU_1 \quad 5$$

$$= (1+k)\left(\frac{4}{5}\right) - k\left(\frac{12}{35}\right) \quad 5$$

$$\therefore k = \frac{7}{16} \quad 5$$

$\boxed{15}$

13. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. සියලු $a \in \mathbb{R}$ සඳහා $\mathbf{A}^{-1}$ පවතින බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ තවද $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^T + \mathbf{R}$ වන පරිදි වේ. $a = 1$ බව පෙන්වන්න.

a හි මෙම අගය සඳහා, $\mathbf{A}^{-1}$ ලියා දක්වා, ඒ නයින්, $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ වන පරිදි x හා y හි අගයන් සොයන්න.

(b) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $z\bar{z} = |z|^2$ බව පෙන්වා ඒ නයින්, $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$ බව අපෝහනය කර, ආගන්ඩ් සටහනේ, z, w හා 0 නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය නොවන විට, ඒ සඳහා ජ්‍යාමිතික අර්ථ නිරූපණයක් දෙන්න.

(c) $z = -1 + \sqrt{3}i$ යැයි ගනිමු. z යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ වේ.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $z^n = a_n + ib_n$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ වේ. $m, n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(z^m \cdot z^n\right)$ යන්න a_m, a_n, b_m හා b_n ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

z^{m+n} සලකමින් හා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $m, n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $a_m a_n - b_m b_n = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(a) සියලු $a \in \mathbb{R}$ සඳහා $|A| = a(a+2) + 2 = a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \neq 0.$ 5

05

$\therefore$ සියලු $a \in \mathbb{R}$ සඳහා A^{-1} පවතී. 5

$\boxed{15}$

$$A = PQ^T + R \quad 5$$

$$\begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad 5$$

5

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 5$$

$a = 1$ හා $a + 2 = 3.$ $\quad \therefore a = 1$ 5

$\boxed{25}$

Enu

$a = 1$ විට $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a ඇති ms 05

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad 10$$

05 05

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 10$$ (on error)

5 5

on. error ×

$x = 1$ හා $y = 3$ වේ.

30

Enu

(b) $x y \in \mathbb{R}$ සඳහා $z = x + iy$ ලෙස ගනිමින්

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

5 5

10

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} \quad 5$$

$$= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \quad 5$$

$$= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \quad 5$$

$$= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2$$

5

$$= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \text{ ---------- (i)}$$

20

(i) හි w යන්න $-w$ මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්

5

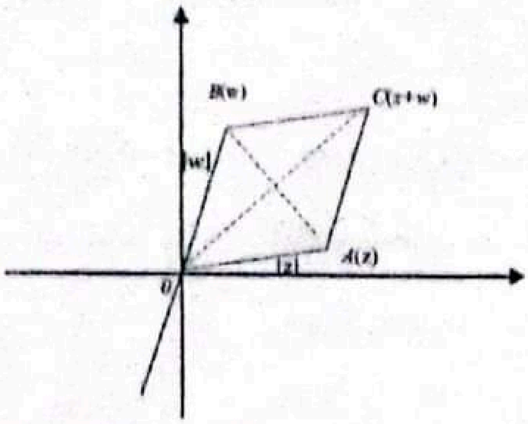
$$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \text{ ---------- (ii)}$$

$\therefore$ (i) හා (ii) න්

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right). \quad 5$$

Enu

Enu



z, w හා 0 ඒක රේඛීය නොවේනම් එවිට $OC^2 + AB^2 = 2\left(OA^2 + OB^2\right)$.

$\left(\because OC = |z+w| \right.$ හා $\left. AB = |z+w|.\right)$

සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණයන්හි වර්ගවල එකතුව එහි පාදවල වර්ගවල එකතුවට සමාන වේ.

5

$\boxed{15}$

(c) $z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ 10

5

මෙහි $r = 2$ හා $\theta = \frac{2\pi}{3}$ වේ. $\boxed{15}$

Enu

5

$\mathrm{Re}(z^m z^n) = \mathrm{Re}\left[(a_m + ib_m)(a_n + ib_n)\right] = a_m a_n - b_m b_n$ -------- (1) $\boxed{05}$

---

5 5

$z^m z^n = z^{m+n} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{n+m} = 2^{m+n}\left[\cos\frac{2(m+n)\pi}{3} + i\sin\frac{2(m+n)\pi}{3}\right]$

$\therefore \mathrm{Re}(z^m z^n) = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$ ------------------ (2)

5

(1) හා (2) $\Rightarrow a_m a_n - b_m b_n = 2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$. $\boxed{15}$

Enu

14.(a) $x \neq -2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq -2$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{-2(x+1)}{(x+2)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

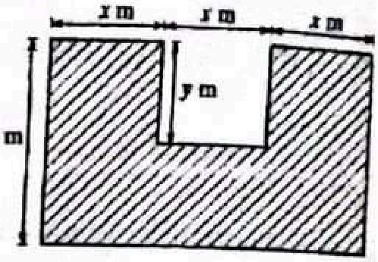
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq -2$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$ බව දී ඇත. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$[k, \infty)$ මත $f(x)$ එකට-එක වන k හි කුඩාතම අගය ප්‍රකාශ කරන්න.

(b) රූපයේ පෙන්වා ඇති අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $45\ \text{m}^2$ වේ. එය ලබාගෙන ඇත්තේ දිග $3x$ m හා පළල $2y$ m වූ සෘජුකෝණාස්‍රයකින්, දිග x m හා පළල y m වූ සෘජුකෝණාස්‍රයක් ඉවත් කිරීමෙනි. අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි පරිමිතිය L m යන්න $x > 0$ සඳහා $L = 6x + \dfrac{54}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. L අවම වන x හි අගය සොයන්න.



(a) $x \neq -2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$.

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2(2) - 2(2x+3)(x+2)}{(x+2)^4} \quad 20$$

03 03 03 05

$$= \frac{2(x+2)[x+2-2x-3]}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{-2(x+1)}{(x+2)^3} \quad 5$$

25

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad 5$

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	$(-)$ 05	$(+)$	$(-)$ 05
$f(x)$	අඩු වේ ↘	වැඩි වේ ↗	අඩු වේ ↘
	5	5	05

$\therefore$ $(-2, -1]$ මත $f(x)$ වැඩි වේ. හා

$\therefore$ $(-\infty, -2)$ මත $[-1, \infty)$ $f(x)$ අඩු වේ.

20

හැරවුම් ලක්ෂය: $(-1,1)$ ස්ථානීය උපරියක් වේ (5) (5)

(ප්‍රස්තාරයේ ලකුණු කර ඇත්නම්) (10)

$$f''(x)=\frac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}.$$ (5)

	$-2<x<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<\infty$
$f''(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$
	යටි අවතල	උඩු අවතල

(5) (5)

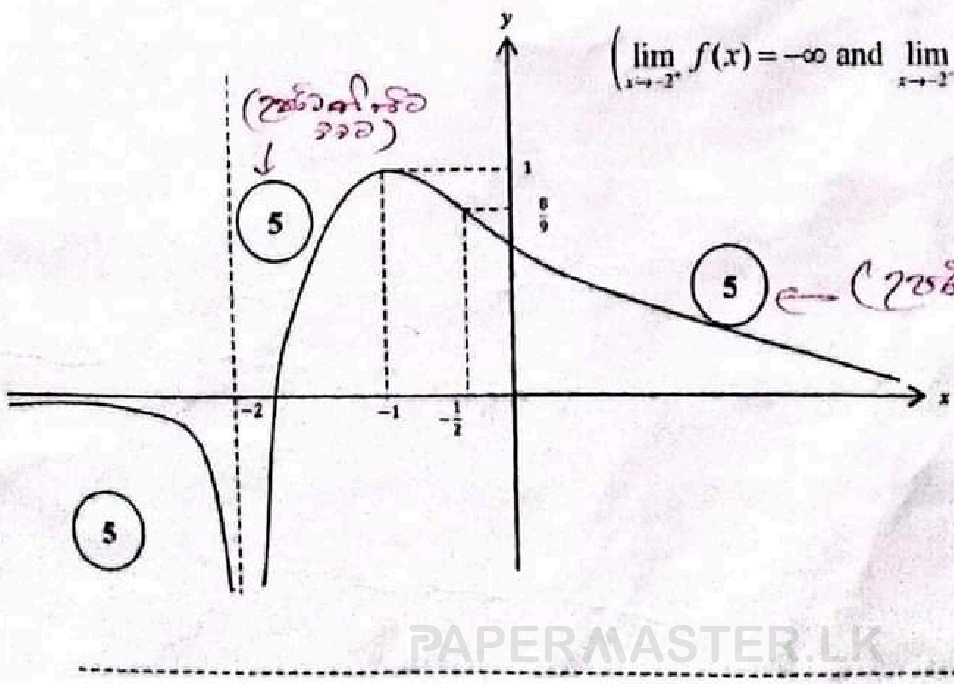
$\therefore \left(\frac{-1}{2},\frac{8}{9}\right)$ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය වේ (5)

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ $\quad \therefore y=0$ (5)

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $x=-2$ (5)

ප්‍රස්තාරයේ ලකුණු කර ඇත්නම් 05 05

$\left(\lim_{x\to-2^+} f(x)=-\infty \text{ and } \lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty\right)$

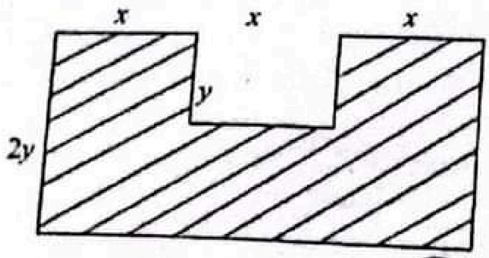


55

k හි කුඩාතම අගය $k = -1$ වේ. 5

05

(b)



for $x > 0, \quad y > 0$

5 5

අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $45 = (3x)(2y) - xy$

$\therefore \quad 45 = 5xy$

$\therefore \quad y = \frac{9}{x}$ 5

$L = 6x + 6y$ 10

$= 6x + \frac{54}{x} \quad$ for $x > 0$ 5

$\frac{dL}{dx} = 6 - \frac{54}{x^2} = \frac{6(x^2 - 9)}{x^2} = \frac{6(x-3)(x+3)}{x^2}$

5

$\frac{dL}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$ 5

$0 < x < 3$ සඳහා $\frac{dL}{dx} < 0$ හා

$x > 3$ සඳහා $\frac{dL}{dx} > 0$ වේ

$\therefore x = 3$ විට L අවම වේ. 5

45

15.(a) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^2 + x + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^2 + x + 2}{(x^2 + x + 1)(x + 1)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා, $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 2}{(x^2 + x + 1)(x + 1)}\,dx$ සොයන්න.

(b) $1 + \sin 2x = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$ බව පෙන්වා, ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin 2x}\,dx = 1$ බව පෙන්වන්න.

(c) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2}\,dx$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $I = -\dfrac{\pi^2}{8} + J$ බව

පෙන්වන්න; මෙහි $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \sin 2x}\,dx$.

$\displaystyle\int_0^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a - x)\,dx$ යන සම්බන්ධය හා (b) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් J හි අගය ගණනය කර $I = \dfrac{\pi}{8}(2 - \pi)$ බව පෙන්වන්න.

(a)

$$x^2 + x + 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$
$$= (A + B)x^2 + (A + B + C)x + A + C$$

x හි බලවල සංගුණක සංසන්දනය කිරීමෙන්

x^0 : $z = A + C$

x : $1 = A + B + C$ 5

x^2 : $1 = A + B$

$\therefore A = 2, \quad B = -1 \quad and \quad C = 0.$ 5

5 5

20

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x^2 + x + 1)(x + 1)} = \frac{2}{x + 1} - \frac{x}{x^2 + x + 1}$$ 5

$$\therefore \int \frac{x^2 + x + 2}{(x^2 + x + 1)(x + 1)}dx = 2\int \frac{1}{x + 1}dx - \int \frac{x}{x^2 + x + 1}dx$$ 5

$$= 2\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

5 5 5

$$-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{(x+\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

5 5 5

$$x^2+x+1>0$$

$$|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + C,$$ මෙහි C නියතයකි

on Error 35

72, 05

$\boxed{40}$

(*b*)

$$2\cos^2(\frac{\pi}{4}-x) = 2(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x)^2$$

$$=(\cos x + \sin x)^2 \quad 5$$

$$= 1 + 2\sin x\cos x \quad 5$$

$$= 1 + \sin 2x \quad 5$$

$\boxed{15}$

$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$2\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right]^2$

$2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right]^2$

$\frac{2}{2}\left[\cos x + \sin x\right]^2$

$\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x$

$1 + \sin 2x$

$1+\sin 2x = 2\cos^2($

R.H.S $= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$= 1+\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$= 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

$= 1+\sin 2x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}dx \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx \quad 5$$

$$= \frac{-1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \quad 5$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) - \tan\frac{\pi}{4}\right) \quad 5$$

$1+\sin 2x$

$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin$

$(\sin x + \cos x)^2$

$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)^2$

$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$$= \frac{-1}{2}(-1-1)$$

$$= 1 \quad 5$$

$\boxed{25}$

(C) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}\,dx$$

$$= x^2\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{1+\sin 2x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx \quad 5$$

5 5

$$= \frac{-1}{2}\times\frac{\pi^2}{4}\times\frac{1}{1+0} \; 5 \; + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$$

$$= \frac{-\pi^2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$$

$$= \frac{-\pi^2}{8} + J. \quad 5$$

$\boxed{25}$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\underbrace{1+\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{\sin 2x}}\,dx \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{x}{1+\sin 2x}}_{J}\,dx \quad 5$$

$$\therefore 2J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{1+\sin 2x}}_{1}\,dx \quad 5 \; (2J)$$

$$\therefore J = \frac{\pi}{4} \quad 5$$

$$\therefore I = \frac{-\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}(2-\pi) \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

16. $P \equiv (x_0, y_0)$ හා l යනු $ax + by + c = 0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. P සිට l ට ඇති ලම්බ දුර $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ බව පෙන්වන්න.

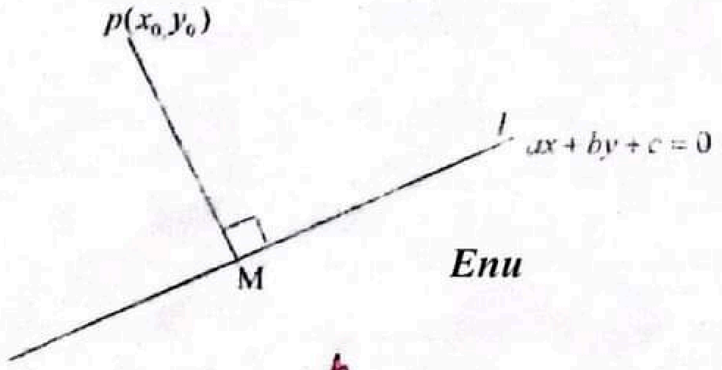
l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින්, $4x - 3y + 8 = 0$ හා $3x - 4y + 13 = 0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු.

l_1 හා l_2, $A \equiv (1, 4)$ හිදී ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකයේ පරාමිතික සමීකරණ $x = t$ හා $y = t + 3$ ලෙස ලිවිය හැකි බව ද පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$.

ඒ නයින්, l_1 හා l_2 සරල රේඛා දෙකම ස්පර්ශ කරන, l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණය අඩංගු වන පෙදෙසෙහි පවතින ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය $(x-t)^2 + (y-t-3)^2 = \frac{1}{25}(t-1)^2$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ හා $t \neq 1$.

ඉහත වෘත්ත අතුරින්, කේන්ද්‍රය A වන හා අරය 1 වන වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.



Here $a^2 + b^2 \neq 0$

$\frac{b}{a}$

PM හි සමීකරණය $(y - y_0) = \frac{a}{b}(x - x_0)$ වේ 5

P හරහා lට ලම්බ රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂයක්

$t \in \mathbb{R}$ සඳහා $(x_0 + at, y_0 + bt)$ ලෙස ලිවිය හැකිය. 5

M, l මත පිහිටයි $\quad a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$ 5

$$\therefore t(a^2 + b^2) = -ax_0 + by_0 + c$$

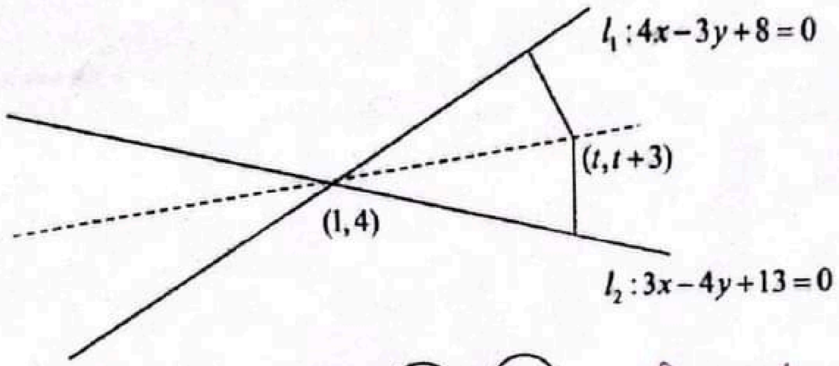
$$\therefore \quad t = \frac{-(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}$$ 5

$\therefore$ අවශ්‍ය දුර $PM = \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2}$ 5

$= \sqrt{a^2 + b^2}\,|t|$

$= \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 5

$\boxed{30}$



l_1 හඳුනා ගැනීමට 5 5 l_2 හඳුනා ගැනීමට

A හි ඛණ්ඩාංක l_1, සහ l_2 හි ආදේශයෙන් අපට l_1, සහ l_2 ඡේදා $A = (1, 4)$ හිදී ඡේදනය වේ. 5

$\boxed{15}$

$\dfrac{4x - 3y + 8}{5} = \pm \dfrac{3x - 4y + 13}{5}$ මගින් කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ දෙනු ලබයි. 10 සූත්‍රයට -05 ආදේශයට -05

කෝණවල සමච්ඡේදක $\underbrace{x + y - 5}_{m=-1} = 0$ සහ $x - y + 3 = 0$ වේ.

5 5

θ යනු l_1 සහ $x_1 + y - 5 = 0$ අතර සුළු කෝණය යයි ගනිමු.

එවිට $\tan\theta = \left| \dfrac{\frac{4}{3} - (-1)}{1 + \frac{4}{3}(-1)} \right| = 7 > 1$ 5

10 සූත්‍රයට -05 ආදේශයට -05

5

$\therefore$ සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකය $x - y + 3 = 0$ වේ. 5

එය පරාමිතිකව පහත දැක් වේ.

$t \in \mathbb{R}$ සඳහා $x = t$ යැයි ගනිමු. 5

එවිට $y = x + 3 = t + 3.$ 5

55

අවශ්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය පුළු කෝණ සමච්ඡේදකය මත පිහිටිය යුතුය.

5

$\therefore$ කේන්ද්‍රය $t \in \mathbb{R}$ සඳහා $(t, t+3)$ ආකාරයෙන් විය යුතුය

අරය $= \dfrac{|4t - 3(t+3) + 8|}{5} = \left|\dfrac{t-1}{5}\right|$ 5 5

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය

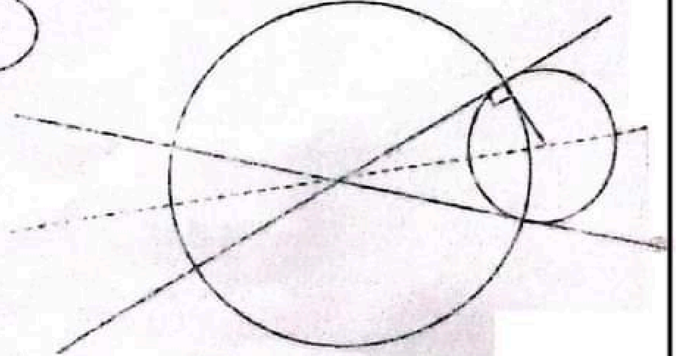
$$(x-t)^2 + (y-(t+3))^2 = \tfrac{1}{25}(t-1)^2$$ 5

$$(x-t)^2 + (y-t-3)^2 = \tfrac{1}{25}(t-1)^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

20

ප්‍රලම්බව ඡේදනය වන වෘත්ත සඳහා පයිතගරස් ප්‍රමේය යෙදීමෙන්

$$(t-1)^2 + (t+3-4)^2 = 1^2 + \frac{1}{25}(t-1)^2$$ 10



$$\therefore \quad (t-1)^2 = \frac{25}{49}$$

$$\Rightarrow t-1 = \frac{5}{7} \quad \text{or} \quad t-1 = \frac{-5}{7}$$

5 5

$$\therefore \quad t = \frac{12}{7} \quad \text{or} \quad t = \frac{2}{7}$$

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තවල සමීකරණ:

$$\left(x - \frac{12}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{33}{7}\right)^2 = \frac{1}{25}\left(\frac{12}{7} - 1\right)^2 \qquad \left(t = \frac{12}{7}\right)$$

$$(7x-12)^2 + (7y-33)^2 = 1$$ 5

$$\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\left(y-\frac{23}{7}\right)^2=\frac{1}{25}\left(\frac{2}{7}-1\right)^2 \qquad \left(t=\frac{2}{7}\right)$$

$$(7x-2)^2+(7y-23)^2=1$$ 5

$\boxed{30}$

---------- *Enu* ----------

Enu

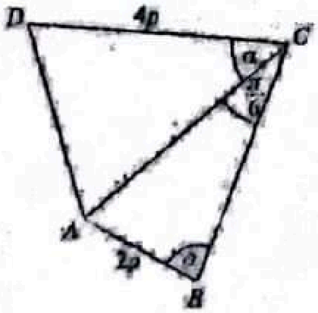
17. (a) $\cos A$, $\cos B$, $\sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A+B)$ ලියා දක්වා, $\sin(A-B)$ සඳහා එවැනිම ප්‍රකාශනයක් ලබාගන්න.

$k \in \mathbb{R}$ හා $k \neq 1$ යැයි ගනිමු. $k>1$ හා $k<1$ අවස්ථා වෙන වෙනම සලකමින්, $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ යන්න $R\cos(\theta+\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R(>0)$ k ඇසුරෙන් ද $\alpha\,(0<\alpha<2\pi)$ ද නිර්ණය කළ යුතු නියතයන් වේ.

ඒ නයින්, $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=|k-1|$ විසඳන්න.

(b) රූපයේ පෙන්වා ඇති $ABCD$ චතුරස්‍රයෙහි $AB=2p$, $CD=4p$, $A\hat{C}B=\frac{\pi}{6}$ හා $A\hat{B}C=A\hat{C}D=\alpha$ වේ. $AD^2=16p^2(\sin^2\alpha-\sin 2\alpha+1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $AD=4p$ නම් $\alpha=\tan^{-1}(2)$ බව පෙන්වන්න.



(c) $x>1$ සඳහා $\tan^{-1}(\ln x^{\frac{2}{3}})+\tan^{-1}(\ln x)+\tan^{-1}(\ln x^2)=\frac{\pi}{2}$ විසඳන්න.

(a) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ 5

sin (A-B) ලියා ඇත්නම් 05

$$\sin(A-B)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(A-B)\right) \quad 5$$

$$=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-A\right)+B\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos B-\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\sin B \quad 5$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B \quad 5$$

20

Enu

$$2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) \quad 5 \quad 5$$

$$=2k\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)+2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=k\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)+\left(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right) \quad 5$$

$$=(k-1)\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)$$

$$=2(k-1)\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) \quad 5$$

$$=2(k-1)\cos(\theta+\beta) \quad \text{where } \beta=\frac{\pi}{3}$$

5

Enu

$k > 1$ විට $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2(k-1)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$;

මෙහි $R = 2(k-1)$ හා $\alpha = \frac{\pi}{3}$. 5

$k < 1$ විට $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2(1-k)\cos\left(\pi+\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$=2(1-k)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$

මෙහි $R = 2(1-k)$ හා $\alpha = \frac{4\pi}{3}$. 5

35

$2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=|k-1|$

$k > 1$ විට

$2(k-1)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=k-1$

$\therefore \cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ 5

$\Rightarrow \theta+\frac{\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad n\in\mathbb{Z}$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3} \; n\in\mathbb{Z}.$ 5

$k < 1$ විට

$2(1-k)\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right) = 1-k$ 5

$\therefore \quad \cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

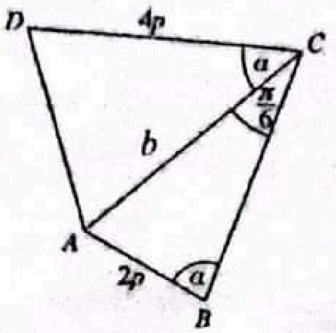
$\theta+\frac{4\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3} n\in\mathbb{Z}.$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi-\frac{4\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3} n\in\mathbb{Z}.$ 5

20

(*b*) *ABC* ත්‍රිකෝණයට සයින් සූත්‍රය :

10



$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{2p}{\sin\frac{\pi}{6}} \Rightarrow b = 4p\sin\alpha$$ 5

ACD ත්‍රිකෝණයට කෝසයින් සූත්‍රය :

$$AD^2 = b^2 + (4p)^2 - 2b(4p)\cos\alpha$$ 10

$$= 16p^2\sin^2\alpha + 16p^2 - 2(4p)^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= 16p^2(\sin^2\alpha - \sin 2\alpha + 1)$$ 5

$\boxed{30}$

$AD = 4p$, නම්.

$\sin^2\alpha - \sin 2\alpha + 1 = 1$

$\sin\alpha(\sin\alpha - 2\cos\alpha) = 0$ 5

නමුත් $\sin\alpha \neq 0$ $\sin\alpha = 2\cos\alpha$ 5

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$ $\cos\alpha \neq 0$

$\therefore$ $\tan\alpha = 2$ and $\alpha = \tan^{-1}(2)$. 5

$\boxed{15}$

$AD^2 = 16p^2(\sin^2\alpha - \sin 2\alpha + 1)$

$16p^2 = 16p^2(\sin^2\alpha - \sin 2\alpha + 1)$

(c)

$x > 1$:

$$\underbrace{\tan^{-1}\left(\ln x^{2/3}\right)}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}(\ln x)}_{\beta} + \underbrace{\tan^{-1}\left(\ln x^{2}\right)}_{\theta} = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta + \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad 5$$

$\alpha + \beta + \theta = \frac{\pi}{2}$ ✓ 05

$$\tan(\beta + \theta) = \cot b\alpha \quad 5$$

$$\frac{\tan\beta + \tan\theta}{1 - \tan\beta\tan\theta} = \frac{1}{\tan\alpha} \quad 5$$

$$\therefore \quad \frac{\ln x + \ln x^2}{1 - \ln x \ln x^2} = \frac{1}{\ln x^{\frac{2}{3}}} \quad 5$$

$$\frac{\ln x^3}{1 - 2(\ln x)^2} = \frac{1}{\frac{2}{3}\ln x}$$

$t = \ln x \Rightarrow$

$$3 \times \frac{2}{3}t^2 = 1 - 2t^2 \quad 5$$

$$4t^2 = 1$$

$$\ln x = t = \frac{1}{2} \qquad \left(\because t \neq \frac{-1}{2}\ ;\ \ t = \ln x \ \text{ and } x > 1\right)$$

$$\therefore \qquad x = e^{\frac{1}{2}} \quad 5$$

සත්‍යාපනය

30

$$\tan^{-1}\left(\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right) + \tan^{-1}\left(\ln e^{\frac{1}{2}}\right) + \tan^{-1}(\ln e) \doteq \frac{\pi}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \qquad \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}_{\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\frac{1}{2}}} \doteq \frac{\pi}{4}.$$

$$= \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}$$

$$= 1$$